INDICE GENERAL

7.69
155E
e)

Capítulos *Páginas*

PRÓLOGO *a la primera edición* IX

PRÓLOGO *a la segunda edición* .. XIII

Introducción y perspectivas 1

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío, campos y fuentes, 2. La ley de proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia o la masa del fotón, 5. El principio de superposición lineal, 9. Las ecuaciones de Maxwell en los medios macroscópicos, 13. Condiciones en la superficie límite entre medios diferentes, 17. Algunas notas sobre las idealizaciones en el electromagnetismo, 21. Referencias y lecturas recomendadas, 25.

1 **Introducción a la Electrostática** 27

Ley de Coulomb, 27. Campo eléctrico, 28. Ley de Gauss, 30. Forma diferencial de la ley de Gauss, 32. La segunda ecuación de la Electrostática. El potencial escalar, 33. Distribuciones superficiales de cargas y dipolos. Discontinuidades en el campo eléctrico y en el potencial, 35. Ecuaciones de Poisson y Laplace, 39. Teorema de Green, 40. Unicidad de la solución con las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann, 42. Solución formal del problema electrostático de condiciones de contorno mediante la función de Green, 43. Energía potencial electrostática y densidad de energía. Capacidad, 46. Referencias y lecturas recomendadas, 50. Problemas, 50.

2 **Problemas de condiciones de contorno en Electrostática: I** 55

El método de las imágenes, 55. Carga puntual en presencia de una esfera conductora conectada a tierra, 56. Carga puntual en presencia de una esfera conductora aislada y cargada, 59. Carga puntual en presencia de una esfera conductora mantenida a potencial fijo, 61. Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme por el método de imágenes, 61. Función de Green para la esfera; solución general del potencial, 63. Esfera conductora con los hemisferios a diferentes potenciales, 64. Funciones y desarrollos ortogonales, 66. Separación de variables; ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas, 70. Un problema de potencial bidimensional. Suma de una serie de Fourier, 72. Campos y densidades de carga en vértices bidimensionales y a lo largo de aristas, 76. Referencias y lecturas recomendadas, 80. Problemas, 81.

3 **Problemas de condiciones de contorno en Electrostática: II** 86

La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, 86. La ecuación de Legendre y los polinomios de Legendre, 88. Problemas de contorno dotados de simetría asimutal, 93. Comportamiento de los campos en un agujero cónico o cerca de una punta, 96. Las funciones asociadas de Legendre y los armónicos esféricos, $Y_{l,m}(\theta, \phi)$, 100. El teorema de adición para los armónicos esféricos, 103. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas; funciones de Bessel, 105. Problemas de condiciones de contorno en coordenadas cilíndricas, 111. Desarrollo de las funciones de Green en coordenadas esféricas, 113. Solución a los problemas de potencial mediante el desarrollo en funciones de Green esféricas, 117. Desarrollo de la función de Green en coordenadas cilíndricas, 120. Desarrollo de las funciones de Green en funciones propias, 122. Condiciones de contorno mixtas. Plano conductor con un orificio circular, 125. Referencias y lecturas recomendadas, 131. Problemas, 132.

4 **Multipolos, electrostática de los medios macroscópicos, dieléctricos** ... 140

El desarrollo multipolar, 140. Desarrollo en multipolos de la energía de una distribución de carga en un campo exterior, 146. Tratamiento elemental de la electrostática en presencia de medios materiales, 148. Problemas de condiciones de contorno con dieléctricos, 151. Polarizabilidad molecular y susceptibilidad eléctrica, 157. Modelos para la polarizabilidad molecular, 160. Energía electrostática en medios dieléctricos, 163. Referencias y lecturas recomendadas, 167. Problemas, 168.

169628

Capítulos *Páginas*

5 Magnetostática ... 173

Introducción y definiciones, 173. Ley de Biot y Savart, 174. Las ecuaciones diferenciales de la Magnetostática y la ley de Ampère, 178. Potencial vector, 180. Potencial vector e inducción magnética de una espira circular, 182. Campo magnético de una distribución localizada de corriente; momento magnético, 185. Fuerza y par sobre, y energía de, una distribución localizada de corriente en un campo magnético externo, 190. Ecuaciones macroscópicas. Condiciones de contorno para B y H, 192. Métodos de solución para los problemas de condiciones de contorno en Magnetostática, 196. La esfera imanada uniformemente, 200. Esfera imanada en un campo externo; imanes permanentes, 202. Apantallamiento magnético; capa esférica de material de gran permeabilidad, 204. Efecto de un orificio circular en un plano perfectamente conductor con un campo magnético en uno de los lados tangencial y asintóticamente uniforme, 206. Referencias y lecturas recomendadas, 209. Problemas, 210.

6 Campos variables con el tiempo, ecuaciones de Maxwell, leyes de conservación ... 215

Ley de inducción de Faraday, 216. Energía en un campo magnético, 220. Corriente de desplazamiento de Maxwell. Ecuaciones de Maxwell, 223. Potencial escalar y potencial vector, 225. Transformaciones de contraste, condición de Lorentz, condición de Coulomb, 227. Función de Green para la ecuación de ondas, 229. Deducción de las ecuaciones del electromagnetismo macroscópico, 232. El teorema de Poynting y las leyes de conservación de la energía y el ímpetu para un sistema de partículas cargadas y campos electromagnéticos, 242. Las leyes de conservación para los medios macroscópicos, 246. Teorema de Poynting para campos armónicos, definición de impedancia y admitancia en función de los campos, 248. Propiedades de transformación de las fuentes y los campos electromagnéticos en las rotaciones, reflexiones espaciales y la inversión temporal, 251. Sobre la cuestión de los monopolos magnéticos, 258. Discusión sobre la condición de cuantización de Dirac, 260. Referencias y lecturas recomendadas, 266. Problemas, 268.

7 Ondas electromagnéticas planas y propagación de ondas ... 276

Ondas planas en un medio no conductor, 276. Polarización lineal y circular. Parámetros de Stokes, 280. Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas en una superficie plana entre dos medios dieléctricos, 285. Polarización por reflexión y reflexión total interna, 289. Características de dispersión con la frecuencia de los dieléctricos, conductores y plasmas, 291. Modelo simplificado de propagación en la ionosfera y la magnetosfera, 299. Ondas en un medio conductor o disipativo, 302. Superposición de ondas en una dimensión. Velocidad de grupo, 305. Ejemplo de la difusión de un impulso al propagarse en un medio dispersivo, 309. La causalidad en la relación entre D y E. Relaciones de Kramers-Kronig, 312. Llegada de una señal después de su propagación a través de un medio dispersivo, 319. Referencias y lecturas recomendadas, 332. Problemas, 333.

8 Guías de onda y cavidades resonantes ... 341

Campos junto a la superficie y en el interior de un conductor, 341. Cavidades cilíndricas y guías de ondas, 346. Guías de ondas, 349. Modos en una guía de ondas rectangular, 351. Flujo de energía y atenuación en las guías de ondas, 353. Perturbación de las condiciones de contorno, 357. Cavidades resonantes, 359. Pérdidas de potencia en una cavidad; Q de una cavidad, 362. La tierra y la ionosfera como una cavidad resonante: Resonancias de Schumann, 367. Guías de ondas dieléctricas, 370. Desarrollo en modos normales. Campos generados por una fuente localizada en la guía, 375. Reflexión y transmisión de diafragmas planos, aproximación variacional, 381. Impedancia de una cinta plana paralela al campo eléctrico en una guía de ondas rectangular, 386. Referencias y lecturas recomendadas, 390. Problemas, 391.

9 Sistemas radiantes sencillos, dispersión y difracción ... 398

Campos y radiación de una fuente oscilante localizada, 398. Campos y radiación de dipolos eléctricos, 401. Campos debidos a un dipolo magnético y a un cuadrupolo eléctrico, 404. Antena lineal excitada en su centro, 408. Desarrollo multipolar para una fuente localizada o abertura en una guía de ondas, 412. Dispersión para longitudes de onda largas, 419. Teoría de perturbaciones de la dispersión, explicación de Rayleigh del azul del cielo, dispersión en gases y líquidos, 426. Teoría escalar de la difracción, 434. Equivalentes vectoriales de la integral de Kirchhoff, 439. Teoría vectorial de la difracción, 443. Principio de Babinet de las pantallas complementarias, 446. Difracción por una abertura circular, notas sobre aberturas pequeñas, 449. Dispersión en el límite de longitudes de onda corta, 455. El teorema óptico y algunos temas relacionados, 460. Referencias y lecturas recomendadas, 466. Problemas, 468.

10 Magnetohidrodinámica y física de plasmas ... 478

Introducción y definiciones, 478. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica, 480. Difusión, viscosidad y presión magnéticas, 481. Flujo magnetohidrodinámico

Capítulos *Páginas*

entre paredes, con campos eléctrico y magnético cruzados, 484. Efecto de constricción, 488. Inestabilidades en una columna de plasma mantenida por constricción, 491. Ondas magnetohidrodinámicas, 494. Oscilaciones del plasma, 499. El límite para longitudes de onda corta de las oscilaciones del plasma y la distancia de apantallamiento de Debye, 503. Referencias y lecturas recomendadas, 506. Problemas, 507.

11 Teoría de la relatividad especial 512

La situación anterior a 1900. Los dos postulados de Einstein, 513. Algunos experimentos recientes, 516. Las transformaciones de Lorentz y los resultados cinemáticos básicos de la relatividad especial, 524. La adición de velocidades. Cuadrivelocidad, 531. Energía e ímpetu relativistas de una partícula, 533. Propiedades matemáticas del espacio-tiempo de la relatividad especial, 540. Representación matricial de las transformaciones de Lorentz. Generadores infinitesimales, 544. Precesión de Thomas, 549. Invariancia de la carga eléctrica. Covariancia de la electrodinámica, 555. Transformación de los campos electromagnéticos, 560. Ecuación de movimiento relativista para el spin en campos externos uniformes o variables en forma suave, 564. Observación sobre la notación y unidades en cinemática relativista, 568. Referencias y lecturas recomendadas, 569. Problemas, 571.

12 Dinámica de partículas relativistas y campos electromagnéticos 581

Lagrangiano y hamiltoniano para una partícula cargada en campos electromagnéticos externos, 581. Sobre la cuestión de obtener el campo magnético, la fuerza magnética y las ecuaciones de Maxwell a partir de la ley de Coulomb y la relatividad especial, 587. Movimiento en un campo magnético estático y uniforme, 590. Movimiento en el seno de campos combinados eléctrico y magnético, estáticos y uniformes, 591. Deriva de partículas en campos magnéticos estáticos no uniformes, 593. Invariancia adiabática del flujo a través de la órbita de la partícula, 597. Correcciones relativistas de menor orden para el lagrangiano de dos partículas cargadas en interacción, lagrangiano de Darwin, 602. Lagrangiano del campo electromagnético, 604. Lagrangiano de Proca. Efectos de la masa del fotón, 607. Tensores de tensiones canónico y simétrico. Leyes de conservación, 610. Solución de la ecuación de ondas en forma covariante. Funciones de Green invariantes, 617. Referencias y lecturas recomendadas, 621. Problemas, 622.

13 Colisiones entre partículas cargadas; pérdida de energía y dispersión. 628

Transferencia de energía en una colisión de Coulomb, 629. Transferencia de energía a una carga enlazada armónicamente, 633. Fórmulas clásica y mecanocuántica de la pérdida de energía, 636. Efecto de densidad en la pérdida de energía por colisión, 642. Radiación de Cherenkov, 648. Pérdida de energía en un plasma electrónico, 652. Dispersión elástica de partículas rápidas por átomos, 653. Angulo de dispersión cuadrático medio y distribución angular en la dispersión múltiple, 658. Referencias y lecturas recomendadas, 661. Problemas, 662.

14 Radiación de cargas en movimiento 665

Los potenciales de Liénard-Wiechert y los campos de una carga puntual, 665. Potencial total radiado por una carga acelerada. Fórmula de Larmor y su generalización relativista, 669. Distribución angular de la radiación emitida por una carga acelerada, 673. Radiación emitida por una carga en movimiento arbitrario extremadamente relativista, 676. Distribución angular y en frecuencia de la energía radiada por cargas aceleradas, 678. Espectro de frecuencias de la radiación emitida por una partícula relativista cargada en movimiento circular instantáneo, 683. Dispersión de Thomson de la radiación, 690. Dispersión de radiación por cargas cuasi-libres. Dispersión coherente e incoherente, 694. Radiación de transición, 696. Referencias y lecturas recomendadas, 704. Problemas, 705.

15 Radiación de frenado, método de los cuantos virtuales, procesos radiativos beta 713

Radiación emitida durante las colisiones, 714. Radiación de frenado en colisiones de Coulomb, 720. Efectos de apantallamiento; pérdida de energía radiativa relativista, 727. Método de los cuantos virtuales de Weizsacker-Williams, 731. Radiación de frenado como dispersión de cuantos virtuales, 736. Radiación emitida durante la desintegración beta, 738. Radiación emitida en la captura de un electrón orbital. Desaparición de la carga y del momento magnético, 740. Referencias y lecturas recomendadas, 745. Problemas, 746.

16 Campos multipolares 752

Soluciones básicas de la ecuación de ondas escalar en ondas esféricas, 752. Desarrollo multipolar de los campos electromagnéticos, 757. Propiedades de los campos multipolares; energía y momento cinético de la radiación multipolar, 760. Distribución angular de la radiación multipolar, 765. Fuentes de radiación multipolar; momentos multipolares, 768. Radiación multipolar en

Capítulos *Páginas*

sistemas atómicos y nucleares, 772. Radiación por una antena lineal de alimentación central, 776. Desarrollo en ondas esféricas de una onda plana vectorial, 781. Dispersión de las ondas electromagnéticas por una esfera conductora, 783. Problemas de condiciones de contorno con campos multipolares, 789. Referencias y lecturas recomendadas, 789. Problemas, 790.

17 **Amortiguamiento por radiación, autocampos de una partícula, dispersión y absorción de radiación por un sistema ligado** 794

Introducción, 794. Fuerza de reacción radiativa a partir del principio de conservación de la energía, 796. Cálculo de Abraham-Lorentz de la auto-fuerza, 800. Dificultades en el modelo de Abraham-Lorentz, 804. Definiciones covariantes de la energía y el ímpetu electromagnéticos, 805. La ecuación integrodiferencial de movimiento incluyendo el amortiguamiento debido a la radiación, 810. Anchura de línea y desplazamiento de nivel de un oscilador, 812. Dispersión y absorción de radiación por un oscilador, 815. Referencias y lecturas recomendadas, 820. Problemas, 821.

Apéndice sobre unidades y dimensiones 825

Unidades y dimensiones; unidades fundamentales y unidades derivadas, 825. Unidades y ecuaciones electromagnéticas, 827. Los diferentes sistemas de unidades electromagnéticas, 830. Conversión de ecuaciones y cantidades entre unidades gaussianas y M.K.S.A., 831

Apéndice de fórmulas y teoremas 835

Fórmulas vectoriales, 835. Teoremas de cálculo vectorial, 836. Dónde encontrar material clave sobre funciones especiales, 837. Fórmulas explícitas de las operaciones vectoriales, 838.

Bibliografía 839

Indice de materias 845

A la memoria de mi padre,
WALTER DAVID JACKSON

PROLOGO a la primera edición

La teoría electromagnética clásica, junto con la mecánica, clásica y cuántica, constituye hoy en día el núcleo de cursos teóricos para estudiantes y graduados en Física. La fundamentación de todas estas materias es un requisito previo para cursos más avanzados o especializados.

Por lo general, el programa de electricidad y magnetismo para estudiantes incluye dos o tres semestres después de los dedicados a la Física elemental, que hacen hincapié en las leyes fundamentales, realización práctica de sus consecuencias en el laboratorio, análisis de circuitos, fenómenos ondulatorios simples y radiación. El aparato matemático que se utiliza consta de cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes, series de Fourier y tal vez transformadas de Fourier o Laplace, ecuaciones en derivadas parciales, polinomios de Legendre y funciones de Bessel.

A los graduados principiantes se les da generalmente un curso de dos semestres sobre teoría electromagnética, y es para este propósito para lo que está proyectado nuestro libro. Tres fines pretendemos en el desarrollo del presente curso. El primero es presentar de forma coherente los aspectos fundamentales, tanto en sus bases físicas como en el modo de describirlos matemáticamente. El segundo, desarrollado paralelamente, es la utilización de varios aspectos de Física matemática que resultan muy útiles, tanto en teoría electromagnética como en mecánica cuántica. Se incluyen aquí los teoremas y funciones de Green, desarrollados en funciones ortonormales, armónicos esféricos, funciones de Bessel cilíndricas y esféricas. El tercer fin, y quizá el más importante, es la presentación de nuevas materias, especialmente en la interacción de partículas relativistas cargadas con campos electromagnéticos. En este tercer campo se incluyen gran cantidad de prejuicios y preferencias personales. Hemos procedido a la elección de todos estos aspectos guiados por lo que creemos que es más útil e importante para los estudiantes interesados en Física teórica, Física experimental nuclear y de alta energía, y la hasta ahora no claramente definida Física de plasmas.

Según es tradicional, el libro comienza por el estudio de la electrostática. Los seis primeros capítulos están dedicados a la exposición y desarrollo de la teoría del electromagnetismo de Maxwell. Muchos de los recursos matemáticos necesarios se introducen y justifican a lo largo de la exposición, sobre todo en los capítulos 2 y 3, en donde se discuten problemas de contorno de forma completa. Al principio, este tratamiento utiliza el campo eléctrico F *y la inducción magnética* B, *junto con las magnitudes macroscópicas derivadas* D *y* H, *que se introducen por cálculo de valores medios sobre conjuntos de átomos o moléculas. Al tratar los dieléctricos se describen modelos de polarizabilidad atómica, aspecto que no tratamos en las sustancias magnéticas. En parte se*

debe esta omisión a motivos de espacio, pero la verdad es que no son posibles modelos clásicos de susceptibilidad magnética, y cualquier bosquejo que hiciéramos sobre los interesantísimos fenómenos del ferromagnetismo necesitaría ya de por sí casi un libro completo.

Los tres capítulos siguientes (7 a 9) ilustran varios fenómenos electromagnéticos, la mayoría de naturaleza macroscópica. En el capítulo 7 se tratan ondas planas en diferentes medios, así como la dispersión y propagación de impulsos. En el capítulo 8 se discuten las guías de onda y cavidades para sistemas de sección transversal arbitraria, así como los problemas de atenuación en guías y la Q de una cavidad; todos estos aspectos se tratan de forma muy general, considerando los procesos físicos que tienen lugar. La teoría elemental de la radiación por multipolos debida a una fuente localizada, además de la difracción, constituyen la materia del capítulo 9. Como la teoría escalar simple de la difracción se presenta en muchos libros de texto de óptica, además de en libros de electricidad y magnetismo para estudiantes no graduados, hemos presentado una teoría de la difracción algo más perfeccionada, aunque continúa siendo aproximada, que se basa en los teoremas vectoriales de Green en lugar de en los escalares.

La Magnetohidrodinámica y Física de plasmas fijan cada vez más la atención de físicos y astrofísicos. El capítulo 10 nos presenta algunos aspectos de este campo complejo, junto con una introducción a las ideas físicas principales que se refieren al caso.

Los nueve o diez primeros capítulos constituyen las ideas básicas de la electricidad y magnetismo clásicos. Un estudiante graduado en Física podría pensar quizá que se le exponen demasiadas materias, que corresponderían en realidad a un nivel inferior. No obstante, adquirirá así una mayor madurez y las comprenderá más profundamente, al tiempo que obtendrá una destreza considerable con los métodos de resolución cuando estudie todas estas materias al nivel de este libro. Es entonces cuando se encuentra preparado para seguir adelante con cuestiones más avanzadas. Las que se presentarán aquí se refieren predominantemente a interacción de partículas cargadas entre sí y con campos electromagnéticos, especialmente cuando se trata de movimientos relativistas.

Los orígenes de la relatividad especial están en la Electrodinámica clásica, e incluso después de casi sesenta años todavía impresiona y agrada ésta como un bello ejemplo de covarianza de las leyes sometidas a las transformaciones de Lorentz. En el capítulo 11 se discute la teoría de la relatividad especial, en donde se desarrolla todo el aparato formal, se estudian varias consecuencias cinemáticas y se establece la covarianza de la Electrodinámica. El siguiente capítulo se dedica a la cinemática y dinámica de partículas relativistas. Aunque la dinámica de partículas cargadas en campos electromagnéticos pueda considerarse acertadamente como Electrodinámica, el lector puede admirarse de que sea posible abordar cuestiones tales como transformaciones cinemáticas de problemas de colisión. Nuestra respuesta es que estos ejemplos suceden de forma natural una vez establecido el carácter cuadrivectorial del momento y energía de una partícula, que constituyen una práctica útil en el manejo de las transformaciones de Lorentz, y que los resultados finales son dignos de apreciar y a menudo difíciles de hallar en cualquier otro libro.

El capítulo 13, sobre colisiones entre partículas cargadas, trata detenidamente las pérdidas de energía y dispersión, y desarrolla conceptos que se utilizarán en capítulos posteriores. Es aquí donde por primera vez en el libro utilizamos argumentos semiclásicos basados en el principio de incertidumbre para

obtener expresiones mecanocuánticas aproximadas para las pérdidas de energía, etc., a partir de los resultados clásicos. Esta aproximación, tan fructífera en manos de NIELS BOHR *y* E. J. WILLIAMS, *nos permite ver de forma clara cómo y cuándo intervienen los efectos mecanocuánticos para modificar las consideraciones clásicas.*

El importante tema de emisión de radiación por cargas puntuales aceleradas se discute detalladamente en los capítulos 14 y 15. Se resaltan los efectos relativistas y se desarrollan expresiones que nos dan la dependencia angular y de frecuencia de la radiación emitida, con generalidad suficiente para todas las aplicaciones. Los ejemplos tratados se extienden desde la radiación de sincrotrón hasta la radiación de frenado (bremsstrahlung) *y procesos beta radiativos. También se discute la radiación de Cherenkov y el método de los cuantos virtuales de Weizsäcker-Williams. En los procesos de colisión atómica y nuclear se utilizan nuevamente argumentos semiclásicos para obtener resultados mecanocuánticos aproximados. Insistimos en particular sobre este punto porque creemos que interesa al estudiante ver que los efectos radiativos, tales como la radiación de frenado, son casi por completo de naturaleza clásica, incluso cuando tienen lugar colisiones a pequeña escala. Un estudiante que encuentre por primera vez la radiación de frenado, por ejemplo, en teoría cuántica de campos, no comprenderá sus fundamentos físicos.*

Objeto del capítulo 16 son los campos debidos a multipolos. Desde el principio se describe el desarrollo de campos escalares y vectoriales en ondas esféricas sin imponer restricciones en cuanto a dimensiones de la fuente y longitud de onda. A continuación se consideran las propiedades de los campos de radiación por multipolos eléctricos y magnéticos. Ya establecida la conexión con los momentos multipolares de las fuentes, se discuten ejemplos de radiación por multipolos atómicos y nucleares, así como de una fuente macroscópica de dimensiones comparables a una longitud de onda. Se trata con cierto detalle la dispersión de una onda electromagnética plana por un objeto esférico con el fin de ilustrar un problema de contorno con ondas esféricas vectoriales.

En el último capítulo se discute el difícil problema de la reacción radiativa. El tratamiento es físico más que matemático, y se hace notar la delimitación de áreas en las cuales resultan adecuadas las correcciones radiativas, enseñándonos también a encontrar dónde y por qué dejan de ser válidas las teorías existentes. Se presenta la teoría original de Abraham-Lorentz sobre la fuerza propia (autofuerza), además de consideraciones clásicas más recientes.

Finaliza el libro con un apéndice sobre unidades y dimensiones y una lista bibliográfica. Hemos tratado en el apéndice I de mostrar los pasos lógicos que se requieren para establecer un sistema de unidades sin presionar al lector sobre las evidentes ventajas de nuestra *elección de unidades. Damos, además, dos tablas que esperamos serán de utilidad; una para convertir ecuaciones y símbolos y la otra para pasar cantidades dadas de cualquier magnitud del sistema gaussiano al MKS y viceversa. En la lista bibliográfica incluimos libros que, a nuestro parecer, encontrará el lector adecuados y útiles para referencias o estudio adicional. Estos libros figuran solamente con el nombre del autor en las citas bibliográficas del final de cada capítulo.*

Constituye este libro el resultado de un curso de electrodinámica clásica para graduados que hemos ido elaborando durante los últimos once años en las Universidades de Illinois y McGill. Deseamos agradecer a nuestros colegas y estudiantes de ambos centros sus innumerables sugerencias y discusiones. Debemos mencionar en especial al profesor P. R. WALLACE, *de McGill, que nos dio la oportunidad y nos animó a enseñar lo que entonces era un curso*

no ortodoxo sobre electromagnetismo, y a los profesores H. W. WYLD *y* G. ASCOLI, *de Illinois, que libremente nos han dado sugerencias valiosas en el tratamiento de varios aspectos. Extendemos también nuestro agradecimiento al* Dr. A. N. KAUFMAN *por su lectura y comentarios a una versión preliminar del manuscrito, y a* Mr. G. L. KANE *por su entusiasta ayuda en la preparación del índice.*

J. D. JACKSON

PROLOGO a la segunda edición

En los trece años transcurridos desde la aparición de la primera edición, mi interés por el electromagnetismo clásico ha oscilado sin llegar nunca a reducirse a cero. Es un tema siempre fresco. Siempre hay aplicaciones y ejemplos nuevos e importantes. La presente edición refleja dos esfuerzos por mi parte: la depuración y mejora del material ya incluido en la primera edición, y la adición de nuevos temas (con la omisión de unos pocos).

El énfasis y los propósitos principales aún son los mismos, pero se han realizado cambios y adiciones extensos. Una adición importante es la Introducción y perspectivas, *que inicia la obra. En ella se tratan aspectos tales como los actuales límites experimentales a la masa del fotón y la validez del principio de superposición lineal. El propósito es ofrecer una visión de unos aspectos básicos que con frecuencia se dan por sabidos cuando se expresan las ecuaciones de Maxwell y se empieza a resolver ejemplos específicos. Otros cambios importantes en la primera mitad del libro son: un nuevo tratamiento en la derivación de las ecuaciones del electromagnetismo macroscópico a partir de la descripción microscópica, una discusión sobre las propiedades de simetría de las magnitudes mecánicas y electromagnéticas, secciones sobre los monopolos magnéticos y la condición de cuantización de Dirac, los parámetros de polarización de Stokes, una discusión unificada de las características de dispersión en frecuencia de los dieléctricos, conductores y plasmas, una discusión sobre la causalidad y las relaciones de dispersión de Kramers-Kronig, una versión simplificada, aunque bastante extensa, del problema clásico de Sommerfeld-Brillouin de la llegada de una señal en un medio dispersivo (verificada experimentalmente en fecha reciente), un ejemplo poco habitual de cavidad resonante, el desarrollo en modos normales de un campo arbitrario en una guía de ondas, y las cuestiones relacionadas de las fuentes en una guía o cavidad y los coeficiente de transmisión y reflexión de obstáculos planos en guías de ondas.*

El capítulo 9, que trata sobre sistemas radiantes sencillos y difracción, ha sido aumentado para incluir la dispersión en longitudes de onda grandes (por ejemplo, el color azul del cielo) y el teorema óptico. También se han mejorado las secciones sobre difracción escalar y vectorial.

Los capítulos 11 y 12, dedicados a la relatividad especial, se han reescrito casi por completo. La vieja métrica pseudo-euclídea $x_4 = ict$ *ha sido reemplazada por la notación* $g^{\mu\nu}$ *(con* $g^{00} = +1$, $g^{ii} = -1$, $i = 1, 2, 3$*). El cambio de métrica exigía una revisión completa, y esto ha permitido la sustitución de los experimentos y puntos de vista modernos sobre las bases experimentales de la teoría especial. También se han modernizado otros aspectos. El extenso tratamiento de la cinemática relativista de la primera edición ha quedado relegado a los problemas. En su lugar, se discuten el lagrangiano de los campos electromag-*

néticos, el tensor de energía-esfuerzo simétrico y canónico y el lagrangiano de Proca para fotones con masa.

De los restantes capítulos son alteraciones importantes una nueva sección sobre la radiación de transición, un tratamiento semiclásico completamente revisado (y mucho más satisfactorio) de la radiación emitida en las colisiones, que hace hincapié en la transferencia de ímpetu, en lugar del parámetro de impacto, y una mejor deducción del acoplamiento entre los campos multipolares y sus fuentes. A petición de muchos lectores se ha incluido una relación de fórmulas y la referencia a las páginas en que figuran las funciones especiales. De los 278 problemas, 117 (más del 40 por 100) son nuevos.

La única parte que ha quedado casi completamente intacta es el capítulo sobre Magnetohidrodinámica y Física del plasma. Esto quizá sea de lamentar, pero, no obstante, como es obvio, el libro ha crecido enormemente, y, por otra parte, existen muchos libros dedicados exclusivamente al tema de los plasmas y la magnetohidrodinámica.

Mi trabajo para esta edición empezó formalmente durante la primera mitad de 1970, con ocasión de una estancia sabática en Cambridge, en el Clare Hall y el Cavendish Laboratory. Quedo agradecido a la Universidad de California por el permiso, y también a N. F. MOTT *por su acogida como profesor visitante en el Cavendish Laboratory, a* M. J. EDEN *y* A. B. PIPPARD *por mi nombramiento como «Visiting Fellow» en Clare Hall. La presencia física y moral de* MAXWELL, RAYLEIGH *y* THOMPSON *en el Cavendish proporcionó inspiración a mi tarea; el estímulo de las diarias actividades allí suministró la necesaria diversión.*

Esta nueva edición se ha beneficiado de las sugerencias, comentarios y críticas de muchos estudiantes, colegas y otras personas. Entre aquellos a los que guardo una especial deuda de gratitud están A. M. BINCER, L. S. BROWN, R. W. BROWN, E. U. CONDON, H. H. DENMAN, S. DESER, A. J. DRAGT, V. L. FITCH, M. B. HALPERN, A. HOBSON, J. P. HURLEY, D. L. JUDD, L. T. KERTH, E. MARX, M. NAUENBERG, A. B. PIPPARD, A. M. PORTIS, R. K. SACHS, W. M. SASLOW, R. SCHLEIF, V. L. TELEGDI, T. TREDON, E. P. TRYON, V. F. WEISSKOPF *y* DUDLEY WILLIAMS.

De especial ayuda fueron D. G. BOULWARE, R. N. CAHN, LEVERETT DAVIS, Jr., K. GOTTFRIED, C. K. GRAHAM, E. M. PURCELL *y* E. H. WICHMANN.

Llegue a todos ellos mi agradecimiento y un fraternal saludo, así como a los numerosos lectores que se han comunicado conmigo y a los inc[illegible] stu diantes que han dedicado su esfuerzo a los problemas (¡y [illegible] alguna[illegible] me han escrito pidiendo la solución a partir de algún or[illegible]col). A mi [illegible]re el libro está mejor que nunca. ¡Que sea para provecho [illegible]legría del l[illegible]tor!

J. D. A[illegible]SON

INTRODUCCION Y PERSPECTIVAS

Aunque el ámbar y la piedra imán fueron conocidos por los antiguos griegos, la electrodinámica se ha desarrollado en su aspecto cuantitativo en menos de cien años. Los notables experimentos de CAVENDISH sobre electrostática se realizaron entre 1771 y 1773, y las monumentales investigaciones de COULOMB empezaron a publicarse en 1785. Esto marcó el inicio de la investigación cuantitativa en electricidad y magnetismo a escala mundial. Cincuenta años más tarde FARADAY estudiaba los efectos de corrientes y campos magnéticos variables con el tiempo. Hacia 1864 MAXWELL había publicado ya su famoso artículo sobre una teoría dinámica del campo electromagnético.

Naturalmente, la historia del desarrollo de nuestro conocimiento sobre la electricidad y el magnetismo, y sobre la luz, es mucho más rica y larga de lo que la mera mención de unos pocos nombres a lo largo de un siglo podría indicar. Para obtener una visión detallada de esta historia fascinante el lector debería consultar los autorizados volúmenes de WHITTAKER. Al principio de la obra de BORN y WOLF figura un resumen más breve, poniendo énfasis en los fenómenos ópticos.

El presente libro es autosuficiente en el sentido de que, aunque se supone cierta base matemática (cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales), el tema de la electrodinámica se desarrolla desde sus principios en la electrostática. Sin embargo, como la mayoría de los lectores no se acercan al tema por vez primera, el propósito de esta introducción no es disponer la escena para una discusión de la ley de Coulomb y otras bases, sino más bien presentar una revisión, y unas perspectivas, del electromagnetismo clásico. Se tratan cuestiones tales como la precisión actual de la ley de fuerza de proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia (masa del fotón), los límites de validez del principio de superposición lineal y los efectos del carácter discreto de la carga y de las diferencias de energía. También se tratan temas más vulgares, como las condiciones para los campos macroscópicos en las superficies entre medios diferentes y en el seno de los conductores. La intención es situar en contexto al electromagnetismo clásico para indicar su dominio de validez y para aclarar alguna de las idealizaciones que contiene. En el curso de la discusión se hace uso de algunos resultados posteriores del libro y de algunas ideas no clásicas.

Ciertamente, un lector que se enfrente con el electromagnetismo por primera vez no podrá seguir todos los argumentos o alcanzar su significado. Sin embargo, se ha intentado que para otros esta introducción sirva como trampolín hacia partes posteriores del libro, más allá del capítulo 5, así como recordatorio de cómo se fundamenta el tema como una ciencia experimental.

0.1. LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN EL VACIO, CAMPOS Y FUENTES

Las ecuaciones que gobiernan los fenómenos electromagnéticos son las ecuaciones de Maxwell, que para fuentes en el vacío son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \mu_0 \boldsymbol{J} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned} \qquad [0.1]$$

En las ecuaciones de Maxwell se halla implícita la ecuación de continuidad que relaciona la densidad de carga y la densidad de corriente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \qquad [0.2]$$

que se deduce de combinar la derivada temporal de la primera ecuación de las [0.1] con la divergencia de la segunda. También es esencial para considerar el movimiento de partículas cargadas la ecuación de la fuerza, de Lorentz:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad [0.3]$$

que proporciona la fuerza que actúa sobre una carga puntual q en presencia de campos electromagnéticos.

Estas ecuaciones se han escrito en unidades MKSA, el sistema de unidades electromagnéticas usado en este libro *. (Las unidades y dimensiones se discuten en el apéndice.) En la tabla 2 del apéndice se presentan las ecuaciones de Maxwell escritas en los sistemas de unidades más comunes.

Las ecuaciones de Maxwell contienen, además de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ y las fuentes ρ y $\boldsymbol{J}$, las constantes ϵ_0 y μ_0, características del vacío, relacionadas, a su vez, mediante

$$\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$$

con un parámetro c. Esta magnitud tiene las dimensiones de la velocidad y es la velocidad de la luz en el vacío. Resulta fundamental para todos los fenómenos electromagnéticos y relativistas. Con nuestras unidades de longitud y tiempo, definidas actualmente por separado en función de dos transiciones atómicas diferentes, como se discute en el apéndice, este parámetro tiene el valor empírico

$$c = 299\,792\,456{,}2 \pm 1{,}1 \text{ m/seg } **$$

---

* Al preparar la presente versión al español se ha realizado, con el visto bueno del autor, la conversión al sistema MKSA de unidades. Esto ha exigido ciertas adaptaciones mínimas del texto original en las frases en que se hacía referencia a las unidades gaussianas. *(N. del T.)*

** K. EVENSON y otros, *Phys. Rev. Letters*, **29**, 1346 (1972).

Este resultado proviene de un experimento en el que se emplea un láser de helio-neón, muy estabilizado, en el que se midieron ambas, frecuencia y longitud de onda (con la línea de 3,39 μm estabilizada con metano). Notemos de paso que la precisión así conseguida es tal que, probablemente, la definición actual del metro sea reemplazada por otra en la que se emplee c y el segundo. Hay evidencia [véase sec. 11.2, *c)*] de que el valor de la velocidad de la luz es, con gran exactitud, independiente de la frecuencia, desde frecuencias muy bajas hasta al menos $\nu = 10^{24}$ Hz (fotones de 4 GeV). En la mayoría de los casos prácticos puede tomarse aproximadamente $c \simeq 3 \times 10^8$ m/seg, o, si se quiere una exactitud considerablemente mayor, $c \simeq 2{,}998 \times 10^8$ m/seg.

Originalmente, los campos eléctrico y magnético $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en [0.1] fueron introducidos por medio de la ecuación de la fuerza [0.3]. En los experimentos de Coulomb se observaron las fuerzas que actúan entre distribuciones localizadas de carga. Así, resulta útil (véase sec. 1.2) introducir el campo eléctrico como la fuerza por unidad de carga. En forma semejante, en los experimentos realizados por AMPÈRE se estudiaron las fuerzas mutuas entre espiras conductoras recorridas por corrientes (véase sec. 5.2). Al identificar $NAq\boldsymbol{v}$ como la intensidad de la corriente en un conductor en el que el área de la sección transversal es A, con N portadores por unidad de volumen que se mueven con velocidad $\boldsymbol{v}$, vemos que en [0.3] $\boldsymbol{B}$ se define como la fuerza por unidad de corriente y unidad de longitud del conductor. Aunque $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ aparecen, pues, inicialmente como meros sustitutivos que encontramos conveniente introducir para las fuerzas producidas por distribuciones de carga y corriente, presentan también otros aspectos importantes. En primer lugar, su introducción desacopla conceptualmente las fuentes con respecto a los cuerpos de prueba que experimentan las fuerzas electromagnéticas. Si los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ debidos a dos distribuciones de fuentes son los mismos en un punto dado del espacio, la fuerza que actúe sobre una carga o corriente de prueba situada en dicho punto será la misma, independientemente de cuán diferentes sean las distribuciones de fuentes. Esto da sentido a $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en [0.3] por derecho propio, aparte de las fuentes. En segundo lugar, los campos electromagnéticos pueden existir en regiones del espacio en las que no haya fuentes. Transportan energía, ímpetu y momento cinético, y, así, tienen una existencia totalmente independiente de cargas y corrientes. De hecho, aunque se han reiterado algunos intentos de eliminar la referencia explícita a los campos en favor de una descripción de la interacción entre partículas cargadas basada en la acción a distancia, el concepto de campo electromagnético es una de las ideas más fructíferas de la Física, tanto clásica como mecanocuántica.

El concepto de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ como campos ordinarios es una noción clásica. Puede imaginarse como el límite clásico (límite para números cuánticos grandes) de una descripción mecanocuántica en términos de fotones reales o virtuales. En el dominio de los fenómenos macroscópicos, e incluso de algunos fenómenos atómicos, puede ignorarse normalmente el carácter discreto (fotones) del campo electromagnético, o al menos pasarlo por alto. Por ejemplo, a 1 m de distancia de una bombilla de 100 W, el campo eléctrico cuadrático medio es del orden de 0,005 V/m, y hay del orden de 10^{19} fotones visibles por metro cuadrado y segundo. Análogamente, a 100 km de distancia una antena isotropa de FM produce un campo eléctrico cuadrático medio de solamente 0,05 μV/m, pero este valor corresponde aún a un flujo de 10^{16} fotones/m$^2 \times$ seg, o, lo que es equivalente, alrededor de 10^9 fotones en un volumen cuya arista sea igual a una longitud de onda (27 m^3), a dicha distancia. Ordinariamente, un aparato no será sensible a los fotones individuales; la respuesta observable macroscó-

picamente será debida al efecto acumulativo de la emisión o absorción de muchos fotones, que aparecerá como continua. En tal caso, resulta permisible y apropiada una descripción puramente clásica mediante las ecuaciones de Maxwell.

¿Cómo decidir *a priori* cuándo es adecuada una descripción clásica del electromagnetismo? Ocasionalmente puede ser necesaria cierta sofisticación, pero normalmente resulta suficiente el criterio siguiente: la respuesta de un sistema material puede determinarse a partir de una descripción clásica de los campos electromagnéticos cuando el número de fotones implicados puede considerarse grande, pero el ímpetu transportado por cada fotón individual es pequeño comparado con el ímpetu del sistema material. Por ejemplo, cada uno de los fotones de 10^8 Hz emitidos por nuestra antena de FM le comunica un impulso de sólo $2{,}2 \times 10^{-34}$ newton-segundo. Con seguridad, el tratamiento clásico resulta adecuado. Análogamente, la dispersión de la luz por un electrón libre está gobernada por la fórmula clásica de THOMSON (sec. 14.7) a bajas frecuencias, y por las leyes del efecto Compton cuando el ímpetu $\hbar\omega/c$ del fotón incidente llega a ser comparable con mc. El efecto fotoeléctrico no es clásico para el sistema material, puesto que los electrones cuasi-libres del metal cambian sus energías individuales en cantidades aproximadamente iguales a las de los fotones absorbidos. Sin embargo, la corriente fotoeléctrica puede calcularse mecanocuánticamente para los electrones empleando una descripción clásica de los campos electromagnéticos.

Por otra parte, la naturaleza cuántica de los campos electromagnéticos debe tomarse en cuenta en la emisión espontánea de radiación por los átomos, o por cualquier otro sistema material cuando no hay fotones presentes inicialmente y sólo hay un número pequeño de fotones al final. Aún puede describirse el comportamiento medio en términos esencialmente clásicos, debido básicamente a la conservación de la energía y el ímpetu. Constituye un ejemplo el tratamiento clásico (sec. 17.2) de la caída en cascada de una partícula cargada a través de las órbitas en un potencial atractivo. Resulta adecuado un tratamiento clásico para números cuánticos grandes de la partícula, y los cambios seculares de la energía y del momento cinético pueden calcularse clásicamente a partir de la reacción de radiación debido a que las energías de los fotones sucesivos emitidos son pequeñas comparadas con la energía cinética o potencial de la partícula en órbita.

En [0.1] las fuentes son $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, la densidad de carga eléctrica, y $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$, la densidad de corriente eléctrica. En el electromagnetismo clásico se supone que son distribuciones continuas en $\boldsymbol{x}$, aunque de vez en cuando consideremos distribuciones localizadas que pueden tratarse aproximadamente como puntuales. Se supone que las magnitudes de estas cargas puntuales son completamente arbitrarias, pero se sabe que en realidad están restringidas a valores discretos. La unidad básica de carga es la magnitud de la carga del electrón:

$$\begin{aligned} |q_e| &= 1{,}6021917(70) \times 10^{-29}\ \text{C} \\ &= 4{,}803250(21) \times 10^{-19}\ \text{uee} \end{aligned}$$

donde se han indicado entre paréntesis los errores en las dos últimas cifras decimales. La carga del protón, y de todas las partículas actualmente conocidas, o sistemas de partículas, son múltiplos enteros de esta unidad básica. La exactitud con que se conoce experimentalmente que los múltiplos son exactamente enteros es óptima (mejor que 1 parte en 10^{20}). Los experimentos corres-

pondientes se discuten en la sección 11.9, donde se trata también la cuestión de la invariancia relativista de la carga.

En la mayor parte de las aplicaciones macroscópicas el carácter discreto de la carga no necesita ser considerado. Por ejemplo, un condensador de 1 μF a un potencial de 150 V tiene en cada uno de sus electrodos un total de 10^{15} cargas elementales. Unos miles de electrones más o menos pasarían desapercibidos. Una corriente de 1 μA corresponde a $6{,}2 \times 10^{12}$ cargas elementales/segundo. Naturalmente, existen algunos delicados experimentos macroscópicos, o casi macroscópicos, en los que interviene el carácter discreto de la carga. Uno de ellos es el famoso experimento de Millikan, de la gota de aceite. Sus gotitas eran típicamente de unos 10^{-4} cm de radio y sobre ellas había unas pocas, o unas pocas decenas, de cargas elementales.

Hay una falta de simetría en la forma en que aparecen los términos de fuentes en las ecuaciones de Maxwell [0.1]. Las dos primeras ecuaciones tienen fuentes; las dos segundas, no. Esto refleja *la ausencia experimental de cargas y corrientes magnéticas*. En realidad, como se demuestra en la sección 6.12, las partículas podrían tener carga magnética al igual que carga eléctrica. Si todas las partículas de la naturaleza tuvieran la misma relación entre la carga magnética y la carga eléctrica, podrían redefinirse los campos y las fuentes de tal modo que aparezcan las ecuaciones de Maxwell habituales [0.1]. En este sentido, resulta en cierto modo cuestión convencional decir que no existen cargas o corrientes magnéticas. Aunque en la mayor parte de este libro se supone que en las ecuaciones de Maxwell sólo figuran cargas y corrientes eléctricas, en el capítulo 6 se describen algunas de las consecuencias que tendría la existencia de una partícula con una relación distinta entre la carga magnética y la eléctrica, esto es, un monopolo magnético.

0.2. LA LEY DE PROPORCIONALIDAD INVERSA AL CUADRADO DE LA DISTANCIA O LA MASA DEL FOTON

CAVENDISH y COULOMB demostraron cuantitativamente que la dependencia con la distancia de la fuerza electrostática era una ley de proporcionalidad inversa con el cuadrado de la distancia. Mediante la ley de Gauss y el teorema de la divergencia, esto conduce a la primera de las ecuaciones de Maxwell [0.1] (véanse secs. 1.3 y 1.4). Los experimentos originales tenían una precisión de sólo unas pocas partes en cien y, además, estaban realizados a la escala de dimensiones del laboratorio. En el transcurso de los años se han realizado experimentos de mayor precisión y que corresponden a márgenes de tamaño diferentes. Actualmente se acostumbra a clasificar las pruebas sobre la dependencia con la distancia en uno de estos dos métodos:

a) Suponer que la fuerza varía como $1/r^{2+\epsilon}$ y establecer un valor o límite para ϵ.

b) Suponer que el potencial electrostático tiene una forma «tipo Yukawa» (véase sec. 1.9), $r^{-1}e^{-\mu r}$, y establecer un valor o límite para μ o μ^{-1}. Como $\mu = m_\gamma c/\hbar$, siendo m_γ la masa supuesta para el fotón, la prueba de la ley de proporcionalidad inversa con el cuadrado de la distancia se enuncia en términos de establecer un límite superior para m_γ. Los experimentos de laboratorio dan, normalmente, ϵ, y en ocasiones μ o m_γ; los experimentos geomagnéticos dan μ o m_γ.

El experimento original de CAVENDISH *, realizado en 1772, con esferas concéntricas, dio un límite superior para ϵ de $|\epsilon| \leqslant 0{,}02$. Su aparato se muestra en la figura 0.1. Alrededor de unos cien años después, MAXWELL llevó a cabo un experimento muy semejante en Cambridge **, y estableció un límite superior de $|\epsilon| \leqslant 5 \times 10^{-5}$. Otros dos experimentos notables de laboratorio basados en la ley de Gauss son el de PLIMPTON y LAWTON ***, que dio $|\epsilon| < 2 \times 10^{-9}$, y el más reciente, de WILLIAMS, FALLER y HILL ****. En la figura 0.2 se ha dibujado un esquema de este último experimento. Aunque no se trata de un experimento estático ($\nu = 4 \times 10^6$ Hz), la idea básica es casi la misma que la de CAVENDISH. Este buscaba la existencia de carga sobre la esfera interior después de haberla puesto en contacto eléctrico con la esfera exterior cargada y de haberla desconectado; no la halló. WILLIAMS, FALLER y HILL buscaban una diferencia de potencial entre dos capas concéntricas cuando la exterior estaba sometida a una tensión alterna de ± 10 kV con respecto a tierra. La sensibilidad era tal que hubiera podido detectarse una diferencia de potencial menor de 10^{-12} V. Cuando su resultado nulo se interpreta mediante las ecuaciones de Proca (sec. 12.9), conduce a un límite de $\epsilon = (2{,}7 \pm 3{,}1) \times 10^{-16}$.

Las medidas del campo magnético terrestre, tanto sobre la superficie como fuera de ella mediante observación por satélites, permiten establecer los mejores límites para ϵ, o, lo que es equivalente, para la masa del fotón m_γ. Tanto las observaciones geofísicas como de laboratorio se discuten en las revisiones realizadas por KOBZAREV y OKUN' y por GOLDHABER y NIETO, citadas al final de esta introducción. Las medidas del campo magnético terrestre en superficie dan el valor ligeramente mejor (véase prob. 12.14), a saber:

$$m_\gamma < 4 \times 10^{-48} \text{ g}$$

o

$$\mu^{-1} > 10^{10} \text{ cm}$$

A título de comparación, la masa del electrón es $m_e = 9{,}1 \times 10^{-28}$ g. El experimento de laboratorio de WILLIAMS, FALLER y HILL puede interpretarse que establece un límite $m_\gamma < 1{,}6 \times 10^{-47}$ g, que es peor que el límite geomagnético sólo por un factor de 4.

La existencia de modos de oscilación de frecuencia muy baja en la cavidad resonante tierra-ionosfera (las resonancias de Schumann, que se estudian en sec. 8.9) permiten establecer muy fácilmente un límite *aproximado* para la masa del fotón. La doble relación de Einstein, $h\nu = m_\gamma c^2$, sugiere que la masa del fotón debe satisfacer una desigualdad $m_\gamma < h\nu_0/c^2$, siendo ν_0 cualquier frecuencia resonante electromagnética. La resonancia de Schumann más baja tiene $\nu_0 = 8$ Hz. De este valor calculamos que $m_\gamma < 6 \times 10^{-47}$ g, valor muy pequeño que resulta ser sólo un orden de magnitud mayor que el límite mejor establecido. Aunque este argumento resulta poco riguroso, el cálculo más cuidadoso (véase sec. 12.9 y las referencias allí dadas) demuestra que el límite es aproximadamente unas $(R/H)^{1/2} \simeq 10$ veces mayor, siendo R el radio de la Tierra, $\sim 6\,400$ km, y H la altura de la ionosfera, ~ 60 km *****. A pesar de este factor

---

* H. CAVENDISH, *Electrical Researches*, editado por J. C. Maxwell, Cambridge University Press (1879), págs. 104-113.

** *Idem*, véase nota 19.

*** S. J. PLIMPTON y W. E. LAWTON, *Phys. Rev.*, **50**, 1066 (1936).

**** E. R. WILLIAMS, J. E. FALLER y H. A. HILL, *Phys. Rev. Letters*, **26**, 721 (1971).

***** La cuestión básica es que, en la medida que H/R sea despreciable, la propagación del modo FEB (frecuencia extremadamente baja) es la misma que en el modo fundamen-

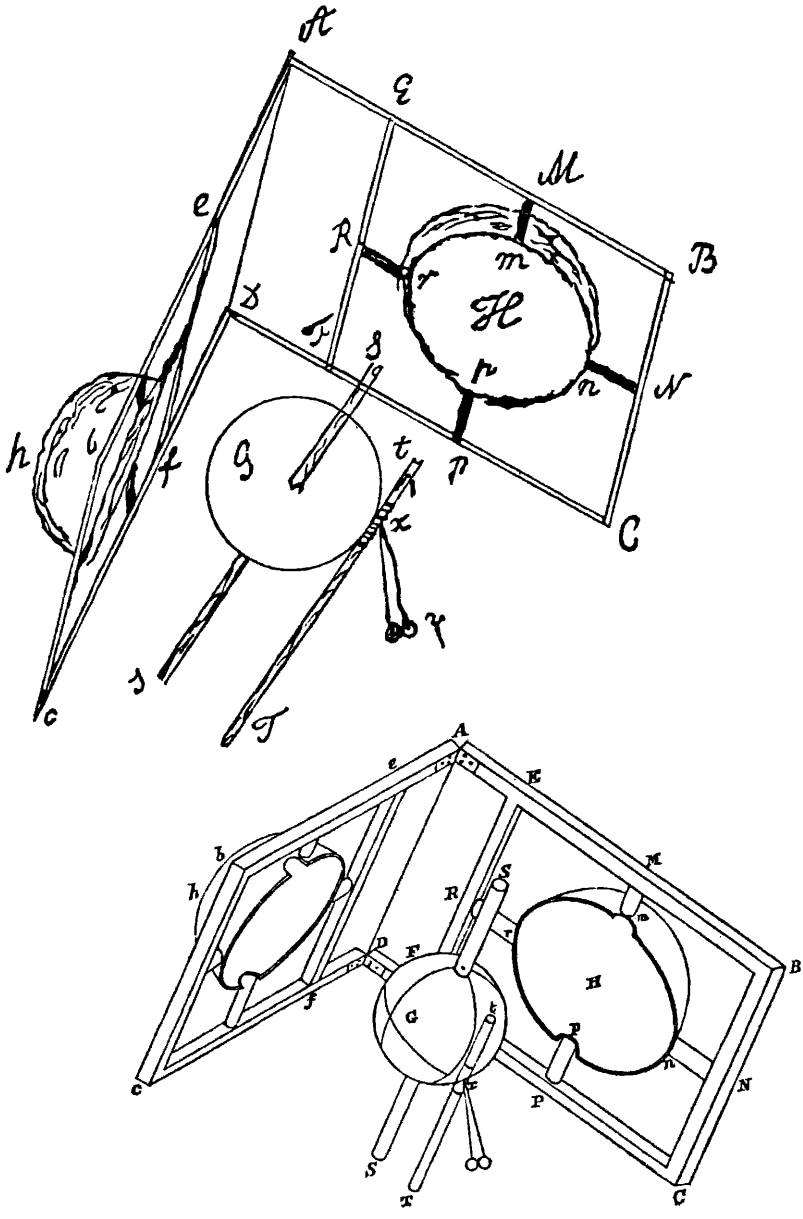


FIG. 0.1. Aparato de Cavendish para establecer la ley inversa del cuadrado de la distancia de la electrostática. Arriba: el esquema del propio Cavendish; abajo: dibujo de un delineante. El globo interior es de 12,1 pulgadas (0,3 m) de diámetro, los hemisferios huecos de cartón, ligeramente más grandes. Tanto el globo como los hemisferios se cubrieron con papel de estaño «para hacerlos los más perfectos conductores de la electricidad». (Figuras reproducidas con permiso de la Cambridge University Press.)

---

tal TEM (transversal electromagnético) de una línea de transmisión de placas paralelas. Esta propagación no se ve afectada porque la masa del fotón sea finita, salvo a través de los cambios en la capacidad estática y la autoinducción por unidad de longitud. Los efectos explícitos de la masa del fotón se presentan en el orden $(H/R)\mu^2$.

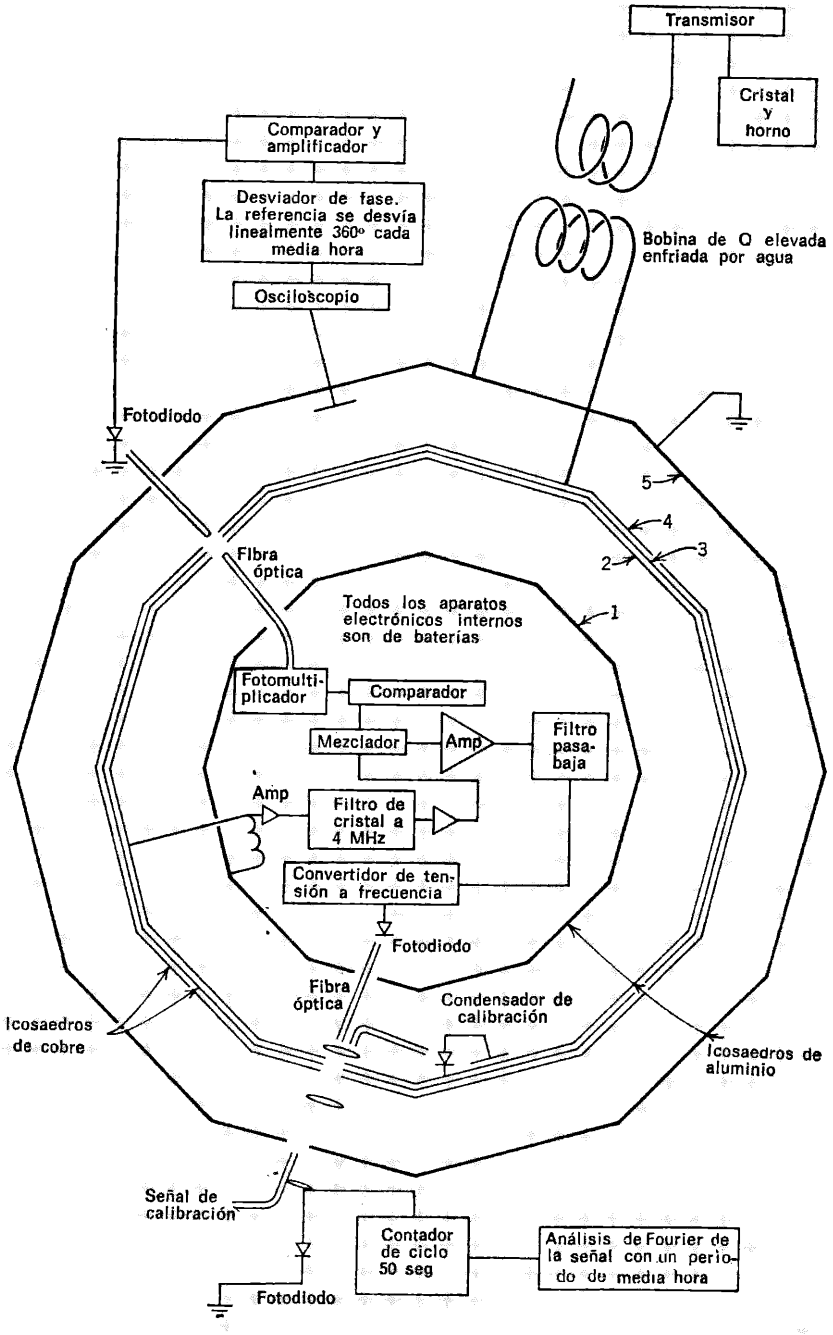


FIG. 0.2. Diagrama esquemático del experimento «tipo Cavendish», de WILLIAMS, FALLER y HILL. Los icosaedros concéntricos son conductores. Entre las capas 5 y 4 se aplica una tensión de 4 MHz y 10 kV de pico. La capa 4 y sus inmediatas, 2 y 3, son aproximadamente de 1,5 metros de diámetro y en interior se halla la capa 1. Cualquier diferencia de potencial aparece a través de la bobina dibujada en la capa 1, hacia la posición de las ocho del reloj. El amplificador y el sistema óptico son necesarios para extraer la información sobre la diferencia de potencial hasta el mundo exterior. Son equivalentes al sistema de cuerdas de Cavendish, que abrían automáticamente los hemisferios articulados y acercaban las bolitas de medula para probar la existencia de carga sobre la esfera interior. (Figura reproducida con permiso de los autores.)

correctivo el límite de 10^{-45} g establecido por la mera existencia de las resonancias de Schumann es muy notable.

Las pruebas de laboratorio y geofísicas demuestran que para distancias de entre 1 y 10^9 cm, la ley de proporcionalidad inversa con el cuadrado de las distancias se cumple con precisión extrema. Para distancias menores hemos de recurrir a evidencias menos directas, que frecuentemente implican hipótesis adicionales. Por ejemplo, el análisis histórico de RUTHERFORD de la dispersión de partículas alfa por láminas delgadas fundamenta la ley de Coulomb hasta distancias del orden de 10^{-11} cm, supuesto que la partícula alfa y el núcleo se puedan tratar como cargas puntuales clásicas que interaccionan estáticamente y que pueda despreciarse la nube de carga electrónica. Todas estas hipótesis pueden demostrarse, y naturalmente lo han sido, pero sólo dentro del marco de validez de la mecánica cuántica, del principio de superposición lineal (véase más adelante) y de otras hipótesis (muy razonables). A distancias aún menores es necesaria la mecánica cuántica relativista, y entonces intervienen efectos de interacción fuerte que oscurecen tanto las preguntas como las respuestas. No obstante, los experimentos de dispersión elástica de electrones positivos y negativos con energías en el sistema centro de masas de hasta 5 GeV han demostrado que la electrodinámica cuántica (la teoría relativista de electrones puntuales en interacción con fotones sin masa) se cumple hasta distancias del orden de 10^{-15} cm. Llegamos a la conclusión de que la masa del fotón puede considerarse que es cero (o que se cumple la ley de proporcionalidad inversa con el cuadrado de la distancia) en todo el dominio clásico de distancias, y en buena parte del dominio cuántico. ¡Se sabe que la ley de fuerzas se cumple al menos en 24 órdenes de magnitud de la escala de distancias!

0.3. EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION LINEAL

Las ecuaciones de Maxwell son *lineales* en los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Esta linealidad se aprovecha tan frecuentemente, por ejemplo, al transmitir centenares de conversaciones telefónicas diferentes por un solo enlace de microondas, que se da por supuesta. Naturalmente, se dan circunstancias en las que ocurren efectos no lineales (en los materiales magnéticos, en la respuesta de los cristales a haces de rayos láser muy intensos, e incluso en los dispositivos que se emplean para introducir y sacar del haz de microondas las conversaciones telefónicas citadas). Pero aquí estamos interesados en los campos en el vacío o en los campos microscópicos en el interior de los átomos y núcleos.

¿De qué evidencia disponemos para sustentar la idea de la superposición lineal? Toda clase de experimentos prueban, a nivel macroscópico, la superposición lineal con una exactitud del 0,1 por 100 —las agrupaciones de cargas y corrientes producen fuerzas eléctricas y magnéticas que son calculables por superposición lineal, los transformadores se comportan como se espera, en las líneas de transmisión se observan ondas estacionarias, etc.—; el lector mismo puede hacer una lista. En óptica, los sistemas de rendijas producen diagramas de difracción, la difracción de rayos X nos proporciona información sobre la estructura cristalina, la luz blanca es descompuesta por un prisma en los colores del arco iris y puede recombinarse dando de nuevo luz blanca. A nivel macroscópico, y aun a nivel atómico, la superposición lineal resulta ser notablemente válida.

Es en el dominio subatómico donde pueden buscarse legítimamente desviaciones respecto a la superposición lineal. Cuando las partículas cargadas se aproximan mucho unas a otras la intensidad de los campos eléctricos se hace enorme. Si imaginamos una partícula cargada como una distribución localizada de carga vemos que su energía electromagnética crece más y más a medida que la carga se localiza más y más. Es natural, con el fin de evitar autoenergías infinitas de partículas puntuales, especular sobre la eventualidad de que se presente algún tipo de saturación, o de que los campos tengan cierto límite superior. En el pasado se han estudiado teorías clásicas no lineales de tal tipo. Un ejemplo bien conocido es la teoría de Born-Infeld *. Al vacío se le asignan permeabilidades eléctrica y magnética:

$$\epsilon = \frac{c^2}{\mu} = \epsilon_0 \left[1 + \frac{4\pi}{b^2} (c^2 B^2 - E^2) \right]^{-1/2} \qquad [0.4]$$

siendo b una intensidad máxima de los campos. Las ecuaciones [0.4] son, en realidad, formas simplificadas de otras propuestas anteriormente sólo por BORN. Pero resultan suficientes para ilustrar la idea general. Es evidente que los campos se modifican a distancias cortas; todas las energías electromagnéticas permanecen finitas. Sin embargo, tales teorías padecen de arbitrariedad por la forma en que se introduce la no linealidad y también por los graves problemas que surgen en la transición a una teoría cuántica. Además, no hay evidencia alguna de este tipo de no linealidad clásica. La mecánica cuántica de los átomos con muchos electrones se describe con gran precisión por medio de la teoría cuántica normal, en la que las interacciones entre el núcleo y los electrones, y entre unos electrones y otros, está dada por una *superposición lineal* de potenciales por parejas (o de interacciones relativistas retardadas para los efectos finos). Las intensidades del campo en las órbitas de los electrones en los átomos son del orden de 10^{11}-10^{17} V/m, en tanto que el campo eléctrico en la superficie de un núcleo pesado es del orden de 10^{21} V/m. Las diferencias de energía entre los niveles de los átomos ligeros como el helio, calculadas en base a la superposición lineal de las interacciones electromagnéticas, están de acuerdo con los resultados experimentales, con precisiones que se acercan a una parte en 10^6.

Las energías de Coulomb de los núcleos pesados son consistentes con la superposición lineal de los efectos electromagnéticos. Naturalmente, es posible que para intensidades del campo superiores a 10^{19} V/cm puedan ocurrir efectos no lineales. Un lugar donde buscar tales efectos es en los núcleos superpesados ($Z > 110$), tanto en los niveles energéticos atómicos como en la energía nuclear de Coulomb **. En el momento actual no existe evidencia de ningún efecto no lineal clásico en el comportamiento de los campos en el vacío a cortas distancias.

Por otra parte, existe una *no linealidad mecanocuántica* de los campos electromagnéticos que procede de que el principio de incertidumbre permite la creación momentánea de un par electrón-positrón a partir de dos fotones y la subsiguiente desaparición del par con emisión de dos fotones diferentes, tal como se indica esquemáticamente en la figura 0.3. Este proceso se denomina

* M. BORN y L. INFELD, *Proc. Roy. Soc.*, **A144**, 425 (1934). Véase M. BORN, *Atomic Physics*, Blackie, Londres, Apéndice VI, para una discusión elemental.

** Una investigación sobre el efecto de una no linealidad del tipo Born-Infeld en los niveles de energía atómicos en los elementos superpesados ha sido realizada por J. RAFELSKI, W. GREINER y L. P. FULCHER, *Nuovo Cimento*, **13B**, 135 (1973).

dispersión de luz por luz *. Las dos ondas planas incidentes, $e^{ik_1\cdot x-i\omega_1 t}$ y $e^{ik_2\cdot x-i\omega_2 t}$, no se suman coherentemente, como ocurriría con la superposición lineal, sino que interaccionan y (con una propabilidad pequeña) se transforman en dos ondas planas diferentes que tienen vectores de onda $\boldsymbol{k}_3$ y $\boldsymbol{k}_4$. Esta característica

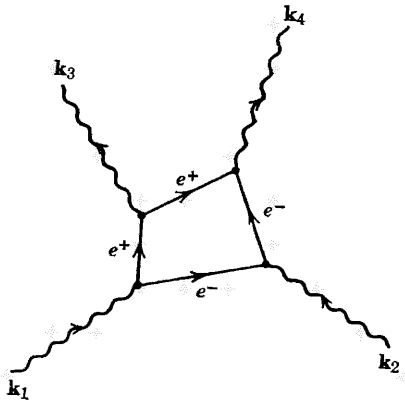


FIG. 0.3. La dispersión de la luz por la luz. Diagrama esquemático del proceso por el cual tiene lugar la dispersión fotón-fotón.

no lineal de la electrodinámica cuántica puede expresarse, al menos para campos que varíen lentamente, en función de los tensores de permeabilidades eléctrica y magnética del vacío:

$$D_i=\sum_k \epsilon_{ik}E_k; \qquad B_i=\sum_k \mu_{ik}H_k$$

siendo:

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_{ik}&=\epsilon_0\left[\delta_{ik}+\frac{e^4\hbar}{45\pi m^4c^7}\,2(E^2-c^2B^2)\delta_{ik}+7c^2B_iB_k\right]+\dots\\ \mu_{ik}&=\mu_0\left[\delta_{ik}+\frac{e^4\hbar}{45\pi m^4c^7}\,2(B^2-E^2/c^2)\delta_{ik}+7E_iE_k/c^2\right]+\dots\end{aligned}\right\} \qquad [0.5]$$

en donde e y m son la carga y la masa del electrón. Estos resultados fueron obtenidos por primera vez, en 1935, por EULER y KOCKEL **. Observamos que en el límite clásico ($\hbar\to 0$) estos efectos no lineales se hacen cero. Al comparar con la expresión clásica [0.4] de Born-Infeld se ve que, para no linealidades pequeñas, la intensidad del campo mecanocuántico:

$$b_q=\frac{\sqrt{45\pi}}{2}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}}\,\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_0}\simeq 0{,}51\,\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

* Cuando dos de los fotones en la figura 0.3 son fotones virtuales que representan la interacción de segundo orden con un campo nuclear estático de Coulomb, el proceso se conoce con el nombre de dispersión de Delbruck. Véase la sección 15.8 de J. M. JAUCH y F. ROHRLICH, *The Theory of Photons and Electrons*, Adisson-Wesley, Reading, Mass. (1955).

** H. EULER y B. KOCKEL, *Naturwiss.*, **23**, 246 (1935).

desempeña un papel análogo al del parámetro b de Born-Infeld. Aquí $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2 \simeq 2{,}8 \times 10^{-13}$ cm es el radio clásico del electrón y $e/4\pi\epsilon_0 r_0^2 = 1{,}8 \times 10^{20}$ V/m es el campo eléctrico en la superficie de tal electrón clásico. Dos comentarios sobre la marcha: *a)*, la introducción en [0.5] de ϵ_{ik} y μ_{ik} es una aproximación que falla para intensidades del campo que se aproximan a b_q, o cuando los campos varían demasiado rápidamente en el espacio o en el tiempo ($\hbar/mc$ establece la escala crítica de longitudes y $\hbar/mc^2$ la de tiempos); *b)*, la coincidencia numérica por azar de b_q y $e/8\pi\epsilon_0 r_0^2$ es sugestiva, pero probablemente sin significado, puesto que en b_q aparece la constante de Planck $\hbar$.

En analogía con la polarización $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \epsilon_0 \boldsymbol{E}$, diremos que los términos que dependen del campo en [0.5] corresponden a efectos de *polarización del vacío*. Además de la dispersión de la luz por luz, o de la dispersión de Delbruck, la polarización del vacío causa desplazamientos muy pequeños en los niveles atómicos de energía. La contribución dominante implica un par electrón-positrón, como en la figura 0.3, pero con sólo dos líneas de fotones en vez de cuatro. Si los fotones son reales, el proceso contribuye a la masa del fotón y debe anularse. Sin embargo, si los fotones son virtuales, como en la interacción electromagnética entre el núcleo y un electrón en su órbita, o incluso para cualquier campo aplicado externamente, la creación y aniquilación de un par electrón-positrón de vez en cuando da lugar a efectos observables. El primero de estos efectos es una reducción de la carga observada del núcleo respecto a su valor en ausencia de interacción. Esta renormalización de la carga desnuda puede entenderse en términos electrostáticos simples. El electrón del par es atraído y el positrón repelido por la carga positiva del núcleo. Esta polarización del vacío hace que la carga del núcleo quede apantallada y que parezca ser menor en magnitud que antes. Puesto que las partículas cargadas están siempre rodeadas por esta nube de pares virtuales electrón-positrón, sus cargas *observadas* deben ser interpretadas como cargas renormalizadas. Más allá de la inobservable renormalización de la carga, la polarización del vacío induce una densidad de carga, dentro de distancias del orden de $\hbar/2mc$ o menores, que hace que la energía potencial electrostática entre dos cargas sea de valor mayor que la energía potencial de Coulomb. Esto produce un desplazamiento muy pequeño en los niveles de energía atómicos en el sentido de aumentar la ligadura. El potencial adicional de menor orden es proporcional a αq_{ext}, siendo $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137$ y q_{ext} la carga que produce el campo exterior. Por tanto, es *lineal respecto al campo exterior* y da lugar a una pequeña modificación lineal de las ecuaciones de Maxwell. Es no lineal en el sentido de que la intensidad del efecto depende del producto de la constante de estructura fina por el campo exterior y, por consiguiente, en que aparezca la tercera potencia de la carga en el potencial adicional. Efectos de orden superior, si en la figura 0.3 tres de los fotones corresponden a la tercera potencia del campo externo, dan lugar a efectos de polarización del vacío totalmente no lineales.

En los átomos *electrónicos* los efectos de polarización del vacío constituyen una pequeña parte de la corrección radiativa total, pero son aún observables. En los átomos *muónicos* los efectos son relativamente mayores porque las órbitas atómicas se encuentran principalmente en la región en que el potencial queda modificado. Entonces, los efectos de polarización del vacío son importantes por derecho propio.

La conclusión final sobre la superposición lineal de los campos en el vacío es que en el dominio clásico de dimensiones e intensidades alcanzables para los campos existe abundante evidencia para la validez de la superposición lineal y no la hay en su contra. En los dominios atómico y subatómico existen pe-

queños efectos no lineales mecanocuánticos cuyos orígenes se hallan en el acoplamiento entre las partículas cargadas y el campo electromagnético. Tales efectos modifican las interacciones entre partículas cargadas y dan lugar a interacciones entre campos electromagnéticos aun si las partículas están ausentes.

0.4. LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN LOS MEDIOS MACROSCOPICOS

Hasta aquí hemos considerado los campos electromagnéticos y sus fuentes en el vacío. Las ecuaciones de Maxwell [0.1] para los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ pueden ser consideradas como ecuaciones que dan los campos en todos los puntos del espacio, supuesto que todas las fuentes ρ y $\boldsymbol{J}$ sean conocidas. La determinación de los campos es un problema manejable para un pequeño número de fuentes definidas, pero para los agregados macroscópicos de materia la solución de las ecuaciones es casi imposible. Por dos aspectos; uno de ellos es que el número de fuentes individuales, las partículas cargadas en cada átomo y núcleo, es prohibitivamente grande. El otro aspecto es que para observaciones macroscópicas la conducta detallada de los campos, con sus drásticas variaciones espaciales en distancias atómicas, resulta irrelevante. Lo que es importante es la media del campo o la fuente en un volumen grande comparado con el volumen que ocupan un átomo o una molécula únicos. A estas magnitudes promediadas las denominamos campos macroscópicos y fuentes macroscópicas. Se demuestra en detalle en la sección 6.7 que *las ecuaciones macroscópicas de Maxwell son*:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= \boldsymbol{J} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [0.6]$$

donde $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son los valores promediados de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en las ecuaciones microscópicas de Maxwell (ecuaciones para el vacío). Las dos nuevas magnitudes, los campos $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$, se suelen denominar desplazamiento eléctrico y campo magnético, respectivamente (en tal caso a $\boldsymbol{B}$ se le da el nombre de inducción magnética). Sus componentes vienen dadas por:

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \epsilon_0 E_\alpha + \left(P_\alpha - \sum \frac{\partial Q'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \ldots \right) \\ H_\alpha &= \frac{1}{\mu_0} B_\alpha - (M_\alpha + \ldots) \end{aligned} \qquad [0.7]$$

Las magnitudes $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M}$, $Q'_{\alpha\beta}$, y otras similares de orden superior, representan los valores promediados macroscópicamente del dipolo eléctrico, dipolo magnético, cuadrupolo eléctrico y densidades de momentos de orden superior del medio material en presencia de los campos aplicados. Análogamente, las densidades de carga y corriente ρ y $\boldsymbol{J}$ son las medias macroscópicas de las densidades de cargas y corrientes «libres» en el medio material. Las densidades de cargas y corrientes «ligadas» aparecen en las ecuaciones a través de $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M}$ y $Q'_{\alpha\beta}$.

Las ecuaciones macroscópicas de Maxwell [0.6] constituyen un conjunto de ocho ecuaciones que relacionan las componentes de los cuatro campos, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$. Las cuatro ecuaciones homogéneas pueden resolverse formalmente expresando $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en función del potencial escalar Φ y del potencial vector $\boldsymbol{A}$, pero las ecuaciones no homogéneas no pueden ser resueltas hasta que los campos derivados $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ sean conocidos en función de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Estas relaciones, que se hallan implícitas en [0.7], se conocen con el nombre de *relaciones constitutivas*:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{D}[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}] \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}] \end{aligned} \qquad [0.8]$$

Además, para medios conductores debe considerarse la ley de Ohm generalizada:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}] \qquad [0.8']$$

Los corchetes significan que las relaciones no son necesariamente simples y pueden depender de la historia anterior (histéresis), pueden ser no lineales, etc.

En la mayoría de los materiales el momento cuadrupolar y los términos superiores de [0.7] son completamente despreciables. Entonces, sólo resultan significativas las *polarizaciones eléctrica y magnética* $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{M}$. Sin embargo, esto no significa que las relaciones constitutivas sean simples. Hay una diversidad tremenda en las propiedades eléctricas y magnéticas de la materia; especialmente en los sólidos cristalinos, además de las sustancias más corrientes, dieléctricas, diamagnéticas y paramagnéticas, existen sustancias ferroeléctricas y ferromagnéticas que tienen $\boldsymbol{P}$ o $\boldsymbol{M}$ distintas de cero aun en ausencia de campos aplicados. El estudio de estas propiedades constituye una de las parcelas de la física del estado sólido. En este libro abordaremos sólo de una forma breve y superficial alguno de los aspectos más elementales. Para un tratamiento más sistemático y extenso de las propiedades electromagnéticas de la materia deben consultarse libros de estado sólido, como el de KITTEL.

En sustancias que no sean ferroeléctricas o ferromagnéticas, para campos débiles la existencia de un campo eléctrico o magnético aplicado induce una polarización eléctrica o magnética, respectivamente, que es proporcional al valor del campo aplicado. En tal caso decimos que la respuesta del medio es lineal, y entonces las componentes cartesianas de los vectores $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ se escriben en la forma *,

$$\left.\begin{aligned} D_\alpha &= \sum_\beta \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta \\ H_\alpha &= \sum_\beta \mu'_{\alpha\beta} B_\beta \end{aligned}\right\} \qquad [0.9]$$

Los tensores $\epsilon_{\alpha\beta}$ y $\mu'_{\alpha\beta}$ se denominan, respectivamente, tensor dieléctrico, o de permitividad dieléctrica, y tensor inverso de la permeabilidad magnética. Estos tensores resumen la respuesta lineal del medio, dependen de la estructura molecular y posiblemente de la cristalina del material, así como de propiedades tales como la densidad y la temperatura. Para los materiales sencillos la res-

* Lo anterior requeriría escribir $B_\alpha = \Sigma_\beta \mu_{\alpha\beta} H_\beta$, pero esto invertiría los papeles naturales de $\boldsymbol{B}$ como campo magnético básico y $\boldsymbol{H}$ como magnitud derivada. En el capítulo 5 cambiaremos a la notación tradicional.

puesta lineal es frecuentemente isotrópica. En tal caso, $\epsilon_{\alpha\beta}$ y $\mu'_{\alpha\beta}$ son tensores diagonales con todos sus elementos iguales, y resulta $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$, y $\boldsymbol{H}=\mu'\boldsymbol{B}$.

Para ser completamente rigurosos, debería entenderse que las ecuaciones [0.9] se cumplen para las transformadas de Fourier en el espacio y en el tiempo de los campos. Esto es debido a que las relaciones básicas entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$ (o entre $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$) pueden ser no locales. Así,

$$D_\alpha(\boldsymbol{x}, t)=\sum_\beta \int d^3x' \int dt'\, \epsilon_{\alpha\beta}(x', t')\, E_\beta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t-t') \qquad [0.10]$$

en la que $\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}', t')$ puede estar localizada en $\boldsymbol{x}'=0$, $t'=0$, pero no se anula en una cierta región en torno al origen. Si introducimos las transformadas de Fourier $D_\alpha(\boldsymbol{k}, \omega)$, $E_\beta(\boldsymbol{k}, \omega)$ y $\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega)$, mediante

$$f(\boldsymbol{k}, \omega)=\int \mathrm{d}^3x \int dt\, f(\boldsymbol{x}, t) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega t}$$

la ecuación [0.9] puede escribirse en función de las transformadas de Fourier en la forma:

$$D_\alpha(\boldsymbol{k}, \omega)=\sum_\beta \epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega)\, E_\beta(\boldsymbol{k}, \omega) \qquad [0.11]$$

Puede escribirse una ecuación semejante para $H_\alpha(\boldsymbol{k}, \omega)$ en función de $B_\beta(\boldsymbol{k}, \omega)$. Los tensores permeabilidad son, pues, funciones, en general, de la frecuencia y del vector de ondas. Para la luz visible, o para radiaciones electromagnéticas de longitud de onda más larga, es permisible frecuentemente despreciar la falta de localización en el espacio. Entonces, $\epsilon_{\alpha\beta}$ y $\mu'_{\alpha\beta}$ son únicamente funciones de la frecuencia. Esta es la situación que se discute en el capítulo 7, donde se hace un tratamiento simplificado de las propiedades en altas frecuencias de la materia y se exploran las consecuencias de la causalidad. Para los conductores y los superconductores pueden tener importancia los efectos a larga distancia. Por ejemplo, cuando el recorrido libre medio para las colisiones electrónicas en un conductor se hace grande comparado con la profundidad de penetración, ya no resulta adecuada una forma espacialmente local de la ley de Ohm. Entonces interviene también la dependencia con el vector de ondas. Para comprender algunas de las propiedades de los sólidos resulta provechoso el concepto de que la constante dieléctrica es una función del vector de ondas y de la frecuencia. En las lecturas recomendadas al final de la presente introducción figuran algunos ejemplos sobre el tema.

A título de orientación, mencionaremos que a bajas frecuencias ($\nu < 10^6$ Hz), cuando todas las cargas, independientemente de su inercia, responden a los campos aplicados, los sólidos tienen constantes dieléctricas $\epsilon_{\alpha\alpha}$ que varían típicamente entre 2 y 20 ϵ_0, no siendo raros valores mayores. Los sistemas con momento dipolar permanente en sus moléculas pueden tener constantes dieléctricas mucho mayores y que dependen de la temperatura. Por ejemplo, el agua destilada tiene una constante dieléctrica estática de $\epsilon=88\ \epsilon_0$ a 0 °C y de $\epsilon=56\ \epsilon_0$ a 100 °C. A las frecuencias ópticas sólo los electrones pueden responder de modo significativo. Las constantes dieléctricas se encuentran en el intervalo, $\epsilon_{\alpha\alpha} \simeq 1{,}7\text{-}10\ \epsilon_0$, siendo $\epsilon_{\alpha\alpha} \simeq 2\text{-}3\ \epsilon_0$ para la mayoría de los sólidos. El agua en la zona visible tiene $\epsilon=1{,}77\text{-}1{,}8\ \epsilon_0$, siendo esencialmente independiente de la temperatura en el intervalo entre 0 °C y 100 °C.

El tipo de respuesta de los materiales a la aplicación de un campo magnético depende de las propiedades de los átomos o moléculas individuales, así como de sus interacciones. Las sustancias *diamagnéticas* están formadas por átomos o

moléculas que no presentan un momento cinético neto. La respuesta al campo magnético aplicado es la aparición de corrientes atómicas circulantes que dan lugar a una imanación en el material masivo que es muy pequeña y se opone al campo aplicado. Con la definición de $\mu'_{\alpha\beta}$ en [0.9] y la forma de la ecuación [0.7], esto significa que $\mu'_{\alpha\alpha} > 1/\mu_0$. El bismuto, la sustancia más diamagnética que se conoce, tiene $(\mu'_{\alpha\alpha} - 1/\mu_0) \simeq 1{,}8 \times 10^{-4}$. El diamagnetismo es, pues, un efecto muy débil. Si la unidad atómica básica del material tiene un momento cinético neto debido a electrones desapareados, la sustancia es *paramagnética.* El momento magnético del electrón impar se alinea con el campo aplicado. Por tanto, $\mu'_{\alpha\alpha} < 1/\mu_0$. Los valores típicos a la temperatura ambiente se hallan en el intervalo $(1/\mu_0 - \mu'_{\alpha\alpha}) \simeq 10^{-2}$-$10^{-5}$, pero decrecen a temperaturas mayores debido al efecto desordenador de las excitaciones térmicas.

Los materiales ferromagnéticos son paramagnéticos, salvo en que, debido a la interacción entre átomos, muestran una conducta drásticamente diferente. Por debajo de la temperatura de Curie (1 040 °K para el Fe, 630 °K para el Ni), las sustancias ferromagnéticas presentan una imanación espontánea, esto es, todos los momentos magnéticos existentes en una región microscópicamente grande, llamada dominio, están alineados. La aplicación de un campo exterior tiende a conseguir que los dominios cambien, y que los momentos en los diferentes dominios se alineen conjuntamente, dando lugar a la saturación de la imanación del material. Al quitar el campo quedan todavía alineados una fracción considerable de los dipolos, dando una imanación permanente que puede llegar a dar $B_r = \mu_0 M_r > 1$ tesla.

Sobre datos de propiedades eléctricas y magnéticas de los materiales el lector puede consultar alguno de los manuales de Física básicos *, que le guiarán hacia recopilaciones más específicas y detalladas.

Materiales que presentan una respuesta lineal para campos débiles pueden eventualmente tener un *comportamiento no lineal* para intensidades del campo lo bastante grandes para que los osciladores electrónicos e iónicos sean forzados a grandes amplitudes. Las relaciones lineales [0.9] resultan, por ejemplo, modificadas a

$$D_\alpha = \sum_\beta \epsilon^{(1)}_{\alpha\beta} E_\beta + \sum_\beta \epsilon^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} E_\beta E_\gamma + \ldots \qquad [0.12]$$

Para campos estáticos las consecuencias no son particularmente importantes, pero para campos variables con el tiempo la cuestión es diferente. Para amplitudes grandes, ondas de dos frecuencias ω_1 y ω_2 generan en el medio ondas con frecuencias 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, además de las originales ω_1 y ω_2. Los términos no lineales cúbico y de orden superior pueden dar lugar a un espectro de frecuencias todavía más rico. Con el desarrollo del láser, comportamientos no lineales de este tipo han llegado a constituir un área de investigación por sí misma, llamada *óptica no lineal,* y también una herramienta de laboratorio. En el momento actual, los láseres son capaces de generar pulsos de luz con campos eléctricos de pico que se aproximan a 10^{12}, e incluso 10^{13} V/m. El campo eléctrico a que está sometido un electrón en su órbita en un átomo de hidrógeno es $e/4\pi\epsilon_0 a_0^2 \simeq 5 \times 10^{11}$ V/m. ¡Tales campos del láser se ve que son capaces

* *Handbook of Chemistry and Physics,* editado por R. C. WEAST, Chemical Rubber Publishing House, Cleveland, Ohio.
American Institute of Physics Handbook, editado por D. E. GRAY, McGraw-Hill, Nueva York (1972³), secciones *5d* y *5f*.

de forzar a los osciladores atómicos de lleno en su régimen no lineal, capaces hasta de destruir la muestra en estudio! Al final de esta introducción, en las lecturas recomendadas, se dan referencias sobre la bibliografía existente sobre este tema especializado. El lector de este libro deberá conformarse con fenómenos básicamente lineales.

0.5. CONDICIONES EN LA SUPERFICIE LIMITE ENTRE MEDIOS DIFERENTES

Las ecuaciones de Maxwell [0.6] son ecuaciones diferenciales que se aplican localmente en cada punto del espacio-tiempo $(\boldsymbol{x}, t)$. Por medio del teorema de la divergencia y del teorema de Stokes pueden ser establecidas en forma integral. Sea un volumen V finito en el espacio, S la superficie (o superficies) cerrada que lo limita, da un elemento de área sobre dicha superficie, y $\boldsymbol{n}$ el vector unitario normal a la superficie en da dirigido hacia el exterior del volumen encerrado. El teorema de la divergencia aplicado a las ecuaciones primera y última de las [0.6] conduce a las expresiones integrales:

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \int \rho\, d^3x \qquad [0.13]$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, da = 0 \qquad [0.14]$$

La primera relación es precisamente la ley de Gauss, que expresa que el flujo total de $\boldsymbol{D}$ que sale a través de la superficie es proporcional a la carga contenida en el interior. La segunda es la análoga magnética, según la cual no hay flujo de $\boldsymbol{B}$ a través de una superficie cerrada debido a la no existencia de cargas magnéticas.

En forma semejante, sea C un contorno cerrado en el espacio, S' una superficie abierta que se apoya en dicho contorno, $d\boldsymbol{l}$ un elemento de longitud del contorno, da un elemento de área sobre S', y $\boldsymbol{n}'$ un vector unitario normal en da dirigido en el sentido dado por la regla del sacacorchos aplicada al sentido de circulación alrededor del contorno. Al aplicar el teorema de Stokes a las dos ecuaciones intermedias de las [0.6] se obtienen entonces las relaciones integrales:

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \left[\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right] \cdot \boldsymbol{n}'\, da \qquad [0.15]$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}'\, da \qquad [0.16]$$

La ecuación [0.15] es la ley de Maxwell-Ampère de los campos magnéticos, y la [0.16] es la ley de Faraday de la inducción electromagnética.

Estos equivalentes integrales de las ecuaciones de Maxwell pueden emplearse para deducir las relaciones entre las distintas componentes normales y tangenciales de los campos entre ambos lados de la superficie que separa dos medios diferentes, incluso cuando existan densidades de carga o corriente en la propia superficie. La disposición geométrica apropiada se indica en la figura 0.4. Una superficie gaussiana infinitesimal en forma cilíndrica monta sobre la superficie

de separación entre dos medios con propiedades electromagnéticas diferentes. Análogamente, el contorno infinitesimal C tiene sus lados más largos en cada parte del límite y está orientado de modo que la normal a su superficie sea tangente a la interfase. Aplicaremos primero las relaciones integrales [0.13] y [0.14] al volumen de la superficie gaussiana. En el límite de un cilindro de muy

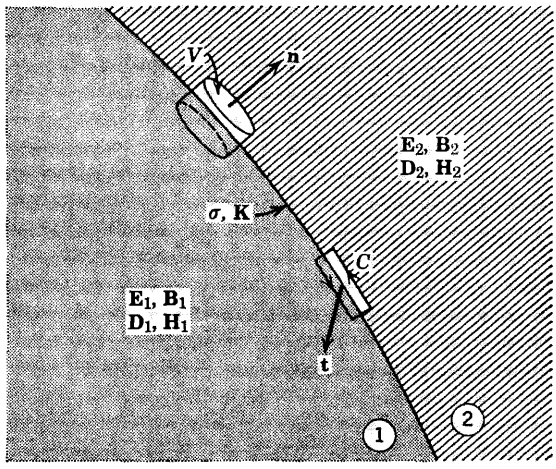


FIG. 0-4. Diagrama esquemático de la superficie límite (línea gruesa) entre dos medios. Se supone que la región de transición lleva densidades idealizadas de carga σ y de corriente K. El volumen V tiene la forma de una caja de píldoras pequeña, la mitad en un medio y la mitad en el otro, con la normal n en su cara dirigida desde el medio 1 al medio 2. El contorno rectangular C se halla parcialmente en un medio y parcialmente en el otro, y está orientado de modo que su plano es normal a la superficie y su normal t es tangente a la misma.

poca altura, la superficie lateral de éste no contribuye a las integrales en el lado izquierdo de [0.13] y [0.14]. Sólo las bases superior e inferior contribuyen. Si estas bases son paralelas, tangentes a la superficie y de área Δa, la integral del lado izquierdo de [0.13] resulta ser

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\, da = (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) \cdot \boldsymbol{n}\, \Delta a$$

y una expresión semejante para [0.14]. Si la densidad de carga ρ es singular en la interfase, de modo que dé lugar a una densidad superficial de carga σ equivalente, entonces la integral del lado derecho de [0.13] vale

$$\int_V \rho\, d^3x = \sigma\, \Delta a$$

Por tanto, las *componentes normales* de $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$ en cada lado de la superficie de separación están relacionadas por

$$(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) \cdot \boldsymbol{n} = \sigma \qquad [0.17]$$

$$(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad [0.18]$$

En otras palabras, decimos que la componente normal de $\boldsymbol{B}$ es continua y que la discontinuidad en la componente normal de $\boldsymbol{D}$ en cada punto es igual a la densidad superficial de carga en tal punto.

En forma análoga, el circuito infinitesimal stokesiano puede ser empleado para determinar las discontinuidades en las componentes tangenciales de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$. Si los lados cortos del circuito C en la figura 0.4 son de longitud despreciable y cada uno de los lados largos es paralelo a la superficie y de longitud Δl, entonces la integral del lado izquierdo de [0.16] vale

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}) \cdot (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\, \Delta l$$

y una expresión similar para el lado izquierdo de [0.15]. El lado derecho de [0.16] se anula debido a que $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ es finito en la superficie y el área del circuito se hace cero al tender a cero la longitud de los lados cortos. El lado derecho de [0.15], sin embargo, no se anula si existe una densidad superficial de corriente equivalente $\boldsymbol{K}$ que fluya exactamente sobre la superficie límite. En tales circunstancias la integral de la derecha de [0.15] vale

$$\int \left[\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right] \cdot \boldsymbol{t}\, da = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{t}\, \Delta l$$

El segundo término de la integral se anula por el mismo argumento que acabamos de dar. Por consiguiente, las *componentes tangenciales* de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ en cada lado de la superficie de separación están relacionadas por

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \qquad [0.19]$$

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{K} \qquad [0.20]$$

Se entiende que en la ecuación [0.20] la corriente superficial $\boldsymbol{K}$ tiene sólo componentes paralelas a la superficie en cualquier punto. La componente tangencial de $\boldsymbol{E}$ al atravesar la superficie es continua, mientras que la componente tangencial de $\boldsymbol{H}$ es discontinua en una magnitud cuyo valor es igual al valor de la densidad superficial de corriente y cuya dirección es paralela a $\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{n}$.

Las ecuaciones de discontinuidad [0.17] a [0.20] son útiles para, después de haber resuelto las ecuaciones de Maxwell en diferentes regiones, conectar las soluciones para obtener los campos en todo el espacio.

Las fórmulas de discontinuidad presentadas son válidas en el caso corriente de que la superficie de separación entre los dos medios permanezca fija al transcurrir el tiempo. En algunas aplicaciones puede ser útil disponer de las ecuaciones correspondientes para una superficie móvil *. Si se pone un poco de cuidado, los resultados para una superficie límite que se mueva con velocidad $v = c\beta$ pueden obtenerse de modo esencialmente igual. La superficie móvil que separa los dos medios es la dibujada esquemáticamente en la figura 0.5, junto con la superficie gaussiana y el circuito stokesiano infinitesimales. Supondremos que la superficie de Gauss y el circuito de Stokes se hallan fijos respecto a las coordenadas del laboratorio, en tanto que la superficie límite pasa a su través barriéndolos con la velocidad $\boldsymbol{v}$. Si consideramos la deducción de las fórmulas de discontinuidad [0.17] y [0.18] para $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$, observamos que son válidos sin modificación los mismos argumentos que parten de [0.13] y [0.14], con la condición de que σ se interprete como la densidad de carga superficial sobre la superficie móvil *medida desde el sistema laboratorio*. Por consiguiente, las fórmulas [0.17] y [0.18], *para las dis-*

* P. D. NOERDLINGER, *Am. J. Phys.*, 39, 191 (1971).

continuidades de $\boldsymbol{D}$ *y* $\boldsymbol{B}$*, se cumplen sin modificación para una superficie de separación en movimiento.*

Sin embargo, las fórmulas [0.19] y [0.20], para las discontinuidades de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, resultan modificadas. Esto ocurre debido a que los términos de derivación temporal en el lado derecho de las ecuaciones [0.15] y [0.16] ya no se anulan. Al barrer la interfase, el circuito estacionario C da lugar a una contribución. Para determinar su valor, consideremos la

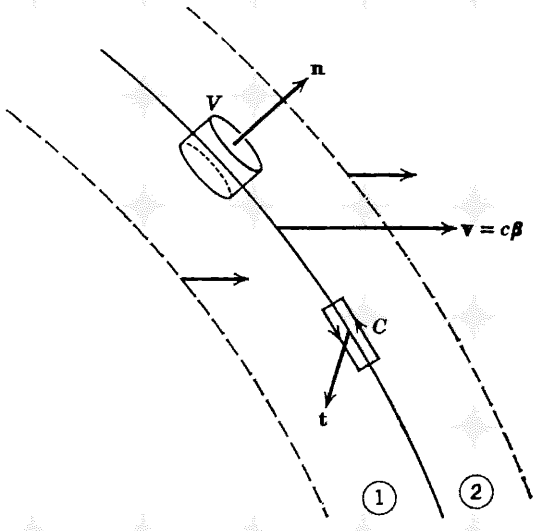


FIG. 0.5. Superficie de separación móvil entre dos medios. El cilindro y el circuito son como los de la figura 0.4, y se hallan estacionarios en el laboratorio. Las líneas de trazos indican la posición de la interfase un momento antes y un momento después del instante considerado.

integral de superficie de la derivada temporal de $\boldsymbol{D}$ sobre una superficie abierta de forma idéntica a la de C, pero que acompañe a la interfase en su movimiento con la velocidad v, y que en el instante considerado en la figura 0.5 coincida precisamente con C. La integral es

$$I=\int \frac{d\boldsymbol{D}}{dt}(x(t),\, t)\cdot \boldsymbol{t}\, da$$

Hemos indicado la dependencia implícita del tiempo de la coordenada x para insistir en que la integración se hace sobre una superficie en movimiento. En el límite en que el área de la superficie abierta se anula, por hacerse suficientemente pequeños los lados cortos del circuito rectangular C, la integral I se anula. (Desde el punto de vista de la relatividad especial, un observador en un sistema inercial que se mueva con velocidad v ve a la superficie límite en reposo, y mide campos transformados según la transformación de Lorentz, que no tienen singularidades en la superficie.) Por otra parte, la integral I puede ser relacionada con la integral que aparece en la ecuación [0.15] desarrollando la expresión de la derivada convectiva:

$$\begin{aligned} 0=I&=\int \frac{d\boldsymbol{D}}{dt}(x(t),\, t)\cdot \boldsymbol{t}\, da \\ &=\int \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{t}\, da+\int [(v\cdot\nabla)\boldsymbol{D}]\cdot \boldsymbol{t}\, da \end{aligned}$$

El segundo término puede transformarse haciendo uso de una conocida identidad

vectorial, de modo que la integral que nos interesa vale

$$\int \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{t}\, da = \int [\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}) - \boldsymbol{v} \nabla \cdot \boldsymbol{D}] \cdot \boldsymbol{t}\, da$$

El primer término de la derecha puede transformarse, mediante el teorema de Stokes, en una integral de circulación, y el segundo puede escribirse en función de la densidad de carga ρ. Por todo ello, obtenemos, como resultado de la aplicación de [0.15] al circuito C de la figura 0.5, la expresión

$$\int [\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}] \cdot d\boldsymbol{l} = \int [\boldsymbol{J} - \rho \boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{t}\, da$$

Siguiendo las mismas etapas que en el razonamiento anterior, obtenemos, a partir de esta relación, la fórmula para la discontinuidad

$$\boldsymbol{t} \cdot \{\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1)]\} = (\boldsymbol{K} - \sigma \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{t}$$

en la que todas las magnitudes deben calcularse en el sistema laboratorio. Con ciertos cambios de álgebra vectorial y el empleo de la [0.17] se llega a

$$\boldsymbol{t} \cdot [\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1)] = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{t} \qquad [0.21]$$

Una deducción completamente análoga a partir de [0.16] da:

$$\boldsymbol{t} \cdot [\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1)] = 0 \qquad [0.22]$$

como fórmula de discontinuidad para las componentes tangenciales de $\boldsymbol{E}$ (y de $\boldsymbol{B}$). Las ecuaciones [0.21] y [0.22] constituyen las generalizaciones de [0.19] y [0.20] para el caso de una superficie de separación móvil entre los dos medios.

La relación que contiene la corriente superficial se simplifica considerablemente cuando ambos medios satisfacen las relaciones $\boldsymbol{D} \simeq \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B} \simeq \mu_0 \boldsymbol{H}$ (o bien si éstas se cumplen en uno de ellos y el otro medio es un buen conductor en cuyo interior los campos son esencialmente nulos). Sin realizar aproximación alguna, la ecuación [0.22] puede escribirse en la forma:

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)_{\tan} = -(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) \qquad [0.23]$$

Entonces, si se hace en [0.21] $\boldsymbol{H} \simeq \boldsymbol{B}/\mu_0$ y $\boldsymbol{D} \simeq \epsilon_0 \boldsymbol{E}$, puede sustituirse [0.23] para dar:

$$[1 - (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})^2/c^2] \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = \mu_0 \boldsymbol{K} \qquad [0.24]$$

El movimiento de la interfase da lugar sólo a un factor global en [0.20], que es una corrección del orden de v^2/c^2.

0.6. ALGUNAS NOTAS SOBRE LAS IDEALIZACIONES EN EL ELECTROMAGNETISMO

En la sección anterior hemos hecho uso del concepto de distribuciones superficiales de cargas y corrientes. Tales distribuciones son evidentemente idealizaciones matemáticas que no existen en el mundo físico. A lo largo del electromagnetismo surgen también otras abstracciones de este tipo. Por ejemplo, en electrostática hablamos de mantener objetos a un potencial fijo respecto a un cierto origen de potenciales, llamado habitualmente «tierra». La relación de tales idealizaciones con el mundo real merece cierta discusión, aun

cuando para personas experimentadas la mayor parte de los comentarios puedan parecer obvios.

Consideremos en primer lugar la cuestión de mantener un objeto conductor a un potencial electrostático fijo respecto a un cierto valor de referencia. Está implícita la idea de que para ello no se debe perturbar de modo significativo la configuración de cargas y campos deseada. Para mantener un objeto a potencial fijo es necesario, al menos de tiempo en tiempo, que se establezca un camino conductor, o su equivalente, desde el objeto hasta una fuente de carga muy alejada («en el infinito») de modo que, a medida que se sitúan en las proximidades otros objetos cargados o descargados, puedan fluir cargas desde o hacia el objeto, manteniéndose siempre su potencial al valor deseado. Aunque resulta posible emplear métodos más refinados, se utilizan normalmente hilos metálicos para hacer el camino conductor. Intuitivamente podemos esperar que los hilos delgados sean menos perturbadores que los gruesos. La razón es la siguiente: «Como la cantidad de electricidad en cualquier porción dada de un hilo a potencial dado disminuye indefinidamente cuando se hace disminuir indefinidamente el diámetro del hilo, la distribución de la electricidad sobre cuerpos de dimensiones considerables no será afectada sensiblemente por la introducción de hilos metálicos muy finos en el campo; tales hilos se usan para hacer conexiones eléctricas entre estos cuerpos y la tierra, una máquina eléctrica o un electrómetro» *. Naturalmente, el campo eléctrico en la inmediata vecindad del hilo delgado es muy grande. Sin embargo, a distancias del hilo del orden del tamaño de los «cuerpos de dimensiones considerables» los efectos pueden hacerse pequeños. Una ilustración histórica importante de las palabras de MAXWELL la constituye el trabajo de HENRY CAVENDISH de hace dos siglos. CAVENDISH midió, mediante experimentos realizados en un establo transformado de la casa paterna, utilizando botellas de Leyden como fuentes de carga, las cantidades de carga sobre cilindros, discos, etc., mantenidos a potencial fijo, y las comparó con la carga de una esfera (la misma esfera dibujada en la figura 0.1) al mismo potencial. Sus valores de la capacidad, así determinados, tienen una precisión de algunas partes en cien. Por ejemplo, encontró que la relación entre la capacidad de una esfera y la del disco circular delgado del mismo radio era 1,57. El valor teórico es $\pi/2$.

Existe un límite práctico a la utilización de hilos cada vez más delgados. La carga por unidad de longitud decrece sólo de forma logarítmica (como el recíproco de $\ln(d/a)$, siendo a el radio medio del hilo y d una distancia típica desde el hilo a alguna otra superficie conductora). Para minimizar la perturbación del sistema por debajo de cierto nivel, es necesario recurrir a otros medios de mantener los potenciales; por ejemplo, métodos que emplean haces intermitentes de partículas cargadas.

Cuando se dice que un objeto conductor está «a tierra», se supone que está conectado por medio de un hilo muy fino a un depósito remoto de cargas que sirve como origen de potencial común. Los objetos mantenidos a potenciales constantes están conectados de modo similar a uno de los lados de una fuente de tensión, tal como una batería, cuyo otro lado está conectado a la «tierra» común. Entonces, cuando objetos inicialmente electrificados se mueven respecto a otros fluyen las cantidades apropiadas de carga desde o hacia el depósito remoto (que se supone tiene una capacidad inagotable), de modo que sus distribuciones de electricidad se alteran, pero sus potenciales permanecen

* J. C. MAXWELL, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover, Nueva York, reimpresión en 1954 de la 3.ª edición (1891), Vol. 1, pág. 96.

fijos. La idea de poner algo a tierra es un concepto bien definido en electrostática, donde el tiempo no interviene como factor, pero para campos oscilantes la velocidad finita de propagación empaña el concepto. En otras palabras, pueden intervenir de modo significativo efectos de inductancia y capacidad distribuidas. Hace falta entonces poner gran cuidado para asegurar una «buena tierra».

Otra idealización en el electromagnetismo macroscópico es el concepto de densidad superficial de carga o corriente. La realidad física es que la carga o corriente está confinada a la inmediata proximidad de la superficie. Si esta región tiene un espesor pequeño comparado con la escala de longitudes de interés, podemos aproximar la realidad por la idealización de una región de espesor infinitesimal y hablar de distribución superficial. Hace falta distinguir dos limitaciones. La primera consiste en que la distribución superficial está confinada a una región que es *pequeña macroscópicamente, pero grande microscópicamente*. Un ejemplo es la penetración de los campos variables con el tiempo en un conductor muy bueno, pero no perfecto, que se describe en la sección 8.1. Se encuentra que los campos están confinados a un espesor δ, llamado profundidad de penetración, y que para frecuencias bastante altas y conductividades suficientemente grandes δ puede ser muy pequeña desde el punto de vista macroscópico. Resulta, pues, apropiado en tal caso integrar la densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ en dirección perpendicular a la superficie para obtener una densidad de corriente superficial efectiva $\boldsymbol{K}_{\text{ef}}$.

La otra limitación es *verdaderamente microscópica* y debida a efectos mecanocuánticos en la estructura atómica del material. Considérese como ejemplo la distribución de la carga en exceso de un conductor en electrostática. Es bien sabido que esta carga yace completamente sobre la superficie del conductor. Por ello hablamos de una *densidad superficial* de carga σ. No existe campo eléctrico dentro del conductor, pero hay, de acuerdo con [0.17], una componente normal del campo eléctrico justamente fuera de la superficie. A nivel microscópico la carga no está exactamente en la superficie y el campo no cambia discontinuamente. Las consideraciones más elementales indicarían que la región de transición se extiende a unos pocos diámetros atómicos. Puede pensarse que los iones en el metal se encuentran relativamente inmóviles y localizados con una precisión de 1 Å o menos; en cambio, los electrones están menos localizados. El resultados de los cálculos en un modelo * se muestra en la figura 0.6. Corresponden a la solución del problema mecanocuántico de muchos electrones cuando los iones del conductor se tratan aproximadamente como una densidad de carga continua y constante para $x < 0$. El valor de la densidad electrónica ($r_s = 5$) es correcto aproximadamente para el cobre y los metales alcalinos pesados. Se ve que el exceso de carga electrónica está confinado a una región comprendida entre ± 2 Å de la «superficie» de la distribución iónica. El campo eléctrico aumenta suavemente a través de esta región hasta su valor σ/ϵ_0 «fuera» del conductor. Para situaciones macroscópicas, en las que 10^{-9} m resulta ser una distancia despreciable, podemos idealizar y describir el comportamiento de la densidad de carga por $\rho(x) = \sigma\delta(x)$, y el campo eléctrico, por $E_n(x) = (\sigma/\epsilon_0)\,\theta(x)$, que, respectivamente, corresponden a una densidad superficial verdadera y a una función escalón superficial para el campo.

Vemos, pues, que el tratamiento teórico del electromagnetismo clásico implica varias idealizaciones, unas de tipo técnico y otras de tipo físico. El tema

* N. D. LANG y W. KOHN, *Phys. Rev.*, **B1**, 4555 (1970); **B3**, 1215 (1971); V. E. KENNER, R. E. ALLEN y W. M. SASLOW, *Phys. Letters*, **38A**, 255 (1972).

de la electrostática, que se discute en los primeros capítulos del libro, se desarrolló como una ciencia experimental de los fenómenos eléctricos *macroscópicos,* como ocurrió virtualmente con los restantes aspectos del electromagnetismo. La extensión de estas leyes macroscópicas, aun para cargas y corrientes en el vacío, al dominio microscópico fue en su mayor parte una extrapolación injustificada. Anteriormente hemos discutido, en la presente introducción, alguno de los límites de esta extrapolación. Lo que deseamos señalar aquí es lo siguiente: Con visión retrospectiva sabemos que muchos aspectos de las leyes clásicas del electromagnetismo son aplicables en el dominio atómico supuesto

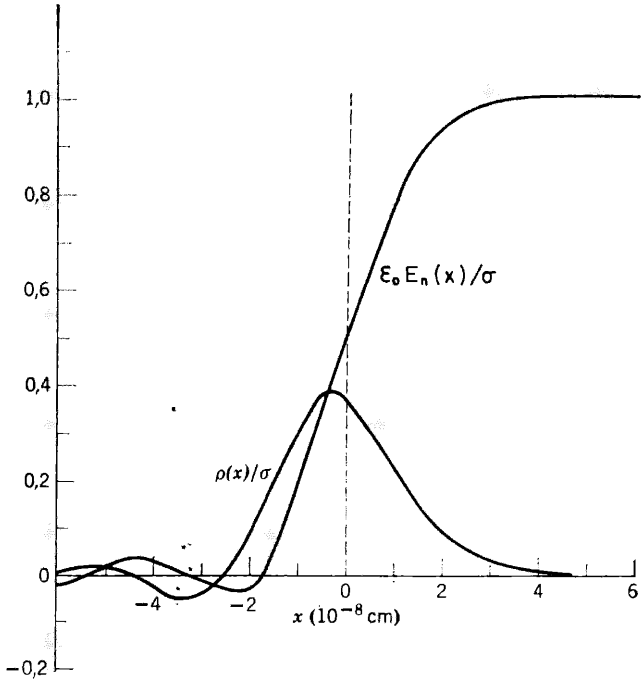


FIG. 0.6. Distribución de la carga en exceso en la superficie de un conductor y variación de la componente normal del campo eléctrico. Los iones del sólido se hallan en la región $x < 0$ y se consideran aproximadamente como una distribución de carga continua y uniforme en la que se mueven los electrones. La mayor parte de la carga está confinada en ± 2 Ångstrom de la «superficie».

que las fuentes se traten en forma mecanocuántica, que el promediar las magnitudes electromagnéticas en volúmenes que contienen un gran número de moléculas suaviza las fluctuaciones rápidas, que los campos aplicados estáticos inducen en la materia respuestas medias estáticas y que la carga neta está *sobre* la superficie de un conductor en sentido macroscópico. Por ello, las observaciones macroscópicas de COULOMB y de AMPÈRE, y las abstracciones matemáticas que hemos hecho con ellas, tienen un campo de aplicabilidad más amplio que el que podría suponer un físico supercauto. ¡Ciertamente, el hecho de que la susceptibilidad eléctrica y magnética del aire sea prácticamente despreciable simplificó las cosas!

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

La historia de la electricidad y el magnetismo es, en gran medida, la historia de la ciencia misma.

Hemos citado ya los siguientes autores:

WHITTAKER, dos volúmenes, el primero cubre el periodo hasta 1900,
BORN y WOLFF, revisión más breve insistiendo sobre la óptica.

Otra revisión legible, con discusión de los experimentos originales, es la de

N. FEATHER, *Electricity and Matter,* University Press, Edimburgo, 1968.

Las pruebas experimentales de la naturaleza de la ley de Coulomb, o, en lenguaje moderno, de la masa del fotón, se revisan en:

I. YU. KOBZAREV y L. B. OKUN', *Uspekhi Fiz. Nauk,* **95**, 131 (1968) [trad. inglesa, *Sov. Phys. Uspekhi,* **11**, 338 (1968)]

y en

A. S. GOLDHABER y M. M. NIETO, *Rev. Mod. Phys.,* **43**, 277 (1971).

Al final del capítulo 6 pueden encontrarse lecturas recomendadas sobre el tema de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell y su derivación a partir de las ecuaciones microscópicas. La física básica de los materiales dieléctricos, ferroeléctricos y magnéticos puede encontrarse en numerosos libros de física del estado sólido; por ejemplo:

BEAM,
KITTEL,
WERT y THOMSON,
WOOTEN.

El primero de ellos está dedicado a ingenieros eléctricos, y destaca temas prácticos, como los semiconductores. El último trata principalmente sobre propiedades ópticas.

La necesidad de una no localidad espacial para tratar la impedancia superficial de los metales (el efecto pelicular anómalo) ha sido discutida en varios sitios por

A. B. PIPPARD, *Advances in electronics and electron physics,* vol. VI, editado por MARTON, Academic, Nueva York (1954), págs. 1-45; *Reports on progress in Physics,* vol. XXIII, págs. 176-266 (1960); *The dynamics of conduction electrons,* Gordon y Breach, Nueva York (1965).

El concepto de constante dieléctrica dependiente de la frecuencia y del vector de ondas $\epsilon(k, \omega)$ está desarrollado en

KITTEL, *Tema avanzado D.*
D. PINES, *Elementary excitations in solids,* W. A. Benjamin, Nueva York (1963), capítulos 3 y 4.
F. STERN, *Solid State Physics,* vol. 15, editado por F. SEITZ y D. TURNBULL, Academic, Nueva York, págs. 299-408.

El campo rápidamente creciente de la óptica no lineal está empezando a tener una bibliografía de textos propios, pero muchas cosas están aún en revistas de investigación o de revisión, o en las publicaciones de cursos de verano. Puede encontrarse una introducción en

J. A. GIORDMAINE, *Physics Today,* **22** (1), 38 (1969).
N. BLOEMBERGEN, *Am. J. Phys.,* **35**, 989 (1967).
G. C. BALDWIN, *Introduction to Nonlinear Optics,* Plenum, Nueva York (1969).

Puede disponerse de discusiones algo más elevadas en

S. A. AKHMANOV y R. V. KHOKHLOV, *Usp. Fiz. Nauk.*, **88**, 439 (1966); **95**, 231 (1968) [trad. inglesa: *Sov. Phys. Uspekhi*, **9**, 210 (1966); **11**, 394 (1968)]; N. BLOEMBERGEN, *Nonlinar Optics*, W. A. Benjamin, Nueva York (1965); *Quantum Optics*, Proc. Int. School of Physics «Enrico Fermi». Varenna Course XLII, 1967, editado por R. J. GLAUBER, Academic, Nueva York (1969); artículos de J. DUCUING, Y. R. SHEN y J. A. GIORDMAINE.

P. S. PERSHAN, *Progress in Optics*, vol. V, editado por E. WOLF, North-Holland, Amsterdam (1966), págs. 83-114.

INTRODUCCION A LA ELECTROSTATICA

Empezamos nuestro estudio de la electrodinámica por el tema *electrostática;* esto es, el estudio de los fenómenos en los que intervienen distribuciones de carga y campos que no dependen del tiempo. Para muchos lectores el material incluido representará sólo una revisión. Especialmente en este capítulo no nos extenderemos de modo significativo. Introducimos conceptos y definiciones que son importantes para discusiones posteriores y presentamos parte del aparato matemático esencial. En capítulos subsiguientes se desarrollan y aplican las técnicas matemáticas.

Debe mencionarse un detalle de tipo físico. La electrostática se ha desarrollado históricamente como una ciencia de fenómenos *macroscópicos.* Como se indicaba al final de la introducción, las idealizaciones, tales como cargas puntuales o campos eléctricos en un punto, deben contemplarse como abstracciones matemáticas que permiten la descripción de los fenómenos a nivel macroscópico, pero que pueden carecer de sentido a escala microscópica.

1.1. LEY DE COULOMB

Toda la electrostática surge del enunciado cuantitativo de la ley de Coulomb, referente a la fuerza que actúa entre cuerpos cargados en reposo unos respecto a otros. COULOMB, en una impresionante serie de trabajos, demostró experimentalmente que la fuerza entre dos cuerpos pequeños y cargados situados en el aire y separados por una distancia grande comparada con sus dimensiones:

1) variaba directamente con la magnitud de cada una de las cargas,
2) variaba en razón inversa con el cuadrado de la distancia entre ellas,
3) estaba dirigida a lo largo de la línea que une las cargas,
4) era atractiva si los cuerpos tenían cargas opuestas y repulsiva si tenían el mismo tipo de carga.

Además, se demostró experimentalmente que la fuerza total ejercida sobre un cuerpo pequeño y cargado por un cierto número de otros cuerpos, también pequeños y cargados, situados a su alrededor era la suma *vectorial* de las fuerzas de Coulomb individuales entre cada uno de ellos y el primero. Hablando estrictamente, las conclusiones de COULOMB se aplican sólo a cargas en el vacío, o en medios de susceptibilidad despreciable. Posponemos la consideración de las cargas en dieléctricos hasta el capítulo 4.

1.2. CAMPO ELECTRICO

Aunque lo que eventualmente se mide sea una fuerza es útil introducir un concepto que avance un paso más allá de las fuerzas, el concepto de campo eléctrico debido a cierta configuración de cuerpos cargados.

Por el momento, puede definirse el campo eléctrico como la fuerza que actúa sobre la unidad de carga en un punto dado. Es un vector función de la posición que designaremos por $\boldsymbol{E}$. No obstante, hay que tomar con cautela esta definición. No es necesariamente la fuerza que se observaría colocando una unidad de carga en una esferilla de medula y llevando ésta al punto considerado. La razón es que una unidad de carga puede ser tan grande que su presencia altere apreciablemente la configuración del campo. Como consecuencia, se debe utilizar un proceso de paso al límite en el cual se mida la relación entre la fuerza ejercida sobre el cuerpo de prueba y la carga del mismo, para valores de ésta cada vez más pequeños *. Experimentalmente, se encuentra que tanto esta relación como la dirección de la fuerza llegan a ser constantes a medida que la magnitud de la carga de prueba se hace más pequeña. Estos valores límites, de la relación y la dirección, definen en módulo y dirección el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en el punto en cuestión. Simbólicamente escribiremos:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \qquad [1.1]$$

donde $\boldsymbol{F}$ es la fuerza, $\boldsymbol{E}$ el campo eléctrico y q la carga. En esta ecuación se da por entendido que la carga está localizada en un punto, y que la fuerza y el campo eléctrico se miden en dicho punto.

La ley de Coulomb puede expresarse de forma análoga. Si $\boldsymbol{F}$ es la fuerza sobre una carga puntual q_1, situada en el punto $\boldsymbol{x}_1$, ejercida por otra carga puntual q_2, situada en el punto $\boldsymbol{x}_2$, la ley de Coulomb dice:

$$\boldsymbol{F} = kq_1q_2 \frac{(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^3} \qquad [1.2]$$

Observemos que q_1 y q_2 son magnitudes algebraicas que pueden ser positivas o negativas. La constante de proporcionalidad k depende del sistema de unidades utilizado.

El campo eléctrico en el punto $\boldsymbol{x}$, creado por la carga puntual q_1, situada en el punto $\boldsymbol{x}_1$, puede obtenerse directamente:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = kq_1 \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1|^3} \qquad [1.3]$$

como se indica en la figura 1.1. La constante k se determina por la unidad de carga elegida. En el sistema de unidades electrostático (uee) la unidad de carga se elige como aquella carga que ejerce una fuerza de una dina sobre otra igual colocada a un centímetro de distancia. Así, con unidades cegesimales, $k = 1$,

* El carácter discreto de la carga eléctrica (véase la sección 0.1) implica que este límite matemático es imposible de realizar físicamente. Este es un ejemplo de idealización matemática en la electrostática macroscópica.

y la unidad de carga se llama uee («stat-coulomb»). En el sistema MKSA, $k=(4\pi\epsilon_0)^{-1}$, donde ϵ_0 ($=8{,}854\times10^{-12}$ F/m) es la permitividad del espacio vacío *.

La superposición lineal de fuerzas debidas a varias cargas, observada experimentalmente, significa que se puede expresar el campo eléctrico en el punto x,

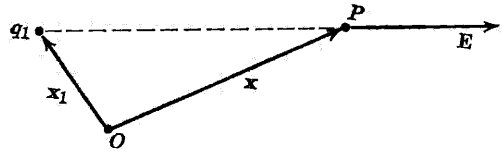


FIG. 1.1.

creado por un sistema de cargas puntuales q_i, situadas en los puntos x_i, $i=1$, 2, ..., n, como el vector suma:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|^3} \qquad [1.4]$$

Si las cargas fuesen tan pequeñas y tan numerosas que pudieran describirse por medio de una densidad de carga $\rho(x')$ [si Δq es la carga en el elemento de volumen Δx, Δy y Δz correspondiente al punto x', tenemos $\Delta q=\rho(x')\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$], la suma se remplazaría por una integral:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\boldsymbol{x}')\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\,d^3x' \qquad [1.5]$$

en la cual $d^3x'=dx'\,dy'\,dz'$ es el elemento de volumen tridimensional en el punto x'.

Es conveniente introducir aquí la *función delta de Dirac*. En una dimensión, la función delta, que se expresa $\delta(x-a)$, es una función matemáticamente impropia que tiene las siguientes propiedades:

1) $\delta(x-a)=0$ para $x\neq a$, y ∞ si $x=a$.

2) $\int \delta(x-a)dx=1$ si el recinto de integración incluye el punto $x=a$, y es cero en caso contrario.

A la función delta se le puede dar un significado intuitivo, pero no riguroso, tal como el límite de una curva aguda, por ejemplo, una gaussiana, que se hace cada vez más estrecha a la vez que más alta, de tal modo que el área bajo ella permanece constante. La teoría de las distribuciones, de L. SCHWARTZ, es un tratamiento matemático riguroso de las funciones delta y su manejo **.

De las definiciones dadas anteriormente se tiene que, para una función arbitraria $f(x)$,

3) $\int f(x)\delta(x-a)dx=f(a)$.

---

* La cuestión de las unidades se discute en detalle en el apéndice.

** En LIGHTHILL aparece un tratamiento útil y riguroso de la función delta de Dirac. Véase también DENNERY y KRIZWICKI, sección III.13. (Las referencias completas de las publicaciones, citadas en el texto o en las notas por medio del nombre del autor en versalitas, aparecen únicamente en la lista bibliográfica al final del libro.)

La integral del producto $f(x)$ por la derivada de una función delta tiene sentido únicamente si la función delta se considera una función muy abrupta, pero de buen comportamiento. En tal caso, por definición:

$$4) \quad \int f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a),$$

donde «prima» significa derivación respecto del argumento.

Si la función delta tiene como argumento una función $f(x)$ de la variable independiente x, puede transformarse según la regla,

$$5) \quad \delta[f(x)] = \sum_i \frac{1}{\left|\frac{df}{dx}(x_i)\right|}\delta(x-x_i)$$

donde se supone que $f(x)$ tiene únicamente ceros simples, localizados en $x=x_i$.

Para más de una dimensión tomaremos simplemente productos de funciones delta en cada una de ellas. Por ejemplo, en tres dimensiones:

$$6) \quad \delta(x-X)=\delta(x_1-X_1)\delta(x_2-X_2)\delta(x_3-X_3)$$

es una función que se anula en cualquier punto excepto en $x=X$, y es tal que:

$$7) \quad \int_{\Delta V} \delta(x-X)d^3x = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta V \text{ contiene} \quad x=X \\ 0 & \text{si } \Delta V \text{ no contiene } x=X \end{cases}$$

Es de notar que la función delta tiene la dimensión del inverso del volumen cualquiera que sea el número de dimensiones del espacio.

Un conjunto discreto de cargas puntuales puede describirse mediante una densidad de carga utilizando funciones delta. Por ejemplo:

[1.6]

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i\,\delta(x-x_i)$$

representa una distribución de n cargas puntuales q_i, colocadas en los puntos x_i. La sustitución de esta densidad de carga [1.6] en [1.5] nos lleva, después de integrar, haciendo uso de las propiedades de la función delta, a la suma discreta [1.4].

1.3. LEY DE GAUSS

La integral [1.5] no resulta la forma más adecuada para el cálculo de campos eléctricos. Existe otra expresión integral, llamada ley de Gauss, que algunas veces es mucho más útil y que, además, conduce a una ecuación diferencial para $\boldsymbol{E}(x)$. Con objeto de obtener la ley de Gauss, consideremos en primer lugar una carga puntual q y una superficie *cerrada* S, tal como se indica en la figura 1.2. Sea r la distancia desde la carga a un punto de la superficie, $\boldsymbol{n}$ el vector unitario normal a la superficie dirigido hacia fuera, da un elemento de área. Si el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en un punto de la superficie, creado por la carga q, forma un ángulo θ con la normal unitaria, entonces la componente normal del producto de $\boldsymbol{E}$ por el elemento de área es:

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\cos\theta}{r^2} da \qquad [1.7]$$

Como $\boldsymbol{E}$ está dirigido a lo largo de la línea de unión entre la carga q y el elemento de superficie, $\cos\theta\, da = r^2\, d\Omega$, donde $d\Omega$ es el elemento de ángulo

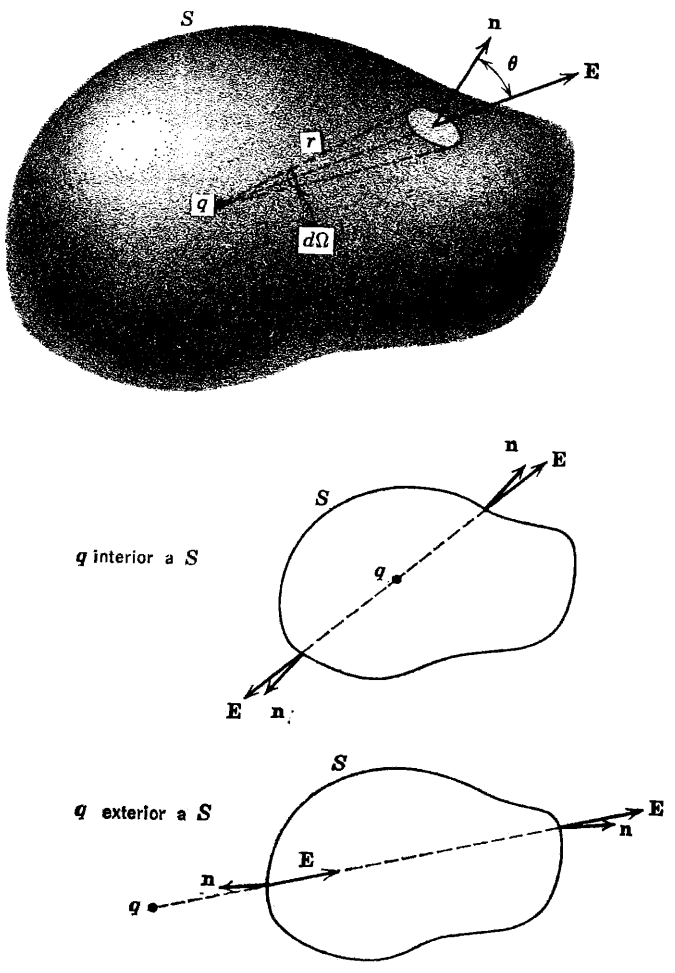


FIG. 1.2. Ley de Gauss. La componente normal del campo eléctrico se integra a la superficie cerrada S. Si la carga es interior a (exterior a) S, el ángulo sólido total con que se ve la cara interna de la superficie desde la carga es 4π (cero).

sólido bajo el cual se ve da desde la posición que ocupa la carga. Por tanto,

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,da = q\,d\Omega \qquad [1.8]$$

Si ahora integramos la componente normal de $\boldsymbol{E}$ sobre toda la superficie, vemos fácilmente que:

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,da = \begin{cases} q/\epsilon_0 & \text{si } q \text{ es } \textit{interior} \text{ a } S \\ 0 & \text{si } q \text{ es } \textit{exterior} \text{ a } S \end{cases} \qquad [1.9]$$

Este resultado constituye la ley de Gauss para una sola carga puntual. Para un

conjunto discreto de cargas puntuales es inmediata la expresión:

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,da=\frac{1}{\epsilon_0}\sum_i q_i \qquad [1.10]$$

en la cual el sumatorio se extiende solamente a las cargas *interiores* a la superficie S. Para una distribución continua de carga de densidad $\rho(\boldsymbol{x})$, la ley de Gauss se expresa así:

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,da=\frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{x})\,d^3x \qquad [1.11]$$

donde V es el volumen encerrado por S.

La ecuación [1.11] es una de las fundamentales de la electrostática. Nótese que depende de

1) la ley del inverso del cuadrado del radio para la fuerza entre cargas,
2) la naturaleza central de las fuerzas,
3) la superposición lineal de los efectos debidos a cargas distintas.

Por tanto, es claro que la ley de Gauss es válida para los campos de fuerzas gravitatorias de Newton, sustituyendo densidad de carga por densidad de masa.

Es interesante señalar que PRIESTLEY, aun antes de los experimentos de CAVENDISH y COULOMB, partiendo de la observación de FRANKLIN de que la carga parecía residir en el exterior, pero no en el interior, de una copa cargada razonó, en analogía con la ley de gravitación universal de Newton, que la fuerza electrostática debía obedecer una ley de proporcionalidad inversa con el cuadrado de la distancia. El estado actual de dicha ley se discute en la sección 0.2.

1.4. FORMA DIFERENCIAL DE LA LEY DE GAUSS

Podemos considerar la ley de Gauss como una formulación integral de la ley de la electrostática. Se puede obtener una forma diferencial (es decir, una ecuación diferencial) haciendo uso del teorema de la divergencia. Este nos dice que para todo campo vectorial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ definido en un volumen V limitado por la superficie cerrada S es válida la relación

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,da=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,d^3x$$

entre la integral de la divergencia extendida al volumen y la integral de la componente normal de $\boldsymbol{A}$ dirigida hacia fuera, extendida a la superficie. De hecho, la ecuación anterior puede emplearse como definición de divergencia (véase STRATTON, pág. 4).

Aplicaremos este teorema considerando la relación integral expresada por el teorema de Gauss:

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,da=\frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{x})\,d^3x$$

Ahora el teorema de la divergencia nos permite escribir

$$\int (\nabla \cdot \boldsymbol{E} - \rho/\epsilon_0)\, d^3x = 0 \qquad [1.12]$$

para un volumen arbitrario V. Del modo usual, podemos igualar a cero el integrando para obtener:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad [1.13]$$

que es la forma diferencial de la ley de Gauss. Esta ecuación puede utilizarse en la resolución de problemas electrostáticos. No obstante, es generalmente más sencillo manejar funciones escalares en lugar de vectoriales, y después deducir las magnitudes vectoriales al final, si se necesitan (véase a continuación).

1.5. LA SEGUNDA ECUACION DE LA ELECTROSTATICA. EL POTENCIAL ESCALAR

La ecuación [1.13] por sí sola no es suficiente para determinar completamente las tres componentes del campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$. Quizás algunos lectores sepan que un campo vectorial puede especificarse casi * completamente si se dan su divergencia y su rotor en todo el espacio. Así, pues, buscamos una ecuación que nos dé rot $\boldsymbol{E}$ como función de la posición. Tal ecuación, a saber,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad [1.14]$$

se deduce directamente de nuestra ley de Coulomb generalizada [1.5]:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\boldsymbol{x}') \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}\, d^3x'$$

El factor vectorial del integrando, considerado como función de $\boldsymbol{x}$, es el gradiente con signo negativo del escalar $1/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$:

$$\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right)$$

Como el operador gradiente afecta a la variable $\boldsymbol{x}$, pero no a la variable de integración $\boldsymbol{x}'$, puede sacarse fuera de la integral. Así, podemos escribir el campo del modo siguiente:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, d^3x' \qquad [1.15]$$

Por ser nulo el rotacional del gradiente de cualquier función escalar ($\nabla \times \nabla\psi = 0$, para todo ψ), [1.14] es consecuencia inmediata de [1.15].

Obsérvese que $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ es una consecuencia de la naturaleza central de la

* Salvo el gradiente de una función escalar que satisfaga la ecuación de Laplace. Véase la sección 1.9 sobre la unicidad.

fuerza ejercida entre las cargas y del hecho de que la fuerza es función únicamente de la distancia mutua, pero no depende de que sea inversamente proporcional al cuadrado de ella.

En [1.15] se obtiene el campo eléctrico (un vector) a partir de un escalar por medio del operador gradiente. Puesto que es más fácil manejar una función de la posición que tres, resulta de interés concentrarse en la función escalar y darle nombre. Como consecuencia, definimos el *potencial escalar* $\Phi(\boldsymbol{x})$ por medio de la ecuación

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi \qquad [1.16]$$

Por tanto, [1.15] nos dice que el potencial escalar viene dado en función de la densidad de carga por

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\, d^3x' \qquad [1.17]$$

donde la integración abarca todas las cargas del universo, y es arbitrario solamente en cuanto puede sumarse al segundo miembro de [1.17] una constante.

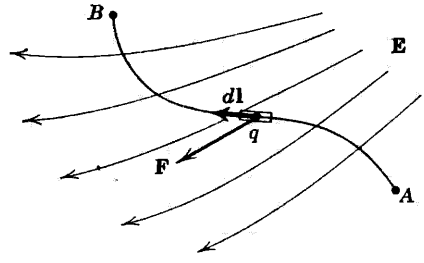


FIG. 1.3.

El potencial escalar admite una interpretación física si consideramos el trabajo efectuado sobre una carga de prueba q al transportarla desde un punto (A) a otro (B), en el seno de un campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, como se indica en la figura 1.3. La fuerza ejercida sobre la carga en cualquier punto es

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

de modo que el trabajo realizado al moverla de A a B es

$$W = -\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = -q\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad [1.18]$$

El signo negativo aparece porque estamos considerando el trabajo realizado sobre la carga contra la acción del campo. Con la definición [1.16] podemos escribir para el trabajo:

$$W = q\int_A^B \nabla\Phi\cdot d\boldsymbol{l} = q\int_A^B d\Phi = q[\Phi_B - \Phi_A] \qquad [1.19]$$

que nos dice que $q\Phi$ puede interpretarse como la energía potencial de la carga de prueba en el campo electrostático.

Se puede deducir, de [1.18] y [1.19], que la integral curvilínea del campo eléctrico entre dos puntos es independiente del camino de integración y es la diferencia de potencial entre los puntos con signo cambiado:

$$\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -(\Phi_B - \Phi_A) \qquad [1.20]$$

Naturalmente, esto es consecuencia directa de la definición [1.16]. Si el camino de integración es cerrado, la integral curvilínea se anula,

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0 \qquad [1.21]$$

resultado que puede también obtenerse partiendo directamente de la ley de Coulomb. Entonces, por aplicación del *teorema de Stokes* [si $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ es un campo vectorial, S una superficie abierta y C la curva cerrada que limita S,

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A})\cdot \boldsymbol{n}\, da$$

donde $d\boldsymbol{l}$ es el elemento de longitud de C, $\boldsymbol{n}$ la normal a S, y el camino C está recorrido en el sentido que haga avanzar el sacacorchos en la dirección de $\boldsymbol{n}$] se llega inmediatamente a $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$.

1.6. DISTRIBUCIONES SUPERFICIALES DE CARGAS Y DIPOLOS. DISCONTINUIDADES EN EL CAMPO ELECTRICO Y EN EL POTENCIAL

Uno de los problemas más corrientes de electrostática es la determinación del campo, o del potencial, de una distribución superficial dada de cargas. La ley de Gauss [1.11] nos permite expresar un resultado parcial directamente. Si una superficie S, cuyo vector unitario normal $\boldsymbol{n}$ está dirigido desde la cara 1 a la cara 2, soporta una densidad superficial de carga $\sigma(\boldsymbol{x})$ (medida en culombios por metro cuadrado), y los campos eléctricos a cada lado de la superficie son $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$, respectivamente, como se indica en la figura 1.4, entonces la ley de Gauss nos dice inmediatamente que:

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\cdot \boldsymbol{n} = \sigma/\epsilon_0 \qquad [1.22]$$

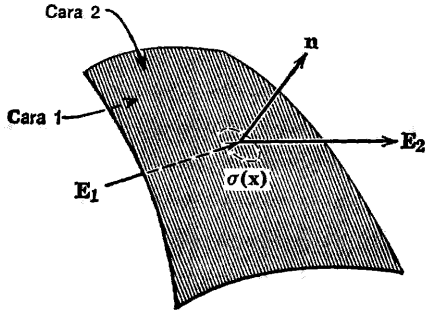


FIG. 1.4. Discontinuidad sufrida por la componente normal del campo eléctrico al atravesar una capa superficial de carga.

Esto no determina $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$ a menos que no existan otras fuentes del campo y que sean especialmente simples la geometría del problema y el valor de σ. Todo lo que [1.22] dice es que existe una discontinuidad, de magnitud σ/ϵ_0 en la componente normal del campo eléctrico al cruzar la superficie cargada con una densidad superficial de carga σ, cuando el cruce se realiza en el sentido de $\boldsymbol{n}$.

Se puede demostrar que la componente tangencial del campo eléctrico es continua al atravesar la superficie cargada utilizando [1.21] para calcular la integral curvilínea de $\boldsymbol{E}$ alrededor de una trayectoria cerrada. Unicamente es necesario tomar una trayectoria rectangular cuyos lados sean despreciables frente a los otros dos, y éstos uno a cada lado de la superficie.

Podemos obtener un resultado general para el potencial (y, por consiguiente, para el campo, por derivación) en cada punto del espacio (y no exclusivamente en la superficie) a partir de [1.17], sustituyendo $\rho\, d^3x$ por $\sigma\, da$:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\, da' \qquad [1.23]$$

Para distribuciones de carga superficiales o volúmicas el potencial es continuo en todas partes, incluso dentro de la distribución de carga. Esto puede demostrarse a partir de [1.23] y del hecho de que $\boldsymbol{E}$ se mantiene finito, aun cuando sea discontinuo al atravesar la distribución superficial de carga. Con cargas puntuales, distribuciones lineales o capas de dipolos, el potencial deja de ser continuo, como se verá inmediatamente.

Otro problema interesante es el cálculo del potencial creado por una capa doble o distribución de dipolos en una superficie S. Podemos imaginar una capa doble como formada por una distribución superficial de carga $\sigma(\boldsymbol{x})$ y muy cerca de ella otra superficie S' provista de la misma densidad de carga con signo contrario en puntos inmediatamente vecinos, como se indica en la figura 1.5. La distribución superficial de dipolos o capa doble de intensidad

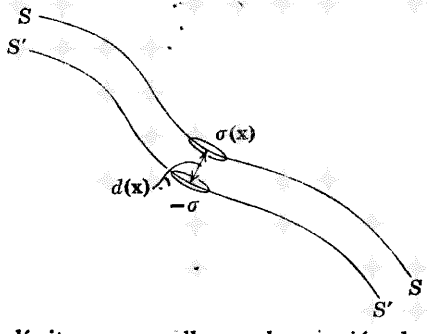


FIG. 1.5. Proceso límite que nos lleva a la creación de una capa dipolar.

$D(\boldsymbol{x})$ se obtiene haciendo que S' se acerque a S hasta aproximarse infinitesimalmente mientras la densidad superficial de carga $\sigma(\boldsymbol{x})$ se hace infinita, de tal manera que el producto de $\sigma(\boldsymbol{x})$ por la separación local $d(\boldsymbol{x})$ entre S y S' tienda al límite $D(\boldsymbol{x})$:

$$\lim_{d(x)\to 0} \sigma(\boldsymbol{x})\, d(\boldsymbol{x}) = D(\boldsymbol{x}) \qquad [1.24]$$

El momento dipolar de la capa está dirigido según la normal a la superficie S y su sentido es el que va desde las cargas negativas a las positivas.

Para hallar el potencial creado por una capa doble se puede calcular el que crearía un solo dipolo y a continuación superponer los efectos de una densidad superficial de ellos, o bien podemos obtener el mismo resultado realizando matemáticamente el proceso de paso al límite descrito antes verbalmente a partir de la expresión [1.23] correspondiente a la densidad superficial. El primer camino es quizá más simple, pero el segundo proporciona un ejercicio

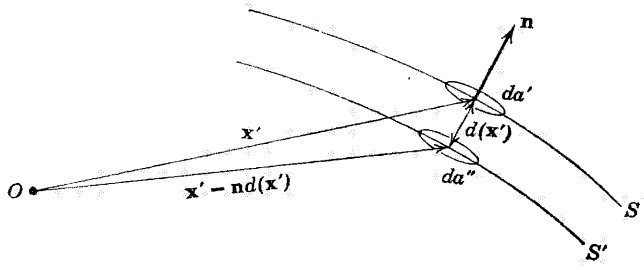


FIG. 1.6. Geometría de una capa dipolar.

útil de cálculo vectorial. Consecuentemente, vamos a abordar el paso al límite. Si $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario normal a la superficie S, dirigido desde S' hacia S, como se indica en la figura 1.6, el potencial debido a las dos superficies próximas es

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,da'-\int_{S'}\frac{\sigma(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{n}d|}\,da''\right]$$

Para valores pequeños de d podemos desarrollar $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{n}d|^{-1}$. Sea la expresión general $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}|^{-1}$, donde $|\boldsymbol{a}|\ll|\boldsymbol{x}|$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}|}&\equiv\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}}\\&=\frac{1}{x}\left(1-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{x^2}+\ldots\right)\\&=\frac{1}{x}+\boldsymbol{a}\cdot\nabla\left(\frac{1}{x}\right)+\ldots\end{aligned}$$

Esto es precisamente un desarrollo en serie de Taylor en tres dimensiones. De este modo encontramos que el potencial (después de tomar el límite [1.24]) es:

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S D(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{n}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)da' \qquad [1.25]$$

La ecuación [1.25] tiene una interpretación geométrica sencilla. Observemos que:

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)da'=-\frac{\cos\theta\,da'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}=-d\Omega$$

donde $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido con que se ve el elemento de área da' desde el punto P, tal como aparece en la figura 1.7. Si θ es un ángulo agudo, esto es, si desde el punto de observación se ve la cara «interna» de la capa dipolar, nótese que $d\Omega$ tiene signo positivo. El potencial puede escribirse:

$$\Phi(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S D(x')\, d\Omega \qquad [1.26]$$

Si la densidad de momento dipolar D es constante, el potencial que crea la capa es proporcional al producto del momento por el ángulo sólido con que se ve la superficie desde el punto de observación, independientemente de su forma.

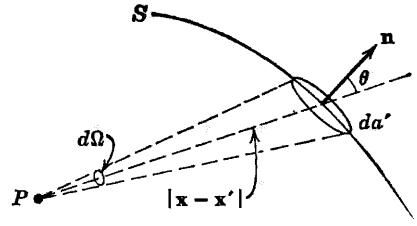


FIG. 1.7. El potencial creado por un elemento de superficie da' de una capa dipolar de densidad D es proporcional al producto de D con signo cambiado por el ángulo sólido elemental con que se ve da' desde P.

Al atravesar la capa doble existe una discontinuidad en el potencial. Esto puede verse haciendo que el punto de observación se acerque indefinidamente a la capa doble. Entonces, se imagina la doble capa dividida en dos partes, una de las cuales es un pequeño disco situado directamente frente al punto de observación. El disco es lo bastante pequeño para que sea sensiblemente plano y con una densidad superficial de momento dipolar D constante. Es evidente que el potencial total puede obtenerse por superposición lineal del potencial debido al disco y del potencial debido al resto. Se deduce claramente de [1.26] que sólo el potencial del disco presenta una discontinuidad, de valor D/ϵ_0, al atravesar desde la cara interna a la externa. El potencial vale $-D/2\epsilon_0$ en el lado interior y $+D/2\epsilon_0$ en el exterior. El potencial debido al resto de la capa, con el agujero que ha dejado el disco, es continuo al atravesar el plano del agujero. Por tanto, el salto total de potencial al atravesar la superficie es:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = D/\epsilon_0 \qquad [1.27]$$

Este resultado es análogo al [1.22], discontinuidad experimentada por el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ al atravesar una densidad superficial de carga. La ecuación [1.27] puede interpretarse físicamente como la caída de potencial sufrida en el interior de la capa dipolar, y puede calcularse como el producto del campo entre las dos capas de carga superficial por su separación antes de efectuar el paso al límite.

1.7. ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE

En las secciones 1.4 y 1.5 se vio que el comportamiento del campo electrostático puede expresarse por medio de las dos ecuaciones diferenciales:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad [1.13]$$

y

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad [1.14]$$

Esta última ecuación es equivalente a decir que $\boldsymbol{E}$ es el gradiente de una función escalar, el potencial escalar Φ:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi \qquad [1.16]$$

Podemos combinar las ecuaciones [1.13] y [1.16] en una sola ecuación diferencial en derivadas parciales para la función $\Phi(\boldsymbol{x})$:

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0 \qquad [1.28]$$

Esta se conoce como *ecuación de Poisson*. En las regiones del espacio donde no existe densidad de carga, el potencial escalar satisface a la *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2\Phi = 0 \qquad [1.29]$$

Tenemos ya una solución del potencial escalar en la expresión

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\, d^3x' \qquad [1.17]$$

Para comprobar que efectivamente satisface la ecuación de Poisson [1.28], aplicaremos el operador laplaciano a ambos miembros:

$$4\pi\epsilon_0\nabla^2\Phi = \nabla^2\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\, d^3x' = \int \rho(\boldsymbol{x}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) d^3x' \qquad [1.30]$$

Ahora debemos calcular el valor de $\nabla^2(1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)$. Es conveniente (y permisible) trasladar el origen a $\boldsymbol{x}'$ y así considerar la $\nabla^2(1/r)$, en la que r es el módulo de $\boldsymbol{x}$. Por cálculo directo hallamos que $\nabla^2(1/r) = 0$ para $r \neq 0$:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r\cdot\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(1) = 0$$

Sin embargo, para $r = 0$, la expresión es indeterminada. Aún así, la [1.30] puede escribirse en la forma:

$$4\pi\epsilon_0\nabla^2\Phi = C\rho(\boldsymbol{x}) \qquad C = \int \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) d^3x$$

gracias a que $\nabla^2(1/r)$ se anula para $r \neq 0$. Para calcular la constante C utili-

zaremos el siguiente procedimiento de paso al límite:

$$C=\lim_{a\to 0}\int \nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)d^3x$$

La laplaciana de la función $(r^2+a^2)^{-1/2}$ es:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)=-\frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}$$

Por consiguiente:

$$C=\lim_{a\to 0}\left[-3a^2\int d\Omega\int_0^\infty\frac{r^2\,dr}{(r^2+a^2)^{5/2}}\right]=$$

$$=-12\pi\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^{5/2}}=-4\pi$$

Este valor de C establece que realmente la laplaciana de [1.17] satisface la ecuación de Poisson [1.28].

La naturaleza singular de la laplaciana de $1/r$ puede expresarse formalmente mediante la función delta de Dirac. Como $\nabla^2(1/r)=0$ para $r\neq 0$, y su volumen vale -4π, podemos escribir la ecuación formal $\nabla^2(1/r)=-4\pi\delta(\boldsymbol{x})$, o bien, en forma más general:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad [1.31]$$

1.8. TEOREMA DE GREEN

La solución general [1.17] sería la solución más directa y conveniente en cualquier caso si los problemas electrostáticos implicaran siempre distribuciones de carga localizadas, discretas o continuas, sin superficie límite alguna. No habría necesidad en absoluto de las ecuaciones de Poisson o Laplace. Naturalmente, en la realidad muchos de los problemas de electrostática, si no la mayoría, incluyen regiones finitas del espacio, con carga o sin ella, y con condiciones de contorno preestablecidas en las superficies limitadoras. Estas condiciones en el contorno se pueden simular por medio de una distribución de cargas adecuada fuera de la región que nos interesa (incluso en el infinito), pero [1.17] se hace inadecuada para el cálculo del potencial, excepto en los casos sencillos (por ejemplo, el método de imágenes).

Para tratar las condiciones de contorno hay que desarrollar algunos procedimientos matemáticos, a saber, las identidades o teoremas debidos a GEORGE GREEN (1824).

Estas igualdades se deducen como aplicaciones simples del teorema de la divergencia. Este teorema:

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,d^3x=\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,da$$

se aplica a cualquier campo vectorial $\boldsymbol{A}$ definido en el volumen V que está limitado por la superficie cerrada S. Sea $\boldsymbol{A}=\phi\nabla\psi$, donde ϕ y ψ son campos escalares arbitrarios. Tenemos:

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)=\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi \qquad [1.32]$$

y

$$\phi\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}=\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} \qquad [1.33]$$

donde $\partial/\partial n$ es la derivada en la dirección de la normal a la superficie S (dirigida hacia fuera del volumen V). Cuando [1.32] y [1.33] se sustituyen en el teorema de la divergencia, resulta la *primera identidad de Green*:

$$\int_V(\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi)\,d^3x=\oint_S\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,da \qquad [1.34]$$

Si en [1.34] intercambiamos ϕ y ψ, y restamos las dos expresiones, los términos $\nabla\phi\cdot\nabla\psi$ desaparecen, y así obtenemos la segunda identidad o *teorema de Green*:

$$\int_V(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)\,d^3x=\oint_S\left[\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]da \qquad [1.35]$$

La ecuación diferencial de Poisson se puede convertir en una ecuación integral si elegimos un valor particular de ψ, precisamente

$$1/R\equiv 1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|,$$

donde $\boldsymbol{x}$ es el punto de observación y $\boldsymbol{x}'$ la variable de integración. Además, haremos $\phi=\Phi$, el potencial escalar, y aprovecharemos que $\nabla^2\Phi=-\rho/\epsilon_0$. Como sabemos por [1.31] que $\nabla^2(1/R)=-4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$, la ecuación [1.35] se convierte en:

$$\int_V\left[-4\pi\Phi(\boldsymbol{x}')\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+\frac{1}{\epsilon_0 R}\rho(\boldsymbol{x}')\right]d^3x'=\oint_S\left[\Phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\right]da'$$

Si el punto $\boldsymbol{x}$ es interior a V, tenemos:

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{R}\,d^3x'+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n'}-\Phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]da' \qquad [1.36]$$

Si $\boldsymbol{x}$ es exterior a S, el primer miembro de [1.36] es cero *. Obsérvese que esto está de acuerdo con la interpretación de la integral de superficie como el potencial creado por una densidad superficial de carga $\sigma=\epsilon_0(\partial\Phi/\partial n')$ y una capa dipolar $D=-(\epsilon_0)\Phi$. Las discontinuidades en el campo eléctrico [1.22] y en el

* El lector puede quejarse de que [1.36] ha sido obtenida de modo ilegal, puesto que $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ no se comporta bien en el interior del volumen V. Se puede restablecer el rigor utilizando un proceso de paso al límite, como en la sección anterior, o bien excluyendo el punto singular, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$, mediante una pequeña esfera que lo rodee. El resultado sigue siendo [1.36].

potencial eléctrico [1.27], al atravesar la superficie, nos hacen cero automáticamente el potencial y el campo fuera del volumen V.

Hay que hacer notar dos observaciones sobre el resultado [1.36]. En primer lugar, si la superficie S se nos marcha al infinito y el campo eléctrico en S tiende a cero más rápidamente que R^{-1}, la integral de superficie se anula y [1.36] se nos reduce a la forma conocida [1.17]. En segundo lugar, para un volumen desprovisto de cargas, el potencial en cualquier punto interior (que es solución de la ecuación de Laplace) se expresa en [1.36] solamente en función de los valores del potencial y de su derivada normal en los puntos de la superficie. Este sorprendente resultado no es una solución al problema de contorno, sino solamente una ecuación integral, puesto que la especificación de ambos Φ y $(\partial\Phi/\partial n)$ *(condiciones de Cauchy)* son datos excesivos al problema. Esto se discutirá detalladamente en secciones posteriores, donde, utilizando el teorema de Green [1.35], se desarrollarán técnicas que conducen a las soluciones para condiciones de contorno apropiadas.

1.9. UNICIDAD DE LA SOLUCION CON LAS CONDICIONES DE CONTORNO DE DIRICHLET Y NEUMANN

Surge la cuestión de cuáles son las condiciones de contorno adecuadas para la ecuación de Poisson (o Laplace) a fin de que resulte, en el interior de la región limitada, una solución única y de buen comportamiento (esto es, físicamente razonable). La experiencia física nos lleva a pensar que la especificación del potencial sobre una superficie cerrada (por ejemplo, un sistema de conductores mantenidos a potenciales diferentes) define un problema de potencial único. Esta situación se denomina *problema de Dirichlet,* o *de condiciones de contorno de Dirichlet.* Análogamente, es plausible estimar que la especificación del campo eléctrico (derivada normal del potencial) en todos los puntos de la superficie define también un problema único. La especificación de la derivada normal se conoce con el nombre de *condiciones de contorno de Dirichlet.* Análogamente se deja entrever que la especificación del campo eléctrico (o derivada normal del potencial) en cualquier punto de la superficie (que corresponde a dar una distribución superficial de carga) define también un problema único. Este planteo se conoce como *condiciones de contorno de Neumann.* Demostraremos a continuación estas proposiciones basándonos en la primera identidad de Green [1.34].

Tratamos de demostrar la unicidad de la solución de la ecuación de Poisson, $\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$, en el interior del volumen V bajo las condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann en la superficie cerrada S que encierra a V. Supongamos el caso contrario, o sea, que existen dos soluciones Φ_1 y Φ_2 que satisfacen las mismas condiciones en el contorno. Sea

$$U = \Phi_2 - \Phi_1 \qquad [1.37]$$

En tal caso, $\nabla^2 U = 0$ en V, y $U = 0$ ó $\partial U/\partial n = 0$ sobre S, según se trate de condiciones de Dirichlet o Neumann, respectivamente. Partiendo de la primera identidad de Green [1.34], con $\phi = \psi = U$, hallamos:

$$\int_V (U\nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla U)\, d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n}\, da \qquad [1.38]$$

Para ambos tipos de condiciones, y teniendo en cuenta las propiedades de U, esta expresión se reduce a:

$$\int_V |\nabla U|^2 \, d^3x = 0$$

que implica $\nabla U = 0$. Por consiguiente, U es constante en el interior de V. Para las condiciones de Dirichlet, $U = 0$ en S, así que en V, $\Phi_1 = \Phi_2$ y la solución es única. Análogamente, para las condiciones de Neumann la solución es única, salvo una constante aditiva arbitraria sin importancia.

Del segundo miembro de [1.38] se deduce claramente que también es única la solución a un problema con condiciones de contorno mixtas (es decir, condiciones de Dirichlet sobre una parte de S y de Neumann sobre la restante).

Debe quedar claro que no existe una solución para la ecuación de Poisson si se especifican de modo arbitrario sobre una superficie cerrada tanto Φ como $\partial\Phi/\partial n$ (condiciones de contorno de Cauchy), puesto que las soluciones existentes para condiciones de Dirichlet y para condiciones de Neumann por separado no serán en general compatibles. Esto puede verificarse con [1.36]. Si se introducen en el segundo miembro valores arbitrarios de Φ y $\partial\Phi/\partial n$, puede demostrarse que los valores de $\Phi(\boldsymbol{x})$ y de $\nabla\Phi(\boldsymbol{x})$ son en general inconsistentes con los valores supuestos sobre la superficie límite cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima a ella. La cuestión de si las condiciones de Cauchy sobre una superficie *abierta* definen un problema electrostático único requiere un tratamiento más extenso de lo que estaría justificado en este momento. El lector puede dirigirse a MORSE y FESBACH (sec. 6.2, págs. 692-706) o a SOMMERFELD: *Partial Differential Equations in Physics*, cap. II, para una discusión detallada de estas cuestiones. La conclusión es que los problemas electrostáticos se especifican solamente por las condiciones de contorno de Dirichlet, o las de Neumann, sobre una superficie cerrada (parte de la cual puede naturalmente encontrarse en el infinito).

1.10. SOLUCION FORMAL DEL PROBLEMA ELECTROSTATICO DE CONDICIONES DE CONTORNO MEDIANTE LA FUNCION DE GREEN

El teorema de Green [1.35] y las llamadas «funciones de Green» permiten obtener la solución de la ecuación de Poisson, o la de Laplace, en un volumen finito V con condiciones de contorno sobre la superficie límite S, bien de Dirichlet, bien de Neumann.

Al obtener el resultado [1.36] —que no era una solución —elegíamos que la función ψ fuera igual a $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$, que es el potencial de una carga puntual de valor $4\pi\epsilon_0$ y satisface a la ecuación:

$$\nabla'^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad [1.31]$$

La función $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ es sólo una de las funciones de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}'$ que satisfacen [1.31] y constituyen una clase de funciones denominadas de Green. En general,

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad [1.39]$$

donde

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \qquad [1.40]$$

siendo F una función que satisface la ecuación de Laplace en el interior de V:

$$\nabla'^2 F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0 \qquad [1.41]$$

Podemos hallar en el resultado [1.36] la clave para el problema de satisfacer las condiciones de contorno prescritas para Φ, o $\partial\Phi/\partial n$. Como ya se ha destacado antes, no es una solución que satisfaga el tipo correcto de condiciones de contorno, porque tanto Φ como $\partial\Phi/\partial n$ aparecen en la integral de superficie. Es a lo sumo una ecuación integral para Φ. Mediante el concepto generalizado de función de Green [y dada la libertad adicional que implica la función $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$] se nos presenta la posibilidad de utilizar el teorema de Green con $\psi = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ y elegir convenientemente $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ para que se elimine una u otra de las dos integrales de superficie. De este modo el resultado obtenido implicaría solamente condiciones de Dirichlet o Neumann.

Naturalmente, si la función $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ necesaria dependiera en detalle de la forma exacta de las condiciones de contorno, el método tendría poca generalidad. Como se verá inmediatamente, esto no ocurre y $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ satisface condiciones de contorno sobre S bastante simples.

Según el teorema de Green [1.35], haciendo $\phi = \Phi$, $\psi = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$, y teniendo en cuenta las propiedades de G [1.39], se obtiene con facilidad la generalización de [1.36]:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\boldsymbol{x}')\, G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\, d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi(\boldsymbol{x}') \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')}{\partial n'} \right] da' \qquad [1.42]$$

La libertad introducida en la definición de G [1.40] significa que podemos hacer depender la integral de superficie exclusivamente del tipo escogido de condiciones de contorno. Así, por ejemplo, en el caso de las *condiciones de Dirichlet* exigimos:

$$G_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0 \quad \text{para } \boldsymbol{x}' \text{ sobre } S \qquad [1.43]$$

En tal caso el primer término de la integral de superficie en [1.42] se anula y la solución es:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\boldsymbol{x}') G_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\, d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\boldsymbol{x}') \frac{\partial G_D}{\partial n'}\, da' \qquad [1.44]$$

En el caso de *condiciones de Neumann* debemos operar con mayor cuidado. La elección evidente de las condiciones de contorno para $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ parece ser

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0 \quad \text{para } \boldsymbol{x}' \text{ sobre } S$$

ya que de este modo se nos anularía el segundo término de la integral de superficie [1.42], como deseábamos. Pero basta aplicar el teorema de Gauss a [1.39] para ver que

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi$$

Por consiguiente, la condición de contorno más sencilla posible para G_N es:

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{para } \boldsymbol{x}' \text{ sobre } S \qquad [1.45]$$

donde S es el área total de la superficie. Así, la solución es

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \langle\Phi\rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{x}')G_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\, d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_N\, da' \qquad [1.46]$$

donde $\langle\Phi\rangle_S$ es el valor medio del potencial sobre la superficie completa. El problema de Neumann habitual es el llamado «problema exterior», en el que V está limitado por dos superficies, una cerrada y finita, la otra en el infinito. Entonces el área S es infinita; la condición de contorno [1.45] resulta homogénea y el valor medio $\langle\Phi\rangle_S$ se anula.

Observemos que las funciones de Green satisfacen condiciones de contorno sencillas [1.43] o [1.45] que no dependen de los valores particulares de las condiciones de contorno de Dirichlet (o de Neumann). Aun así, frecuentemente resulta bastante complicado (si no imposible) determinar $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$, debido a su dependencia de la forma de la superficie S. Encontraremos problemas de esta índole en los capítulos 2 y 3.

Para las funciones de Green que satisfacen las condiciones de contorno de Dirichlet [1.43] puede demostrarse la propiedad matemática de simetría $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = G(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x})$ mediante el teorema de Green, haciendo $\phi = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ y $\psi = G(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$, en donde $\boldsymbol{y}$ es la variable de integración. Puesto que la función de Green, como función de una de sus variables, es el potencial creado por una carga puntual, la simetría representa simplemente la intercambiabilidad física entre el punto fuente y el punto de observación. Para las condiciones de contorno de Neumann la simetría no es automática, pero puede imponerse como requisito adicional.

Finalmente, como aspecto importante, haremos notar el significado físico de $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$. Se trata de una solución a la ecuación de Laplace en V y representa el potencial creado por un sistema de cargas exteriores a V. Se le puede imaginar como el potencial debido a una distribución externa de cargas elegida de tal modo que satisfaga las condiciones de contorno homogéneas (potencial cero, o derivada normal cero) en la superficie S, al combinarlo con el potencial creado por una carga puntual en el punto fuente $\boldsymbol{x}'$. Como el potencial, debido a la carga puntual, en un punto $\boldsymbol{x}$ de la superficie depende de la posición de dicha carga, también la distribución externa de carga $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ deberá depender del «parámetro» $\boldsymbol{x}'$. Adoptando este punto de vista, vemos que el método de imágenes (que se tratará en el capítulo 2) es físicamente equivalente a la determinación de la función $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ apropiada para que satisfaga las condiciones [1.43] o [1.45]. En el caso del problema de Dirichlet con conductores, $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ puede interpretarse como el potencial debido a la distribución superficial de

carga inducida en los conductores por la presencia de una carga puntual en el punto x'.

1.11. ENERGIA POTENCIAL ELECTROSTATICA Y DENSIDAD DE ENERGIA. CAPACIDAD

En la sección 1.5 se vio que el producto del potencial (escalar) por la carga de un objeto puntual se podía interpretar como energía potencial. Hablando con más precisión, si una carga puntual q_i se trae desde el infinito a un punto x_i de una región donde existe campo eléctrico localizado descrito por el potencial escalar Φ (que se anula en el infinito), el trabajo efectuado sobre la carga (y, por tanto, su energía potencial) viene dado por

$$W_i = q_i \Phi(x_i) \qquad [1.47]$$

El potencial Φ se puede considerar producido por un conjunto de $(n-1)$ cargas q_j $(j=1, 2, \ldots, n-1)$ en los puntos x_j. En tal caso:

$$\Phi(x_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|x_i - x_j|} \qquad [1.48]$$

de modo que la energía potencial de la carga q_i es

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|x_i - x_j|} \qquad [1.49]$$

Y la energía potencial *total* de todas las cargas debida a todas las fuerzas que actúan entre ellas es,

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{|x_i - x_j|} \qquad [1.50]$$

como puede verse más fácilmente añadiendo las cargas una tras otra. Se puede obtener todavía una forma más simétrica sumando independientemente para todas las i y todas las j, y dividiendo luego por 2:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|x_i - x_j|} \qquad [1.51]$$

Se entiende que los términos $i=j$ (términos de «energía propia» infinita) están omitidos en la suma doble.

En el caso de una distribución continua de carga [o, en general, usando las funciones delta de Dirac [1.6] la energía potencial toma la forma:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int\int \frac{\rho(x)\rho(x')}{|x - x'|} d^3x \, d^3x' \qquad [1.52]$$

Se puede obtener otra expresión, equivalente a [1.52], teniendo en cuenta que una de las integrales es precisamente el potencial escalar [1.17]. Por tanto:

$$W=\frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})\, d^3x \qquad [1.53]$$

Las ecuaciones [1.51], [1.52] y [1.53] nos dan la energía potencial electrostática en función de las posiciones de las cargas, poniendo de manifiesto las interacciones entre éstas por medio de las fuerzas de Coulomb.

Una forma alternativa, y muy fructífera, de abordar el problema es destacar el papel del campo eléctrico e interpretar la energía como algo almacenado en el campo eléctrico que rodea las cargas. Para obtener esta última forma haremos uso de la ecuación de Poisson para eliminar la densidad de carga de [1.53]:

$$W=-\frac{\epsilon_0}{2}\int \Phi\nabla^2\Phi\, d^3x$$

Una integración por partes nos lleva al resultado:

$$W=\frac{\epsilon_0}{2}\int |\nabla\Phi|^2\, d^3x=\frac{\epsilon_0}{2}\int |\boldsymbol{E}|^2\, d^3x \qquad [1.54]$$

donde la integración afecta a todo el espacio. En [1.54] hemos hecho desaparecer cualquier referencia a las cargas, y la energía viene expresada como una integral del cuadrado del campo eléctrico sobre todo el espacio. Esto nos lleva de un modo natural a identificar el integrando como una densidad de energía w:

$$w=\frac{\epsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2 \qquad [1.55]$$

Intuitivamente esta expresión para la densidad de energía resulta razonable, puesto que las regiones del espacio donde los campos son intensos «deben» contener energía considerable.

Con [1.55] se presenta posiblemente un hecho paradójico. La densidad de energía es positiva definida. Como consecuencia, su integral de volumen nunca podrá ser negativa. Esto parece contradecir nuestra impresión de que, según [1.51], la energía potencial entre dos cargas de signos opuestos es negativa. La razón de esta aparente contradicción es que [1.54] y [1.55] contienen términos de «energía propia» que contribuyen a la densidad de energía, mientras que éstos no aparecen en la suma doble [1.51]. Para aclarar esto consideraremos dos cargas puntuales q_1 y q_2 situadas en los puntos $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$, tal como expresa la figura 1.8. El campo eléctrico en el punto P dado por el vector $\boldsymbol{x}$ es

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1|^3}+\frac{q_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2|^3}\right)$$

de modo que la densidad de energía [1.55] es

$$w=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q_1^2}{8\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1|^4}+\frac{q_2^2}{8\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2|^4}+\frac{q_1q_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1|^3|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2|^3}\right\} \qquad [1.56]$$

Claramente se ve que los dos primeros términos son contribuciones autoenergéticas. Para probar que el tercer término es el que da la energía potencial de interacción integraremos sobre todo el espacio:

$$W_{\text{int}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{4\pi}\int\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1|^3|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2|^3}d^3x \qquad [1.57]$$

Si efectuamos el cambio de variable $\boldsymbol{\rho}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)/|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$, nos da

$$W_{\text{int}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|}\times\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot(\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{n})}{\rho^3|\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{n}|^3}d^3\rho \qquad [1.58]$$

siendo $\boldsymbol{n}$ un vector unitario en la dirección de $(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)$. Puede probarse fácilmente, utilizando el hecho de que $(\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{n})/|\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{n}|^3=-\nabla(1/|\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{n}|)$, que la integral sin dimensiones tiene el valor 4π, de modo que la energía de interacción se reduce al valor esperado.

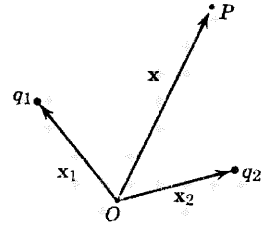


FIG. 1.8.

Calculando el cambio de la energía total del sistema sometido a pequeños desplazamientos virtuales pueden obtenerse las fuerzas que actúan entre cuerpos cargados. Debe ponerse cuidado en expresar la energía en una forma que muestre claramente los factores que varían con un cambio de la configuración y aquellos otros que permanecen constantes.

Para ilustrar el procedimiento calcularemos, a modo de ejemplo, la fuerza ejercida por unidad de área sobre la superficie de un conductor con densidad superficial de carga $\sigma(\boldsymbol{x})$. En los puntos vecinos y próximos a la superficie la densidad de energía es

$$w=\frac{\epsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2=\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \qquad [1.59]$$

Si imaginamos un pequeño desplazamiento $\Delta\boldsymbol{x}$ de un elemento de área Δa, alejándose de la superficie del conductor, la energía electrostática decrece en una cantidad igual al producto de la densidad de energía por el volumen excluido $\Delta\boldsymbol{x}\,\Delta a$:

$$\Delta W=-\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\Delta a\,\Delta\boldsymbol{x} \qquad [1.60]$$

Esto significa que actúa una fuerza hacia fuera por unidad de área igual a $\sigma^2/2\epsilon_0=w$ en la superficie del conductor. Este resultado se obtiene también

tomando el producto de la densidad superficial de carga por el campo eléctrico, habiendo tenido la precaución de eliminar el campo debido al propio elemento de carga superficial.

Para un sistema de n conductores, cuyos potenciales son V_i y cuyas cargas totales son Q_i (siendo $i=1, 2, 3, \ldots, n$) y que están situados en el vacío, puede expresarse la energía potencial electrostática en función exclusivamente de los potenciales y de ciertas magnitudes geométricas denominadas coeficientes de capacidad. Para una configuración dada de los conductores, como el potencial depende linealmente de la densidad de carga, resulta que el potencial del conductor i-ésimo puede escribirse

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} Q_j \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

donde los p_{ij} dependen de la geometría de los conductores. Estas n ecuaciones pueden invertirse para dar la carga del conductor i-ésimo en función de todos los potenciales:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_j \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad [1.61]$$

Los coeficientes C_{ii} se llaman capacidades, mientras que los C_{ij}, para $i \neq j$, se llaman coeficientes de influencia. *La capacidad de un conductor es, pues, igual a la carga total del conductor cuando se mantiene a potencial unidad, en tanto que todos los otros conductores se mantienen a potencial cero.* Algunas veces se define también la capacidad de un sistema de conductores. Por ejemplo, la capacidad de dos conductores que llevan cargas iguales y opuestas en presencia de otros conductores conectados a tierra se define como la relación entre la carga en uno de ellos y la diferencia de potencial entre ambos. Las ecuaciones [1.61] pueden utilizarse para expresar esta capacidad en función de los coeficientes C_{ij}.

La energía potencial [1.53] para el sistema de conductores es:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i' V_i' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_i' V_j' \qquad [1.62]$$

La expresión de la energía en función de los potenciales V_i y de los coeficientes C_{ij}, o bien en función de las cargas Q_i y los p_{ij}, permite aplicar métodos variacionales para obtener valores aproximados de las capacidades. Puede demostrarse (véanse los problemas 1.17 y 1.18) que existen principios variacionales que permiten establecer límites superiores e inferiores a los C_{ij}. Estos principios permiten el cálculo, con un error conocido, de capacidades para configuraciones de conductores bastante complicadas. Las técnicas de cálculo automático de gran velocidad permiten utilizar funciones de tanteo con varios parámetros. Sin embargo, debe señalarse que para el límite inferior es necesaria una función de Green que satisfaga las condiciones de contorno, lo que hace que no sea trivial la estimación del error. Otras consideraciones sobre esta técnica de cálculo de capacidades se dejan para los problemas al final del presente capítulo y de los siguientes.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

El aspecto matemático de las funciones delta es tratado de modo sencillo, pero riguroso, en:

LIGHTHILL.
DENNERY y KRYZWICKI.

Para una discusión de los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y las condiciones de contorno apropiadas a cada tipo, véase:

MORSE y FESHBACH, cap. VI.
SOMMERFELD, *Partial Differential Equations in Physics*, cap. II.
COURANT y HILBERT, vol. II, caps. III y VI.

La teoría general de las funciones de Green se trata detalladamente en:

FRIEDMAN, cap. III.
MORSE y FESHBACH, cap. VII.

La teoría general de la electrostática se halla discutida extensamente en muchos viejos tratados. Son notables, a pesar de su notación algo anticuada:

MAXWELL, vol. I, caps. II y IV.
JEANS, caps. II, VI, VII.

De entre los libros más recientes es digno de mención, por su forma de tratar la teoría general:

STRATTON, cap. III y partes del cap. II.

Los lectores interesados en la aplicación de los métodos variacionales a problemas electrostáticos pueden consultar:

CAIRO y KAHAN.
COLLIN, cap. 4.
PÓLYA y SZEGO.

para estudiar técnicas matemáticas elegantes y efectivas.

PROBLEMAS

1.1. Utilícese el teorema de Gauss (y la ecuación [1.21] si fuera necesario) para demostrar lo siguiente:

a) Cualquier exceso de carga colocado sobre un conductor yace enteramente sobre su superficie. (Por definición, un conductor contiene cargas capaces de moverse libremente bajo la acción de los campos eléctricos aplicados.)

b) Un conductor hueco cerrado apantalla su interior de los campos debido a cargas exteriores, pero no apantalla al exterior de los campos debidos a cargas colocadas en su interior.

c) El campo eléctrico junto a la superficie de un conductor es normal a dicha superficie, y su módulo vale σ/ϵ_0, siendo σ la densidad de carga por unidad de área sobre la superficie.

1.2. La función delta de Dirac en tres dimensiones puede tomarse como el límite impropio de una función gaussiana D, cuando $\alpha \to 0$:

$$D(\alpha;\, x, y, z) = (2\pi)^{-3/2}\alpha^{-3} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}(x^2+y^2+z^2) \right]$$

Considérese un sistema de coordenadas ortogonales general, caracterizado por las superficies, u=constante, v=constante y w=constante, y cuyo elemento de volumen es $d^3x = (du/U)\,(dv/V)\,(dw/W)$. Demuéstrese que:

$$\delta(x-x') = \delta(u-u')\delta(v-v')\delta(w-w')\cdot UVW$$

al tomar el límite de la gaussiana anterior. Nótese que cuando $\alpha \to 0$ en el exponente sólo es necesario emplear, para la distancia entre los puntos, el elemento de longitud infinitesimal.

1.3. Exprésese, utilizando funciones delta de Dirac en las coordenadas apropiadas, como densidades de carga tridimensionales $\rho(x)$ las siguientes distribuciones de carga:

a) En coordenadas esféricas; una carga Q distribuida uniformemente sobre una superficie esférica de radio R.

b) En coordenadas cilíndricas; una carga λ por unidad de longitud distribuida uniformemente sobre una superficie cilíndrica de radio b.

c) En coordenadas cilíndricas; una carga Q repartida uniformemente sobre un disco plano, de espesor despreciable y de radio R.

d) En coordenadas esféricas; el mismo caso que en *c)*.

1.4. Tres esferas de radio a, una conductora, otra que posee una densidad de carga uniforme en su volumen y otra provista de una densidad de carga con simetría esférica que varía radialmente con r^n $(n > -3)$, poseen una carga total Q. Hágase uso del teorema de Gauss para obtener los campos eléctricos tanto en el interior como en el exterior de cada esfera. Represéntese el comportamiento de los campos en función del radio para las dos primeras esferas, y para la tercera con $n = -2,\ +2$.

1.5. El potencial medio temporal de un átomo de hidrógeno neutro viene dado por

$$\Phi = \frac{qe^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)$$

en donde q es la carga electrónica, y $\alpha^{-1} = a_0/2$. Hállese la distribución de carga (continua y discreta) que dará lugar a este potencial e interprétese el resultado físicamente.

1.6. Un condensador simple es un dispositivo constituido por dos conductores aislados colocados uno junto al otro. Si colocamos sobre ellos cargas iguales y opuestas, habrá una cierta diferencia de potencial entre los conductores. La razón entre la carga de un conductor y la diferencia de potencial recibe el nombre de capacidad (en unidades electrostáticas se mide en centímetros). Haciendo uso de la ley de Gauss, calcúlese la capacidad de

a) dos láminas planas conductoras de gran área A separadas por una pequeña distancia d;

b) dos esferas concéntricas conductoras de radios a, b $(b > a)$;

c) dos cilindros concéntricos conductores de longitud L, grande frente a ambos radios a, b $(b > a)$.

d) ¿Cuál debería ser el diámetro interno del conductor exterior de una línea coaxial de aire, cuyo conductor central es un hilo cilíndrico de 1 mm de diámetro, para que su capacidad sea 50 micromicrofaradios/m? ¿Cuál, para que sea 5 micromicrofaradios/m?

1.7. Dos conductores cilíndricos de radios a_1 y a_2 están dispuestos paralelamente y separados por una distancia d, grande frente a ambos radios. Demuéstrese que la capacidad por unidad de longitud viene dada aproximadamente por

$$C \simeq \pi\epsilon_0 \left(\ln \frac{d}{a} \right)^{-1}$$

en donde a es la media geométrica de ambos radios.

Calcúlese el grosor del hilo (dése el diámetro en milímetros) que sería necesario para construir una línea de transmisión bifilar con una capacidad de 10 pf/m si la separación entre los hilos fuera: 0,5 cm, 1,5 cm, 5 cm.

1.8. *a)* Calcúlese la energía electrostática total para los tres tipos de condensador del problema 1.5, y exprésese en función de las cargas Q y $-Q$ iguales y opuestas colocadas sobre los conductores y la diferencia de potencial entre ellos.

b) Represéntese la densidad de energía del campo electrostático en cada caso en función de la coordenada lineal adecuada.

1.9. Calcúlese la fuerza atractiva entre las placas de un condensador plano (problema 1.6, *a)* y en el condensador de cilindros paralelos (problema 1.7) para

a) cargas fijas en cada conductor;
b) diferencia de potencial fija entre los conductores.

1.10. Demuéstrese el *teorema del valor medio:* Si se trata de cargas libres en el espacio, el valor del potencial electrostático en cualquier punto es igual al valor medio del potencial sobre la superficie de *cualquier* esfera centrada en dicho punto.

1.11. Utilícese el teorema de Gauss para demostrar que junto a la superficie curva de un conductor cargado la derivada normal del campo eléctrico viene dada por

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial n} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

siendo R_1 y R_2 los radios de curvatura principales de la superficie.

1.12. Demuéstrese el *teorema de reciprocidad de Green:* Si Φ es el potencial debido a una densidad volumétrica de carga ρ y a una densidad superficial de carga σ, y Φ' es el potencial debido a otra distribución ρ', σ', tenemos:

$$\int_V \rho\Phi' \, d^3x + \int_S \sigma\Phi' \, da = \int_V \rho'\Phi \, d^3x + \int_S \sigma'\Phi \, da$$

1.13. Dos planos conductores infinitos, paralelos y conectados a tierra están separados por una distancia d. Se coloca una carga puntual q entre los dos planos. Utilícese el teorema de reciprocidad de Green para demostrar que la carga total inducida sobre uno de los planos es igual a $-q$ multiplicada por la fracción de la distancia perpendicular total entre la carga puntual y el otro plano. (Ayuda: escójase un problema electrostático con las mismas superficies, cuyas densidades de carga y potenciales sean conocidos y sencillos, para realizar la comparación.)

1.14. Considérese un volumen V libre de cargas limitado por una superficie cerrada S formada por varias superficies separadas (conductores) S_i, cada una de las cuales se mantiene a un potencial V_i. Sea $\Psi(x)$ una función bien comportada en V y sobre S, cuyo valor es igual a V_i sobre cada S_i, pero que, por lo demás, es arbitraria de momento. Defínase la magnitud tipo «energía»:

$$W[\Psi] = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V [\nabla\Psi]^2 \, d^3x$$

Demuéstrese el siguiente teorema: «$W[\Psi]$, que por definición no es negativa, tiene un valor mínimo absoluto y es estacionaria si, y sólo si, Ψ satisface la ecuación de Laplace en el interior de V y toma en las superficies S_i los valores especificados V_i.»

1.15. Demuéstrese el *teorema de Thomson:* Dado un número de superficies conductoras fijas, si colocamos cierta carga sobre cada una, la energía electrostática en la región limitada por dichas superficies es mínima cuando se distribuyen las cargas de forma que cada superficie sea equipotencial.

1.16. Demuéstrese el siguiente teorema: Si fijamos cierto número de superficies conductoras con una carga total sobre cada una, la introducción de un conductor aislado, no cargado, en la región limitada por dichas superficies disminuye la energía electrostática.

1.17. Considérese una configuración de conductores como la del problema 1.14 con uno de los conductores mantenido a potencial *unidad* y todos los restantes a potencial cero.

a) Demuéstrese que la capacidad del primer conductor viene dada por:

$$C=\epsilon_0 \int_V [\nabla\Phi]^2 \, d^3x$$

en la que Φ es la solución para el potencial.

b) Utilícese el teorema del problema 1.14 para demostrar que la capacidad verdadera C es siempre menor o igual que el valor:

$$C[\Psi]=\epsilon_0 \int_V [\nabla\Psi]^2 \, d^3x$$

siendo Ψ cualquier función de tanteo que satisface las condiciones de contorno sobre los conductores. Este es un principio variacional para la capacidad que proporciona un *límite superior.*

1.18. Considérese la configuración de conductores del problema 1.17, con todos los conductores excepto S_1 mantenidos a potencial cero.

a) Demuéstrese que el potencial $\Phi(x)$ en cualquier punto del volumen V y sobre cualesquiera de las superficies S_i puede escribirse:

$$\Phi(x)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_1} \sigma_1(x')G(x, x') \, d^2x$$

donde $\sigma_1(x')$ es la densidad de carga superficial sobre S_1, y $G(x, x')$, la función de Green, potencial para una carga puntual en presencia de todas las superficies que se mantienen a potencial cero (pero con S_1 ausente). Demuéstrese también que la energía electrostática es:

$$W=\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\oint_{S_1} da \oint_{S_1} da' \, \sigma_1(x)G(x, x')\sigma_1(x)$$

donde las integrales se extienden únicamente a la superficie S_1.

b) Demuéstrese que la expresión variacional

$$C^{-1}[\sigma]=\frac{\oint_{S_1} da \oint_{S_1} da' \, \sigma(x)G(x, x')\sigma(x')}{4\pi\epsilon_0 \left[\oint_{S_1} \sigma(x) \, da\right]^2}$$

con una función integrable $\sigma(x)$ arbitraria definida sobre S_1, es estacionaria para variaciones pequeñas de σ respecto a σ_1. Utilícese el teorema de Thomson para probar que el recíproco de C da un *límite inferior* para la verdadera capacidad del conductor S_1.

1.19. Evalúese para el condensador cilíndrico del problema 1.16, *c)*, el límite superior variacional del problema 1.17, *b)*, con la función de tanteo sencilla, $\Psi_1(\rho)=(b-\rho)/(b-a)$. Compárese el resultado variacional con el resultado exacto para $b/a=1{,}5$, a 2 y a 3. Explíquese la tendencia de los resultados por medio de la forma funcional de Ψ_1. En COLLIN, págs. 151-152, se emplea una función de tanteo mejorada.

1.20. Al estimar la capacidad de una configuración dada de conductores, es útil con frecuencia comparar con capacidades conocidas. Considérense dos configuraciones de n conductores, en las cuales los $(n-1)$ conductores mantenidos a potencial cero son los mismos, pero el conductor cuya capacidad deseamos conocer es diferente. En particular, supóngase que el conductor en una de las configuraciones tiene una superficie cerrada S_1 y que en la otra configuración tiene una superficie S_1', tal que S_1' está totalmente dentro de S_1.

a) Utilícese el teorema del problema 1.14 y el principio variacional del problema 1.17 para probar que la capacidad C' del conductor con superficie S_1' es menor que o igual a la capacidad C del conductor con superficie S_1 que encierra S_1'.

b) Establézcanse límites superior e inferior para la capacidad de un cubo conductor de lado a. Compárese el resultado para los límites y su valor medio con el valor numérico $C \simeq 4\pi\epsilon_0\ 0{,}655\ a$.

PROBLEMAS DE CONDICIONES DE CONTORNO EN ELECTROSTATICA: I

En muchos problemas de electrostática figuran superficies límite sobre las cuales se conoce como datos del problema o bien el potencial, o la densidad de carga superficial. En la sección 1.10 se presentó una solución formal para tales problemas por el método de las funciones de Green. En las situaciones prácticas (o aun en aproximaciones a las situaciones reales bastante idealizadas) algunas veces es fácil, y otras no, descubrir la función de Green correcta. Como consecuencia, se han desarrollado varios métodos de aproximación a los problemas electrostáticos con condiciones de contorno, de los cuales algunos sólo están remotamente relacionados con el método de la función de Green. En el presente capítulo trataremos dos de estas técnicas especiales: 1) el método de imágenes, que está íntimamente relacionado con la utilización de funciones de Green; 2) desarrollo en funciones ortogonales, que es una aproximación sacada directamente a partir de la ecuación diferencial y que más bien se halla lejos de la construcción directa de la función de Green. Se ha incurrido en una omisión: no se utilizan las técnicas de variable compleja, incluida la representación conforme, para el tratamiento de los problemas bidimensionales. El tema es importante, pero la falta de espacio y la existencia de discusiones específicas en otros textos justifica su ausencia. El lector interesado puede consultar las referencias que se citan al final del capítulo.

2.1. EL METODO DE LAS IMAGENES

Este método se aplica al problema de una o más cargas puntuales en presencia de superficies limitadoras; por ejemplo, conductores, ya sean conectados a tierra o mantenidos a potenciales fijos.

En condiciones favorables, es posible deducir de la geometría de la situación que las condiciones de contorno requeridas pueden ser simuladas mediante un pequeño número de cargas de magnitud apropiada, externas a la región de interés y colocadas adecuadamente. Estas cargas reciben el nombre de *cargas imagen,* y se llama *método de las imágenes* a esta sustitución del problema real con límites por el de una región ampliada con cargas imagen, pero sin límites. Las cargas imagen deben ser exteriores al volumen de interés, puesto que sus potenciales deben ser solución de la ecuación de Laplace en el interior de dicho volumen; la «integral particular» (es decir, la solución de la ecuación de Poisson) se hace figurar sumando los potenciales debidos a las cargas interiores al volumen.

Un ejemplo sencillo es el de una carga puntual situada frente a un plano conductor indefinido a potencial cero, tal como se muestra en la figura 2.1. Está claro que este problema es equivalente al de la carga original y una carga igual y de signo opuesto situada en el punto imagen especular al otro lado del plano que define la posición del conductor.

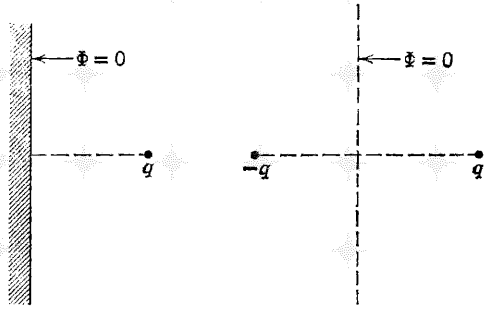


FIG. 2.1. Soluciones por el método de imágenes. A la izquierda tenemos el problema original. A la derecha, el problema imagen equivalente.

2.2. CARGA PUNTUAL EN PRESENCIA DE UNA ESFERA CONDUCTORA CONECTADA A TIERRA

Consideremos el problema que ilustra la figura 2.2. Una carga puntual q colocada en $\boldsymbol{y}$ respecto del origen, en el cual se halla centrada una esfera de radio a conectada a tierra. Buscamos el potencial $\Phi(\boldsymbol{x})$ tal que $\Phi(|\boldsymbol{x}|=a)=0$. Por razones de simetría (y suponiendo que solamente haga falta una carga imagen) es evidente que la carga imagen q' estará en la recta que une el origen con la carga q. Si consideramos que q es *exterior* a la esfera, la posición $\boldsymbol{y}'$ de la imagen estará en el interior. El potencial debido a ambas cargas q y q' es:

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}+\frac{q'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}'|}\right) \qquad [2.1]$$

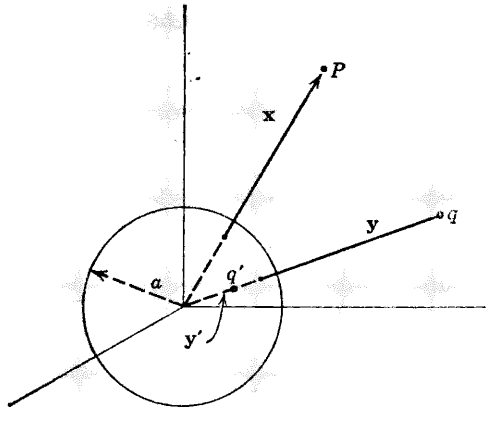


FIG. 2.2. Esfera conductora de radio a en presencia de una carga q, y su carga imagen q'.

Trataremos ahora de elegir q' e $|\boldsymbol{y}'|$, tales que el potencial sea nulo para $|\boldsymbol{x}|=a$. Si $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en la dirección x, y $\boldsymbol{n}'$ el correspondiente a la dirección y, entonces:

$$\Phi(x)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|x\boldsymbol{n}-y\boldsymbol{n}'|}+\frac{q'}{|x\boldsymbol{n}-y'\boldsymbol{n}'|}\right) \qquad [2.2]$$

Sacando x factor común en el primer término e y' en el segundo, para $x=a$, el potencial se convierte en:

$$\Phi(x=a)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{a\left|\boldsymbol{n}-\frac{y}{a}\boldsymbol{n}'\right|}+\frac{q'}{y'\left|\boldsymbol{n}'-\frac{a}{y'}\boldsymbol{n}\right|}\right) \qquad [2.3]$$

De la forma de [2.3] se observa que si elegimos:

$$\frac{q}{a}=-\frac{q'}{y'}, \qquad \frac{y}{a}=\frac{a}{y'}$$

se hace $\Phi(x=a)=0$, para todos los valores posibles de $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'$. Por tanto, vemos que la magnitud y la posición de la carga imagen son:

$$q'=-\frac{a}{y}q, \qquad y'=\frac{a^2}{y} \qquad [2.4]$$

Observemos que cuando la carga q se acerca a la esfera la carga imagen se hace cada vez mayor al tiempo que se aleja del centro de la esfera. Cuando q se halla justamente fuera de la superficie, la carga imagen es de igual valor y signo opuesto, y yace justamente debajo de la superficie.

Ahora que ya hemos encontrado la carga imagen podemos volver al problema original, una carga q exterior a la esfera conductora y considerar varios efectos. La densidad de carga inducida en la superficie puede calcularse partiendo de la derivada normal de Φ en la superficie:

$$\sigma=-\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial x}\bigg|_{x=a}=-\frac{q}{4\pi a^2}\left(\frac{a}{y}\right)\frac{\left(1-\frac{a^2}{y^2}\right)}{\left(1+\frac{a^2}{y^2}-2\frac{a}{y}\cos\gamma\right)^{3/2}} \qquad [2.5]$$

donde γ es el ángulo formado por $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. En la figura 2.3 viene representada la densidad de carga, tomando $-q/4\pi a^2$ como unidad, en función de γ para dos valores de y/a. En ella se pone de manifiesto la concentración preferente de la carga superficial en la dirección de la carga puntual q, especialmente en el caso $y/a=2$. Por integración directa es fácil ver que la carga total inducida sobre la esfera es igual a la carga imagen, tal como ya prevé la ley de Gauss.

La fuerza que actúa sobre la carga q puede calcularse de distintas maneras. La más sencilla es expresar de modo inmediato la fuerza entre la carga q y la carga imagen q'. La distancia entre ellas es

$$y-y'=y(1-a^2/y^2).$$

Por tanto, la fuerza atractiva, de acuerdo con la ley de Coulomb, es

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{a}{y}\right)^3\left(1-\frac{a^2}{y^2}\right)^{-2} \qquad [2.6]$$

Para separaciones grandes la fuerza sigue una ley inversamente proporcional al cubo de la distancia, pero para distancias pequeñas sigue una ley inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la superficie de la esfera.

Otro modo de obtenerla consiste en calcular la fuerza total sobre la superficie de la esfera. Sobre cada elemento de área da se ejerce una fuerza $\sigma^2 da/2\epsilon_0$, donde σ viene dado por [2.5], tal como se ha indicado en la figura 2.4. Se ve fácilmente, por razones de simetría, que sólo contribuye a la fuerza total la componente paralela al radio vector que va desde el centro de la esfera a la carga. De aquí que la fuerza total que actúa sobre la esfera (igual y opuesta a la que está sometida q) venga dada por la integral

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{8\pi a^2}\left(\frac{a}{y}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{y^2}\right)^2\int\frac{\cos\gamma}{\left(1+\frac{a^2}{y^2}-\frac{2a}{y}\cos\gamma\right)^3}\,d\Omega \qquad [2.7]$$

Por integración se llega inmediatamente a la expresión [2.6].

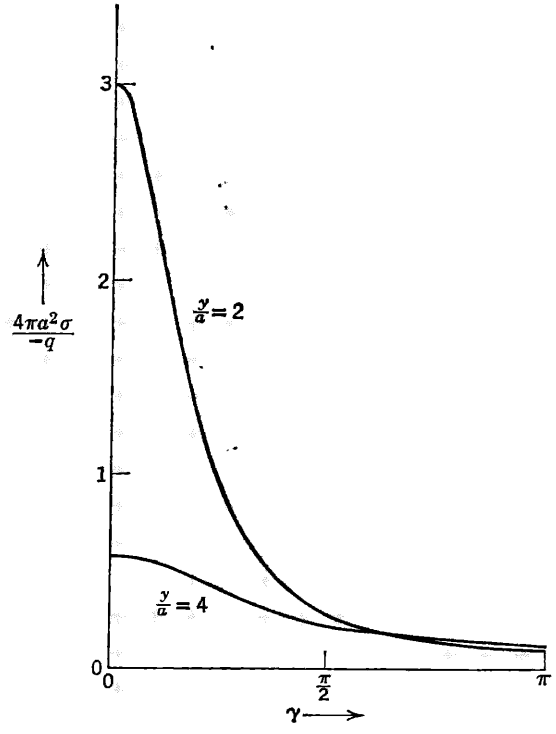


FIG. 2.3. Densidad superficial de carga σ inducida en una esfera de radio a conectada a tierra por la presencia de una carga puntual q situada a una distancia y del centro de la esfera. σ está representada tomando $-q/4\pi a^2$ como unidad en función del ángulo γ que forma su vector posición con el de la carga, para $y=2a$ e $y=4a$.

Toda la discusión se ha hecho basándonos en la hipótesis de que la carga q es *exterior* a la esfera. En realidad, los resultados se aplican igualmente cuando la carga q está situada *dentro* de la esfera. El único cambio necesario es en la expresión [2.5] de la densidad de carga superficial; en este caso, la normal exterior al conductor está dirigida radialmente hacia dentro, lo que implica un cambio de signo.

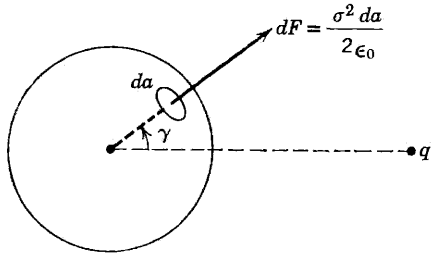


FIG. 2.4.

El lector puede transcribir todas las fórmulas recordando que ahora $y \leqslant a$. Las distribuciones angulares de densidad superficial de carga son similares a las de la figura 2.3, pero la carga total inducida es evidentemente igual a $-q$, cualquiera que sea el valor de y.

2.3. CARGA PUNTUAL EN PRESENCIA DE UNA ESFERA CONDUCTORA AISLADA Y CARGADA

En la sección anterior se consideró el problema de una carga q en las proximidades de una esfera conectada a tierra y mostramos que se inducía una cierta densidad superficial de carga en la esfera. Esta era en su totalidad $q' = aq/y$, y se distribuía por la superficie de modo que se hallara en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas.

Si nos proponemos considerar el problema de una esfera aislada y con una carga total Q en presencia de una carga puntual q, podemos construir la solución del potencial por superposición lineal. Imaginémonos que partimos de una esfera conectada a tierra (con la carga q' distribuida sobre su superficie). En estas condiciones quitamos la conexión a tierra y agregamos a la esfera una carga $(Q-q')$. Con esto, la carga total de la esfera la hemos llevado al valor Q. Para hallar el potencial indicaremos meramente que la carga añadida $(Q-q')$ debe distribuirse *uniformemente* sobre la superficie esférica, ya que las fuerzas electrostáticas debidas a la carga q están ya compensadas por la carga q'. De aquí que el potencial debido a la carga adicional $(Q-q')$ sea el mismo que si hubiera una carga puntual de la misma cuantía en el origen; al menos para los puntos exteriores a la esfera.

El potencial es la superposición de [2.1] y el de la carga puntual $(Q-q')$ en el origen:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|x-y|} - \frac{aq}{y\left|x - \frac{a^2}{y^2}y\right|} + \frac{Q + \frac{a}{y}q}{|x|} \right) \qquad [2.8]$$

La fuerza que actúa sobre q puede obtenerse directamente de la ley de Coulomb. Se dirige a lo largo del radio vector trazado del origen a q y es:

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y^2}\left[Q-\frac{qa^3(2y^2-a^2)}{y(y^2-a^2)^2}\right]\frac{\boldsymbol{y}}{y} \qquad [2.9]$$

En el límite, cuando $y \gg a$, se reduce a la forma usual de Coulomb para dos cuerpos pequeños cargados. Pero en las proximidades de la esfera se modifica a causa de la distribución de carga inducida sobre la superficie de la misma. En la figura 2.5 aparece la fuerza como función de la distancia para varios

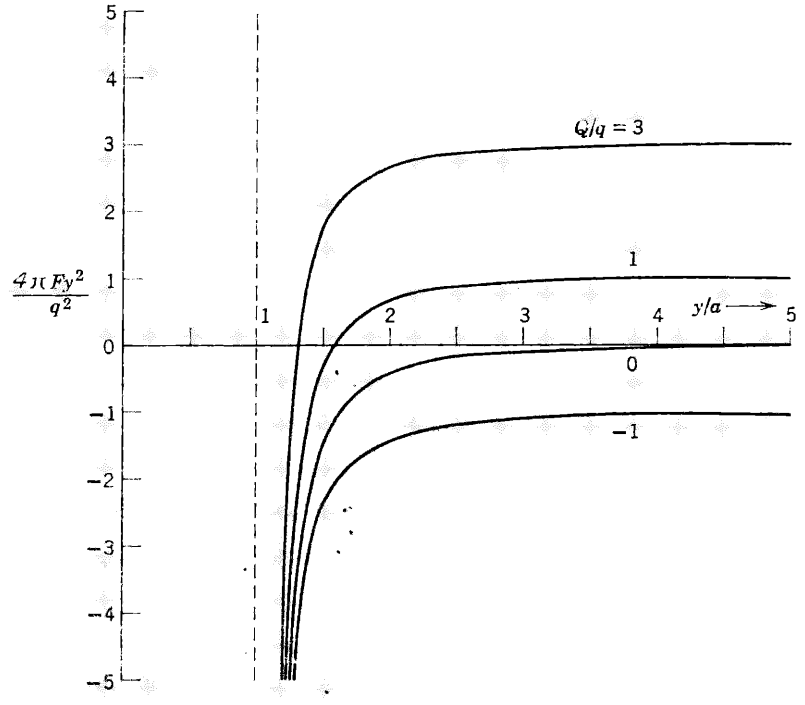


FIG. 2.5. Fuerza ejercida sobre una carga puntual q por una esfera conductora aislada, de radio a y provista de una carga total Q. Los valores positivos significan repulsión; los negativos, atracción. Se ha separado la dependencia asintótica de la fuerza dividiendo F por $q^2/4\pi y^2$, y se ha dibujado este cociente frente a y/a, para $Q/q=-1$, 0, 1 y 3, independientemente del valor de Q, la fuerza es siempre atractiva a distancias pequeñas a causa de la carga inducida.

valores de la relación Q/q. La fuerza se expresa tomando $q^2/4\pi\epsilon_0 y^2$ como unidad; los valores positivos (negativos) corresponden a una repulsión (atracción). Si la esfera está cargada con signo opuesto al de q, o bien si está descargada, la fuerza es atractiva a todas las distancias. Aun si la carga Q es del mismo signo que q, la fuerza llega a hacerse atractiva a distancias muy pequeñas. En el límite en que $Q \gg q$, el punto en que se anula la fuerza (posición de equilibrio inestable) está muy próximo a la esfera, a la distancia $y \simeq a(1+\frac{1}{2}\sqrt{q/Q})$. Obsérvese que el valor asintótico de la fuerza se alcanza

tan pronto como la distancia y se hace unas cuantas veces mayor que el radio de la esfera.

Este ejemplo pone de manifiesto una propiedad general que explica por qué un exceso de carga no abandona inmediatamente la superficie a causa de la repulsión mutua entre las cargas individuales. Tan pronto como un elemento de carga se aleje de la superficie, la carga imagen tiende a atraerlo de nuevo. Desde luego que si se se realiza suficiente trabajo se puede extraer carga de la superficie hasta llevarla al infinito. La función trabajo de un metal en su mayor parte es justamente el trabajo efectuado contra la fuerza atractiva debida a la carga imagen al intentar extraer un electrón de la superficie.

2.4. CARGA PUNTUAL EN PRESENCIA DE UNA ESFERA CONDUCTORA MANTENIDA A POTENCIAL FIJO

Otro problema que puede discutirse fácilmente es el de una carga puntual en las proximidades de una esfera conductora mantenida a potencial fijo V. El potencial es el mismo que para una esfera cargada con la excepción de que la carga $(Q-q')$ en el centro se reemplaza por la carga (Va). Podemos ver esto a partir de [2.8], puesto que para $|\boldsymbol{x}|=a$ los primeros dos términos se compensan y el último será precisamente V en la forma requerida. Así, pues, el potencial es:

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}-\frac{aq}{y\left|\boldsymbol{x}-\frac{a^2}{y^2}\boldsymbol{y}\right|}+\frac{Va}{|\boldsymbol{x}|}\right] \qquad [2.10]$$

La fuerza que sobre la carga q ejerce la esfera a potencial fijo es

$$\boldsymbol{F}=\frac{q}{y^2}\left[Va-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qay^3}{(y^2-a^2)^2}\right]\frac{\boldsymbol{y}}{y} \qquad [2.11]$$

Para valores de Va/q que corresponden a Q/q, la representación gráfica de esta fuerza es muy parecida a la de la figura 2.5, aunque el acercamiento al valor asintótico $(Vaq/4\pi\epsilon_0 y^2)$ es más lento. Para $Va \gg q$ el punto de equilibrio inestable presenta una posición análoga

$$y \simeq a(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{q/Va}).$$

2.5. ESFERA CONDUCTORA EN UN CAMPO ELECTRICO UNIFORME POR EL METODO DE IMAGENES

Como un último ejemplo del método de imágenes consideremos una esfera conductora de radio a en un campo eléctrico uniforme E_0. Un campo uniforme puede imaginarse como producido por cargas positivas y negativas apropiadas y colocadas en el infinito. Por ejemplo, si se tienen dos cargas $\pm Q$, en las posiciones $z=\mp R$, como indica la figura 2.6 *a*, entonces en una región cercana al origen cuyas dimensiones sean muy pequeñas comparadas con R, existe un

campo eléctrico aproximadamente constante $E_0 \simeq 2Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ paralelo al eje z. En el límite cuando R y $Q \to \infty$, manteniéndose Q/R^2 constante, esta aproximación se hace exacta.

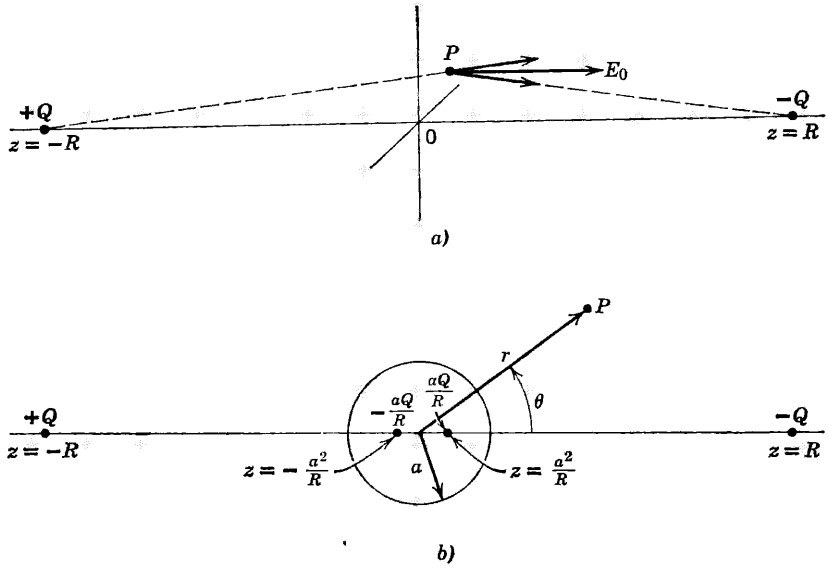


FIG. 2.6. Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme, por el método de imágenes.

Si en estas condiciones colocamos una esfera conductora de radio a en el origen, el potencial será debido a las cargas $\pm Q$ a las distancias $\mp R$ y sus imágenes $\mp Qa/R$ en los puntos $\mp a^2/R$:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{(r^2+R^2+2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{aQ}{R\left(r^2+\frac{a^4}{R^2}+\frac{2a^2r}{R}\cos\theta\right)^{1/2}} + \frac{aQ}{R\left(r^2+\frac{a^4}{R^2}-\frac{2a^2r}{R}\cos\theta\right)^{1/2}}\right] \qquad [2.12]$$

donde Φ se ha expresado en función de la coordenadas esféricas del punto de observación. Por hipótesis, en los dos primeros términos R es mucho mayor que r. Por tanto, podemos desarrollar en serie los radicales después de haber sacado R^2 factor común. De modo análogo, podemos, en el segundo y tercer término, sacar factor común r^2 y luego desarrollar. El resultado es el siguiente:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2Q}{R^2}r\cos\theta + \frac{2Q}{R^2}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta\right] + \ldots \qquad [2.13]$$

donde los términos suprimidos desaparecen en el límite cuando $R \to \infty$. En

este límite $2Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ es el campo uniforme aplicado, así que el potencial es

$$\Phi = -E_0\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta \qquad [2.14]$$

Naturalmente, el primer término $(-E_0 z)$ es precisamente el potencial de un campo uniforme E_0, que se podría haber escrito directamente en lugar de los dos primeros términos de [2.12]. El segundo es el potencial debido a la carga superficial inducida o, lo que es equivalente, a las cargas imagen. Obsérvese que las cargas imagen forman un dipolo de intensidad $D = Qa/R \times 2a^2/R = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$. La densidad superficial de carga inducida es

$$\sigma = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta \qquad [2.15]$$

Observemos que la integral de esta densidad de carga se anula, de modo que aquí no hay diferencia entre una esfera aislada y una esfera conectada a tierra.

2.6. FUNCION DE GREEN PARA LA ESFERA; SOLUCION GENERAL DEL POTENCIAL

En secciones anteriores se discutió por el método de imágenes el problema de una esfera conductora en presencia de una carga puntual.

Como se indicó en la sección 1.10, el potencial debido a una carga de valor $4\pi\epsilon_0$ y su imagen (o imágenes), elegidas de modo que satisfagan las condiciones en el contorno, es precisamente la función de Green [1.43] ó [1.45] adecuada a las condiciones de Dirichlet o Neumann. En $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ la variable $\boldsymbol{x}'$ se refiere a la posición P' de la carga puntual, mientras que la variable $\boldsymbol{x}$ es el punto P en el cual se está calculando el potencial. En la figura 2.7 se representan

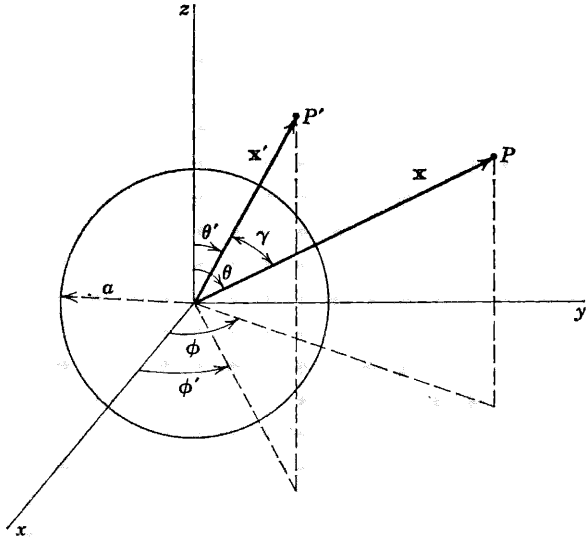


FIG. 2.7.

estas coordenadas y la esfera. Para condiciones de Dirichlet en una esfera de radio a el potencial debido a una carga y su imagen viene dado por [2.1], con las relaciones [2.4]. Transformando adecuadamente las variables, obtenemos la función de Green:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} - \frac{a}{x'\left|\boldsymbol{x}-\frac{a^2}{x'^2}\boldsymbol{x}'\right|} \qquad [2.16]$$

y utilizando coordenadas esféricas, podemos escribir:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{(x^2+x'^2-2xx'\cos\gamma)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\frac{x^2x'^2}{a^2}+a^2-2xx'\cos\gamma\right)^{1/2}} \qquad [2.17]$$

donde γ es el ángulo entre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}'$. La simetría de las variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}'$ es evidente en la expresión [2.17], así como que $G=0$ si alguna de las dos variables $\boldsymbol{x}$ o $\boldsymbol{x}'$ se halla sobre la superficie esférica.

Para la solución [1.44] de la ecuación de Poisson necesitamos no solamente G, sino también $\partial G/\partial n'$. Recordemos que $\boldsymbol{n}'$ es el vector unitario normal hacia fuera del volumen que nos ocupa, es decir, en nuestro caso a lo largo de $\boldsymbol{x}'$ y hacia el origen; así, tenemos

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_{x'=a} = -\frac{(x^2-a^2)}{a(x^2+a^2-2ax\cos\gamma)^{3/2}} \qquad [2.18]$$

(Obsérvese que esta es esencialmente la densidad superficial de carga inducida [2.5].) De aquí que la solución a la ecuación de Laplace *fuera* de la esfera con el potencial especificado en su superficie es, de acuerdo con [1.44],

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \Phi(a, \theta', \phi')\frac{a(x^2-a^2)}{(x^2+a^2-2ax\cos\gamma)^{3/2}}\,d\Omega' \qquad [2.19]$$

donde $d\Omega'$ es el elemento de ángulo sólido en el punto (a, θ', ϕ') y $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi-\phi')$. Para el problema *interior*, la derivada normal está dirigida radialmente hacia fuera, de modo que el signo de $\partial G/\partial n'$ es opuesto al de [2.18]. Esto es equivalente a reemplazar el factor (x^2-a^2) por (a^2-x^2) en [2.19]. Para un problema en el que exista una distribución de carga debemos añadir a [2.19] la integral apropiada de [1.44], con la función de Green [2.17].

2.7. ESFERA CONDUCTORA CON LOS HEMISFERIOS A DIFERENTES POTENCIALES

Como ejemplo de la solución [2.19] para el potencial en el exterior de una esfera con valores preestablecidos del potencial en su superficie, consideraremos una esfera conductora de radio a dividida en dos hemisferios separados por un anillo aislante muy delgado. Cada hemisferio se mantiene a distinto

potencial. Bastará con considerar exclusivamente los potenciales $\pm V$, puesto que dos potenciales arbitrarios pueden tratarse como superposición de la solución para una esfera a potencial fijo sobre toda su superficie. El anillo aislante se halla en el plano $z=0$, tal como se ve en la figura 2.8; el hemisferio superior está al potencial $+V$, y el inferior, al potencial $-V$.

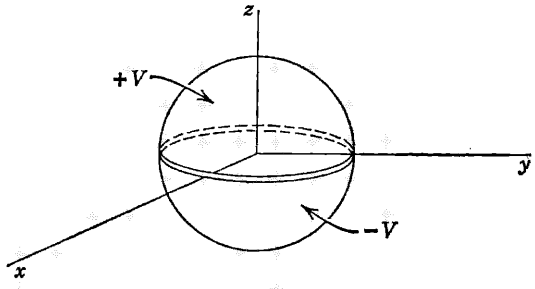


FIG. 2.8.

A partir de [2.19] podemos obtener la solución para $\Phi(x, \theta, \phi)$, que viene dada por la integral

$$\Phi(x, \theta, \phi)=\frac{V}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \left\{ \int_0^1 d(\cos\theta') - \int_{-1}^0 d(\cos\theta') \right\} \frac{a(x^2-a^2)}{(a^2+x^2-2ax\cos\gamma)^{3/2}} \qquad [2.20]$$

Con un cambio adecuado de variables en la segunda integral ($\theta' \to \pi-\theta'$, $\varphi' \to \varphi'+\pi$), puede ponerse bajo la forma:

$$\Phi(x, \theta, \phi)=\frac{Va(x^2-a^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos\theta') \left[(a^2+x^2-2ax\cos\gamma)^{-3/2} - \right.$$
$$\left. -(a^2+x^2+2ax\cos\gamma)^{-3/2}\right] \qquad [2.21]$$

Por depender $\cos\gamma$ de un modo complicado de los ángulos (θ', ϕ') y (θ, ϕ), la ecuación [2.21] no puede en general ser integrada elementalmente.

Como caso especial consideraremos el potencial en el semieje positivo de las z. Entonces $\cos\gamma=\cos\theta'$ por ser $\theta=0$. La integración es elemental, y el potencial que se obtiene es

$$\Phi(z)=V\left[1-\frac{(z^2-a^2)}{z\sqrt{z^2+a^2}}\right] . \qquad [2.22]$$

Para $z=a$, esta expresión da precisamente $\Phi=V$, tal como se había impuesto, y para grandes distancias disminuye asintóticamente como

$$\Phi \simeq 3Va^2/2z^2.$$

Ante la imposibilidad de expresar las integrales en [2.21] por medio de funciones elementales, podemos desarrollar el denominador en serie de potencias y a continuación integrar término a término. Sacando (a^2+x^2) factor co-

mún de cada denominador, tenemos:

$$\Phi(x,\theta,\phi)=\frac{Va(x^2-a^2)}{4\pi(x^2+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^1 d(\cos\theta')\,[(1-2\alpha\cos\gamma)^{-3/2}-(1+2\alpha\cos\gamma)^{-3/2}] \qquad [2.23]$$

donde $\alpha=ax/(a^2+x^2)$. Obsérvese que en el desarrollo de los radicales solamente aparecen las potencias impares de $\alpha\cos\gamma$:

$$[(1-2\alpha\cos\gamma)^{-3/2}-(1+2\alpha\cos\gamma)^{-3/2}]=6\alpha\cos\gamma+35\alpha^3\cos^3\gamma+\ldots \qquad [2.24]$$

Ahora es necesario integrar las potencias impares de $\cos\gamma$ respecto de las diferenciales $d\phi'\,d(\cos\theta')$:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^1 d(\cos\theta')\cos\gamma&=\pi\cos_{,}\theta\\ \int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^1 d(\cos\theta')\cos^3\gamma&=\frac{\pi}{4}\cos\theta\,(3-\cos^2\theta)\end{aligned}\right\} \qquad [2.25]$$

Si [2.24] y [2.25] se sustituyen en [2.23], obtenemos para el potencial la expresión

$$\Phi(x,\theta,\phi)=\frac{3Va^2}{2x^2}\left[\frac{x^3(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^{5/2}}\right]\cos\theta\times\left[1+\frac{35}{24}\frac{a^2x^2}{(a^2+x^2)^2}(3-\cos^2\theta)+\ldots\right] \qquad [2.26]$$

Observemos que, tal como requiere la simetría del problema, solamente aparecen las potencias impares de $\cos\theta$. Si el parámetro del desarrollo fuese (a^2/x^2) en vez de α^2, la serie tomaría la forma

$$\Phi(x,\theta,\phi)=\frac{3Va^2}{2x^2}\left[\cos\theta-\frac{7a^2}{12x^2}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta-\frac{3}{2}\cos\theta\right)+\ldots\right] \qquad [2.27]$$

Para valores grandes de x/a esta serie converge rápidamente y resulta muy útil como representación del potencial. Incluso ya para $x/a=5$ el segundo término de la serie representa solamente el 2 por 100. Es fácil comprobar que, para $\cos\theta=1$, la expresión [2.27] coincide con la [2.22] para el potencial en el eje. (La elección particular de los factores angulares en [2.27] está inspirada en la definición de los polinomios de Legendre. En efecto, los dos factores son $P_1(\cos\theta)$ y $P_3(\cos\theta)$ y el desarrollo del potencial está hecho a base de polinomios de Legendre de orden impar. Estableceremos todo esto sistemáticamente en la sección 3.3.)

2.8. FUNCIONES Y DESARROLLOS ORTOGONALES

Una técnica muy poderosa que se utiliza en muchos problemas de potencial (y, en general, de la Física matemática) es la de representar las soluciones por medio de desarrollos en serie de funciones ortogonales. El conjunto particular de funciones elegido depende de las simetrías, o cuasi simetrías, que aparezcan.

Para recordar las propiedades generales de las funciones ortogonales y de los desarrollos en función de las mismas, consideremos el intervalo (a, b) de la variable ξ, y un conjunto de funciones reales o complejas $U_n(\xi)$, $n=1, 2, \ldots$, ortogonales y de cuadrado integrable en el intervalo (a, b). La condición de ortogonalidad de las funciones $U_n(\xi)$ se expresa así:

$$\int_a^b U_n^*(\xi \mathrm{I} U_m(\xi)\, d\xi = 0, \qquad m \neq n \tag{2.28}$$

Si $n=m$, la integral es no nula. Supondremos que las funciones están normalizadas, así que la integral es la unidad. En estas condiciones se dice que las funciones son *ortonormales* y satisfacen la relación

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi)\, d\xi = \delta_{nm} \tag{2.29}$$

Una función arbitraria $f(\xi)$ de cuadrado integrable en el intervalo (a, b) puede desarrollarse en serie de funciones ortonormales $U_n(\xi)$. Si el número de términos de la serie es finito (por ejemplo, N),

$$f(\xi) \longleftrightarrow \sum_{n=1}^{N} a_n U_n(\xi) \tag{2.30}$$

podemos preguntarnos cuál es la «mejor» elección de coeficientes que nos lleve a la «mejor» representación de la función $f(\xi)$. Si por «mejor» se define los que hagan mínimo el error cuadrático medio M_N:

$$M_N = \int_a^b \left| f(\xi) - \sum_{n=1}^{N} a_n U_n(\xi) \right|^2 d\xi \tag{2.31}$$

es fácil ver que los coeficientes vienen dados (teniendo en cuenta la condición de ortonormalidad [2.29]) por:

$$a_n = \int_a^b U_n^*(\xi) f(\xi)\, d\xi \tag{2.32}$$

Este es el modo usual de calcular los coeficientes en un desarrollo de funciones ortonormales.

Si el número de términos N en la serie [2.30] se hace más y más grande intuimos que nuestra representación por desarrollo será cada vez «mejor». Lo intuido será cierto con tal que nuestro conjunto de funciones ortonormales sea completo. Esto significa que ha de existir un número N_0 finito tal que para todo $N > N_0$ el error cuadrático medio se haga menor que cualquier número positivo pequeño. En estas condiciones se dice que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\xi) = f(\xi) \tag{2.33}$$

con los a_n dados por [2.32] *converge cuadráticamente* a $f(\xi)$. Los físicos, por

lo general, dejan a los matemáticos la difícil tarea de probar la completitud de un conjunto dado de funciones. Normalmente, todos los conjuntos ortonormales de funciones que aparecen en la física matemática se ha demostrado que son completos.

La serie [2.33] puede escribirse explicitando la forma [2.32] de los coeficientes:

$$f(\xi)=\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi')U_n(\xi) \right\} f(\xi')\, d\xi' \qquad [2.34]$$

Como esto representa cualquier función $f(\xi)$ en el intervalo (a, b), está claro que la suma de términos bilineales $U_n^*(\xi')\, U_n(\xi)$ debe existir solamente en las vecindades de $\xi'=\xi$. En efecto, debe suceder que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi')U_n(\xi)=\delta(\xi'-\xi) \qquad [2.35]$$

Esta es la llamada *condición de completitud o clausura.* Es análoga a la condición de ortonormalidad [2.29], con la excepción de que se han intercambiado los papeles de la variable continua ξ y el índice discreto n.

Las funciones ortogonales más conocidas son los senos y cosenos, que dan origen a los desarrollos en series de Fourier. Si el intervalo de x es $(-a/2,\ a/2)$, las funciones ortonormales son:

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi mx}{a}\right), \qquad \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)$$

siendo m un número entero.

Se acostumbra escribir la serie equivalente a [2.33] en la forma:

$$f(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)+B_m\,\text{sen}\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\right] \qquad [2.36]$$

en donde

$$\left.\begin{aligned} A_m&=\frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)dx \\ B_m&=\frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)dx \end{aligned}\right\} \qquad [2.37]$$

Si el intervalo abarcado por el conjunto ortonormal tiene más de una dimensión, las fórmulas [2.28] a [2.33] admiten generalizaciones obvias. Supongamos que el espacio es bidimensional, en el que la variable ξ cambia en el intervalo (a, b) mientras que η lo hace en el intervalo (c, d). Las funciones ortonormales en cada dimensión son $U_n(\xi)$ y $V_m(\eta)$. El desarrollo de una función arbitraria $f(\xi, \eta)$ es, entonces:

$$f(\xi,\eta)=\sum_n\sum_m a_{nm}U_n(\xi)V_m(\eta) \qquad [2.38]$$

en donde

$$a_{nm}=\int_a^b d\xi \int_c^d d\eta\, U_n^*(\xi)V_m^*(\eta)f(\xi,\eta) \qquad [2.39]$$

Si el intervalo (a, b) se hace infinito, el conjunto de funciones ortogonales $U_n(\xi)$ puede llegar a ser un continuo de funciones, en vez de un conjunto numerable. La delta de Kronecker en [2.29] se transforma en la función delta de Dirac. Un ejemplo es la *integral de Fourier*. Partamos del conjunto ortonormal de funciones exponenciales complejas:

$$U_m(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\,e^{i(2\pi mx/a)} \qquad [2.40]$$

$m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, en el intervalo $(-a/2, a/2)$, con el desarrollo:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i(2\pi mx/a)} \qquad [2.41]$$

donde

$$A_m=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-a/2}^{a/2} e^{-i(2\pi mx'/a)}f(x')\,dx' \qquad [2.42]$$

Hagamos que el intervalo crezca hasta hacerse infinito al tiempo que

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2\pi m}{a}\to k \\ &\sum_m \to \int_{-\infty}^{\infty} dm=\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \\ &A_m \to \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,A(k) \end{aligned}\right\} \qquad [2.43]$$

El desarrollo que resulta, equivalente a [2.41], es la integral de Fourier:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}\,dk \qquad [2.44]$$

donde

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)\,dx \qquad [2.45]$$

La condición de ortogonalidad es

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\,dx=\delta(k-k') \qquad [2.46]$$

mientras que la de completitud es

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}\,dk=\delta(x-x') \qquad [2.47]$$

Estas últimas integrales sirven para representar de forma aceptable una función delta. Observemos en [2.44]-[2.47] la equivalencia completa entre las dos variables continuas x y k.

2.9. SEPARACION DE VARIABLES; ECUACION DE LAPLACE EN COORDENADAS CARTESIANAS

Las ecuaciones diferenciales parciales de la Física matemática pueden resolverse con frecuencia en forma conveniente por el método llamado de *separación de variables*. En este proceso se generan frecuentemente conjuntos de funciones ortogonales que resultan de gran utilidad. Se sabe que las ecuaciones diferenciales con el operador laplaciana en tres dimensiones son separables en once tipos diferentes de sistemas de coordenadas (véase MORSE y FESHBACH, páginas 509, 655). Solamente discutiremos detalladamente tres de éstos—cartesianas, esféricas y cilíndricas—y comenzaremos con el estudio de las más sencillas, que son las cartesianas.

La ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas es:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \qquad [2.48]$$

Se puede hallar una solución a esta ecuación en derivadas parciales mediante tres ecuaciones diferenciales ordinarias, todas de la misma forma, suponiendo que puede representarse el potencial como producto de tres funciones, una para cada coordenada:

$$\Phi(x, y, z)=X(x)Y(y)Z(z) \qquad [2.49]$$

Sustituyendo en [2.48] y dividiendo por [2.49] llegamos a:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2}=0 \qquad [2.50]$$

donde se han sustituido las derivadas parciales por derivadas totales, puesto que cada término es función de una sola variable. Si exigimos de [2.50] que se cumpla para valores arbitrarios de las tres coordenadas independientemente, cada término deberá ser por separado una constante:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}&=-\alpha^2\\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}&=-\beta^2\\ \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}&=\gamma^2\end{aligned}\right\} \qquad [2.51]$$

donde

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$$

Si arbitrariamente elegimos que α^2 y β^2 sean positivos, las soluciones de las

tres ecuaciones diferenciales ordinarias [2.51] son $\exp(\pm i\alpha x)$, $\exp(\pm i\beta y)$, $\exp(\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)$. El potencial [2.49] es construible mediante el producto de las tres soluciones:

$$\Phi = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z} \qquad [2.52]$$

Por ahora, α y β son completamente arbitrarias. Por tanto, [2.52], por superposición lineal, representa una clase muy amplia de soluciones de la ecuación de Laplace.

Para determinar α y β hay que imponer al potencial condiciones específicas en el contorno. Consideremos como ejemplo una caja rectangular, colocada como nos indica la figura 2.9, con las dimensiones (a, b, c) en las direc-

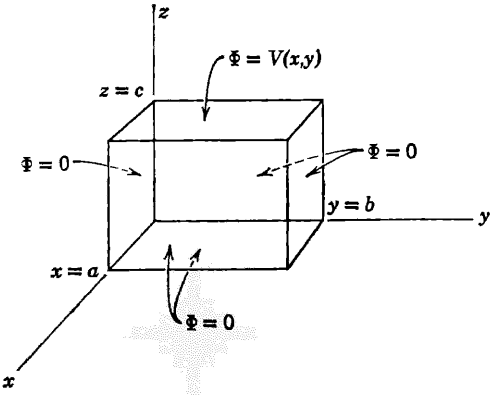


FIG. 2.9. Caja rectangular hueca con cinco de sus caras a potencial cero, mientras que la sexta ($z=c$) tiene el potencial $\Phi=V(x, y)$.

ciones (x, y, z). Todas las superficies de la caja se hallan a potencial cero, con la excepción de la superficie $z=c$, que está al potencial $V(x, y)$. Se pide el potencial en los puntos interiores a la caja. Empezando con la condición de que $\Phi=0$ para $x=0$, $y=0$, $z=0$, se ve fácilmente que las formas adecuadas para X, Y, Z son:

$$\left.\begin{aligned} X &= \operatorname{sen}\alpha x \\ Y &= \operatorname{sen}\beta y \\ Z &= \operatorname{senh}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z) \end{aligned}\right\} \qquad [2.53]$$

Para que sea $\Phi=0$ para $x=a$ e $y=b$, es necesario que $\alpha a=n\pi$ y $\beta b=m\pi$. Con las definiciones:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{n\pi}{a} \\ \beta_m &= \frac{m\pi}{b} \\ \gamma_{nm} &= \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}} \end{aligned}\right\} \qquad [2.54]$$

podemos expresar el potencial parcial Φ_{nm} que satisface todas las condiciones en el contorno excepto una:

$$\Phi_{nm} = \text{sen}\,(\alpha_n x)\,\text{sen}\,(\beta_m y)\,\text{senh}\,(\gamma_{nm} z) \qquad [2.55]$$

El potencial requerido es expresable mediante un desarrollo en serie de funciones Φ_{nm} con valores de los coeficientes inicialmente indeterminados (que se elegirán de tal forma que satisfagan la condición de contorno final):

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\,\text{sen}\,(\alpha_n x)\,\text{sen}\,(\beta_m y)\,\text{senh}\,(\gamma_{nm} z) \qquad [2.56]$$

La única condición en el contorno que queda por satisfacer es $\Phi = V(x, y)$ para $z = c$:

$$V(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\,\text{sen}\,(\alpha_n x)\,\text{sen}\,(\beta_m y)\,\text{senh}\,(\gamma_{nm} c) \qquad [2.57]$$

Esta es precisamente una serie doble de Fourier para la función $V(x, y)$. Por tanto, los coeficientes A_{nm} vienen dados por la expresión

$$A_{nm} = \frac{4}{ab\,\text{senh}\,(\gamma_{nm} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy\, V(x, y)\,\text{sen}\,(\alpha_n x)\,\text{sen}\,(\beta_m y) \qquad [2.58]$$

Si la caja rectangular tiene potenciales diferentes de cero en las seis caras, podemos obtener la solución del potencial en el interior por superposición lineal de seis soluciones equivalentes a [2.56] y [2.58], una para cada cara. La solución a la ecuación de Poisson, es decir, el potencial en el interior de la caja provista de una distribución volúmica de cargas además de las condiciones de contorno en la superficie, requiere además la construcción de una función de Green adecuada de acuerdo con las ecuaciones [1.43] y [1.44]. Aplazaremos la discusión de este asunto hasta haber visto la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas y cilíndricas. Por el momento, señalaremos únicamente que la solución [2.56] y [2.58] es equivalente a la integral de superficie en la expresión [1.44] de la solución mediante la función de Green.

2.10. UN PROBLEMA DE POTENCIAL BIDIMENSIONAL. SUMA DE UNA SERIE DE FOURIER

A continuación, vamos a considerar brevemente la solución por separación de variables de la ecuación de Laplace en dos dimensiones y coordenadas cartesianas. Para nosotros un problema bidimensional es aquel en el cual se puede suponer que el potencial es independiente de una de las coordenadas; por ejemplo, la z. Normalmente, esto es sólo una aproximación, pero que puede ser cierta con gran precisión, como sucede en una línea de transmisión larga y uniforme. Si el potencial es independiente de z, las soluciones básicas de la

sección anterior se reducen a los productos

$$e^{\pm i\alpha x}e^{\pm \alpha y}$$

donde α es cualquier constante real o compleja. La imposición de condiciones de contorno al potencial determinará qué valores de α están permitidos y la forma requerida de la superposición lineal de diferentes soluciones.

En la figura 2.10 se indica un problema sencillo que puede utilizarse para demostrar la técnica de separación de variables y también para establecer la conexión con el uso de las variables complejas. Se desea calcular el potencial

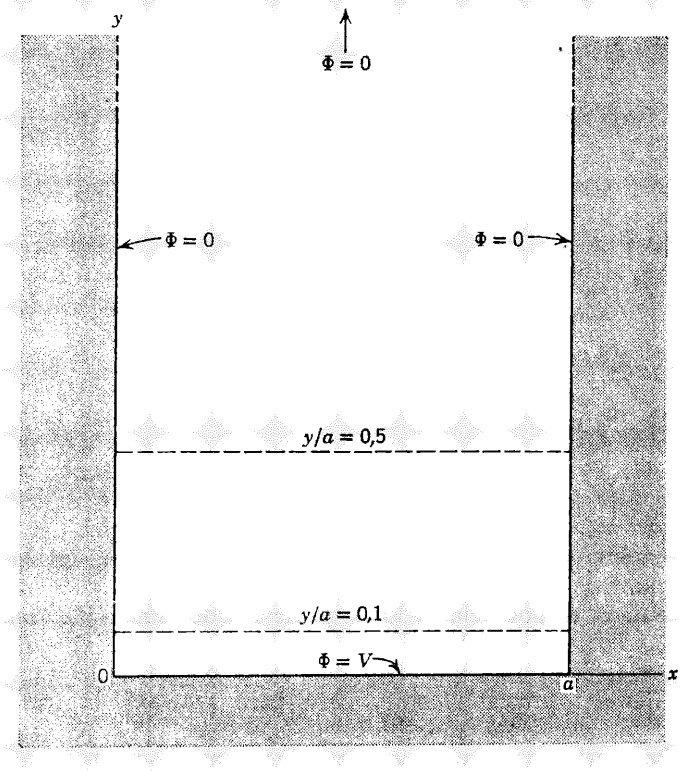


FIG. 2.10. Problema de potencial bidimensional.

en la región $0 \leqslant x \leqslant a$, $y \geqslant 0$, sometido a las condiciones en el contorno de que $\Phi = 0$ para $x = 0$ y para $x = a$, mientras que $\Phi = V$ en $y = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant a$ y $\Phi \to 0$ para valores grandes de y. La inspección de las soluciones básicas muestra que α debe ser real y que las combinaciones lineales apropiadas son $e^{-\alpha y}$ sen (αx), con $\alpha = n\pi/a$, a fin de que el potencial se anule en $x = 0$ y $x = a$ para todo y, así como cuando $y \to \infty$. La combinación lineal de soluciones que satisfacen las condiciones de contorno en tres de las cuatro superficies límite es, pues:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-n\pi y/a) \operatorname{sen}(n\pi x/a) \qquad [2.59]$$

Los coeficientes A_n se determinan mediante el requisito de que $\Phi = V$ para $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$. Como se discutió en la sección 2.8, los coeficientes de Fourier son:

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi(x, 0) \operatorname{sen} (n\pi x/a) \qquad [2.60]$$

Con $\Phi(x, 0) = V$, se encuentra

$$A_n = \frac{4V}{\pi n} \begin{cases} 1 & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

El potencial $\Phi(x, y)$ queda así determinado, y es:

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \exp(-n\pi y/a) \operatorname{sen} (n\pi x/a) \qquad [2.61]$$

Para valores pequeños de y resultan necesarios muchos términos de la serie para dar una aproximación suficiente, pero para $y \geqslant a/\pi$ es evidente que sólo unos pocos de los primeros términos resultan apreciables. El potencial se aproxima rápidamente a su forma asintótica dada por el primer término:

$$\Phi(x, y) \rightarrow \frac{4V}{\pi} \exp(-\pi y/a) \operatorname{sen} (\pi x/a) \qquad [2.62]$$

Indicaremos de paso que este comportamiento general es característico de todos los problemas de condiciones de contorno de este tipo, independientemente de si $\Phi(x, 0)$ es constante o no, siempre que el primer término de la serie no se anule. El coeficiente A_1 dado por [2.60] será diferente, pero el comportamiento suave de la solución asintótica con la variable x aparece para $y \geqslant a$, independientemente de las complejidades de $\Phi(x, 0)$. En la figura 2.11 se muestra cuantitativamente este hecho para el ejemplo que analizamos. En ella se ha dibujado el potencial a lo largo de las dos líneas de trazos, $y/a = 0{,}1$ y 0,5, indicadas en la figura 2.10. Las curvas continuas dan el potencial exacto, las de trazos el primer término [2.62]. En la proximidad del límite ($y/a = 0{,}1$) las curvas difieren apreciablemente, pero para $y/a = 0{,}5$ la forma asintótica constituye ya una excelente aproximación.

Hay muchas series de Fourier que pueden sumarse para dar una respuesta en forma cerrada. La serie [2.61] es una de ellas, y vamos a proceder como sigue: al darnos cuenta de que $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{Im} (e^{i\theta})$, donde Im significa parte imaginaria, podemos escribir [2.61] en la forma:

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} e^{(in\pi/a)(x+iy)}$$

A su vez, definiendo

$$Z = e^{(i\pi/a)(x+iy)} \qquad [2.63]$$

puede escribirse en la forma sugestiva:

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n \text{ impar}} \frac{Z^n}{n}$$

En este punto, posiblemente recordemos la serie *:

$$\ln(1+Z)=Z-\frac{1}{2}Z^2+\frac{1}{3}Z^3-\frac{1}{4}Z^4+\ldots$$

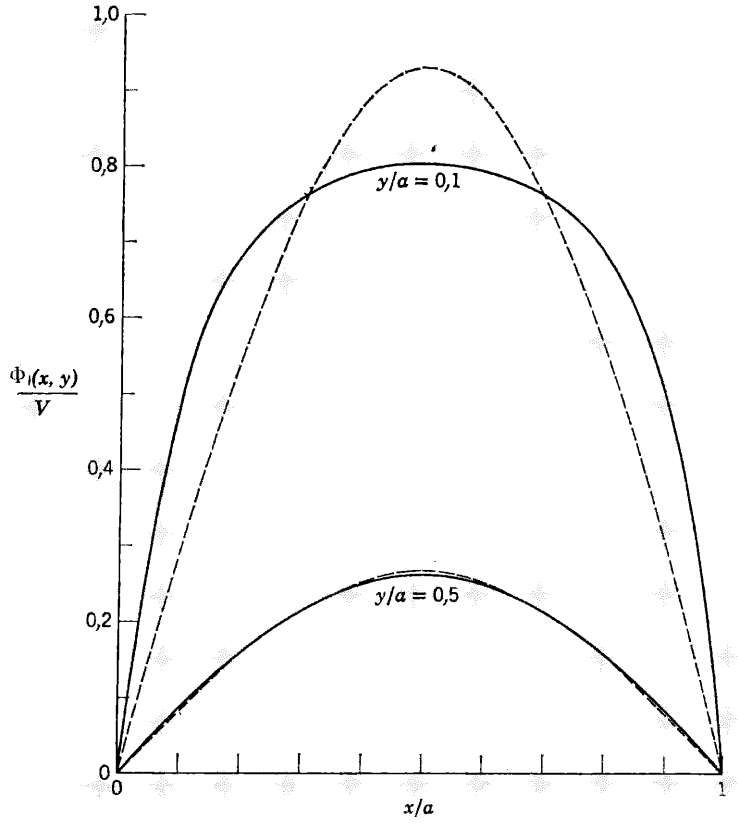


FIG. 2.11. Potenciales a lo largo de las líneas de trazos indicadas en la figura 2.10 (para valores de $y/a=0{,}1$ y $0{,}5$) en función de x/a. Las curvas continuas corresponden a la solución exacta; las curvas de trazos al primer término del desarrollo en serie [2.61].

* Alternativamente, observemos que

$$(d/dz)\left(\sum_{n=1}^{\infty} Z^n/n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} Z^n=1/(1-Z).$$

Al integrar se obtiene entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Z^n/n)=-\ln(1-Z).$$

Evidentemente,

$$\sum_{n\,\text{impar}} \frac{Z^n}{n} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$$

y

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{Im}\left[\ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)\right] \qquad [2.64]$$

Como la parte imaginaria de un logaritmo es igual a la fase de su argumento, consideramos:

$$\frac{1+Z}{1-Z} = \frac{(1+Z)(1-Z^*)}{|1+Z|^2} = \frac{1-|Z|^2+2i\,\operatorname{Im} Z}{|1-Z|^2}$$

La fase del argumento del logaritmo es, pues, $\tan^{-1}(2\,\operatorname{Im} Z/[1-|Z|^2])$. Sustituyendo el valor de Z [2.63], se encuentra que el potencial se convierte en:

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{a}}{\operatorname{senh}\dfrac{\pi y}{a}}\right) \qquad [2.65]$$

La rama de la curva tangente corresponde al ángulo de valor comprendido entre 0 y $\pi/2$. La serie infinita [2.61] se ha transformado en la forma explícita [2.65]. El lector puede comprobar que se satisfacen las condiciones de contorno y que la forma asintótica [2.62] surge de manera sencilla.

El potencial [2.64], con Z dada por [2.63], está relacionado de modo obvio con funciones de variable compleja. Esta relación es consecuencia directa del hecho de que la parte real, o la imaginaria, de una función analítica satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones como resultado de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Como ya se mencionó al principio del capítulo, omitimos la discusión de las técnicas de variable compleja no porque no sean importantes, sino por falta de espacio y porque en otros textos figuran tratamientos perfectamente adecuados. Algunas de estas fuentes están relacionadas al final del capítulo. Los métodos de sumar series de Fourier, con muchos ejemplos, se describen en COLLIN, Apéndice A.6.

2.11. CAMPOS Y DENSIDADES DE CARGA EN VERTICES BIDIMENSIONALES Y A LO LARGO DE ARISTAS

En muchas situaciones prácticas las superficies conductoras se juntan de un modo que puede describirse aproximadamente, al menos en pequeña escala, como la intersección de dos planos. Las aristas de la caja dibujada en la figura 2.9 son un ejemplo, los vértices en $x=0$, $y=0$ y $x=a$, $y=0$ en la figura 2.10, otro. Es útil, pues, entender cómo se comportan el potencial, los campos y las densidades de carga en las proximidades de tales «vértices» o aristas. Supondremos que están perfectamente cortados, de modo que podemos verlos desde tan cerca que el comportamiento de los campos esté determinado en forma funcional únicamente por las propiedades del «vértice» considerado y no por los detalles de la configuración completa.

La situación general en dos dimensiones se indica en la figura 2.12. Dos planos conductores se cortan formando un ángulo β. Se supone que los planos se mantienen al potencial V. Lejos del origen, y no dibujados en la figura, existen otros conductores, o, posiblemente, distribuciones de carga, que determinan el problema de potencial de modo unívoco. Como estamos interesados en la conducta funcional de los campos, etc., cerca del origen, pero no en sus valores absolutos, dejaremos sin especificar el comportamiento en puntos alejados en tanto sea posible.

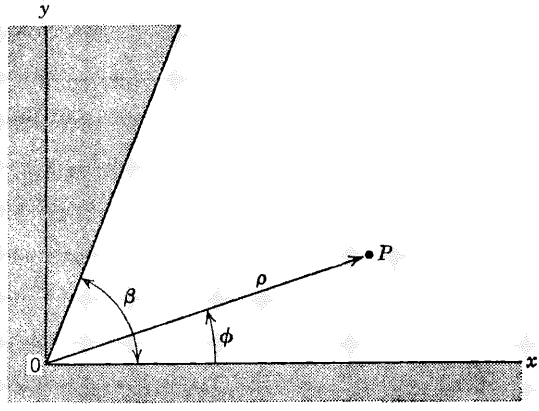


FIG. 2.12. Intersección de dos planos conductores que forman un ángulo en dos dimensiones de abertura β.

La geometría indicada en la figura 2.12 sugiere el empleo de coordenadas polares en vez de cartesianas. La ecuación de Laplace en dos dimensiones, utilizando coordenadas polares (ρ, ϕ), es:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0 \qquad [2.66]$$

Para usar el método de separación de variables, sustituimos:

$$\Phi(\rho, \phi)=R(\rho)\Psi(\phi)$$

Después de multiplicar por ρ^2/Φ, esta ecuación conduce a:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2}=0 \qquad [2.67]$$

Como de los dos términos uno depende de ρ y el otro de ϕ por separado, cada uno de ellos debe ser constante:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)=\nu^2; \qquad \frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2}=-\nu^2 \qquad [2.68]$$

Las soluciones de estas ecuaciones son:

$$\left.\begin{aligned} R(\rho)&=a\rho^{\nu}+b\rho^{-\nu} \\ \Psi(\phi)&=A\cos(\nu\phi)+B\,\text{sen}\,(\nu\phi)\end{aligned}\right\} \qquad [2.69]$$

Para el caso especial en que $\nu=0$, las soluciones son:

$$\left.\begin{aligned} R(\rho)&=a_0+b_0\ln\rho \\ \Psi(\phi)&=A_0+B_0\phi \end{aligned}\right\} \qquad [2.70]$$

Estos son los bloques básicos con los que vamos a construir el potencial por superposición lineal.

Aunque para nuestro presente propósito no es clave, damos la solución general de la ecuación de Laplace en dos dimensiones cuando el ángulo acimutal puede variar en todo su margen, como, por ejemplo, el potencial entre dos superficies cilíndricas, de radios $\rho=a$ y $\rho=b$, sobre las cuales se da el potencial como una función de ϕ. Si no existe restricción alguna sobre ϕ, es necesario que ν sea cero, o un entero positivo o negativo, a fin de que el potencial sea unívoco. Además, por la misma razón, cuando $\nu=0$, la constante B_0 de [2.70] debe anularse. La solución general es, pues, de la forma:

$$\Phi(\rho,\phi)=a_0+b_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho^n\operatorname{sen}(n\phi+\alpha_n)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\rho^{-n}\operatorname{sen}(n\phi+\beta_n) \qquad [2.71]$$

Si en el volumen en que no existen cargas está incluido el origen, todas las b_n son cero. Sólo aparecen potencias positivas de ρ y una constante. Si está excluido el origen, las b_n pueden ser distintas de cero. En particular, el término logarítmico es equivalente a una línea cargada en el eje con densidad de carga por unidad de longitud $\lambda=-b_0/2$, como es bien sabido.

Para la situación descrita en la figura 2.12, el ángulo acimutal está limitado al intervalo $0\leqslant\phi\leqslant\beta$. Las condiciones de contorno son que $\Phi=V$ para todo $\rho\geqslant 0$ cuando $\phi=0$ y cuando $\phi=\beta$. Esto requiere que $b_0=B_0=0$ en [2.70], y que $b=0$ y $A=0$ en [2.69]. Además, requiere también que ν se elija de modo que resulte $\operatorname{sen}(\nu\beta)=0$. Por tanto:

$$\nu=\frac{m\pi}{\beta}, \qquad m=1,2,\ldots$$

y la solución general se convierte en:

$$\Phi(\rho,\phi)=V+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\rho^{m\pi/\beta}\operatorname{sen}(m\pi\phi/\beta) \qquad [2.72]$$

Los coeficientes a_m, que aún están indeterminados, dependen del potencial a grandes distancias del vértice $\rho=0$. Como en la serie aparecen únicamente potencias positivas de $\rho^{\pi/\beta}$, para valores suficientemente pequeños de ρ sólo tendrá importancia el primer término de la serie *. Así, pues, *cerca de* $\rho=0$, el potencial es, aproximadamente,

$$\Phi(\rho,\phi)=V+a_1\rho^{\pi/\beta}\operatorname{sen}(\pi\phi/\beta) \qquad [2.73]$$

* Aquí hemos de hacer una hipótesis necesaria sobre las condiciones de contorno remotas, a saber, que son tales que el coeficiente a es distinto de cero. Ordinariamente esto no tiene importancia, pero hay casos especiales con simetría tal que a_1, e incluso a_2, etc., se anulan. Tales casos, poco usuales, deben tratarse aparte.

Los componentes del campo eléctrico son

$$\left.\begin{aligned} E_\rho(\rho, \phi) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \simeq -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{(\pi/\beta)-1} \operatorname{sen}(\pi\phi/\beta) \\ E_\phi(\rho, \phi) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \simeq -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{(\pi/\beta)-1} \cos(\pi\phi/\beta) \end{aligned}\right\} \quad [2.74]$$

Las densidades superficiales de carga para $\phi = 0$ y para $\phi = \beta$ son iguales y valen aproximadamente:

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E_\phi(\rho, 0) = -\pi\epsilon_0 \frac{a_1}{\beta} \rho^{(\pi/\beta)-1} \quad [2.75]$$

Tanto las componentes del campo como la densidad superficial de carga varían, cerca de $\rho = 0$, con la distancia como $\rho^{(\pi/\beta)-1}$. Esta dependencia con ρ se indica en la figura 2.13 en algunos casos especiales. Para un rincón muy

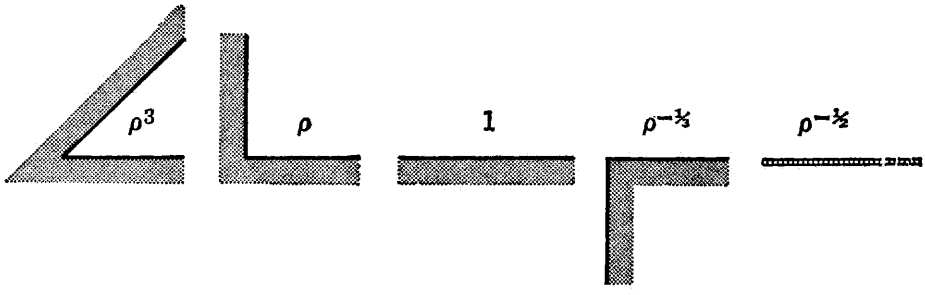


FIG. 2.13. Variación de la densidad de carga superficial (y del campo eléctrico) con la distancia ρ al rincón o arista para valores del ángulo de abertura $\beta = \pi/4,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ y 2π.

estrecho (β pequeño) la potencia de ρ resulta ser muy grande. Esencialmente no se acumula carga alguna en tal rincón. Cuando $\beta = \pi$ (una superficie plana), las magnitudes del campo resultan independientes de ρ, como es obvio de modo intuitivo. Cuando $\beta > \pi$, el vértice bidimensional se hace convexo y el campo y la densidad superficial de carga se hacen singulares cuando $\rho \to 0$. Cuando $\beta = 2\pi$ (el borde de una hoja delgada) la singularidad es de la forma $\rho^{-1/2}$. Esta es aún integrable, de modo que la carga dentro de una distancia finita a la arista es finita, pero implica que la intensidad del campo se hace muy grande en los bordes de las placas conductoras (de hecho, esto ocurre para cualquier configuración en la que $\beta > \pi$).

Las anteriores consideraciones electrostáticas bidimensionales se aplican a muchas situaciones tridimensionales, aun con campos variables con el tiempo. Si el borde es una arista aguda de longitud finita, como la arista de un cubo lejos de los vértices, entonces para puntos suficientemente próximos a la arista puede despreciarse la variación del potencial a lo largo de la misma arista. Resultan aplicables las consideraciones bidimensionales, aunque el coeficiente a_1 de [2.75] puede variar con la distancia a lo largo de la arista. Análogamente, los argumentos electrostáticos son válidos también para campos variables con el tiempo. Un punto importante es que con dependencia temporal interviene otra longitud, a saber, la longitud de onda. Suponiendo que estamos interesados en distancias de la arista que son pequeñas comparadas con la

longitud de onda, así como con otras distancias características, la conducta de los campos se reduce al comportamiento electrostático o magnetostático. En la difracción de microondas por un orificio en una lámina conductora delgada, por ejemplo, los campos son singulares como $\rho^{-1/2}$ cuando $\rho \to 0$, siendo ρ la distancia desde el borde del orificio, y este hecho debe ser tenido en cuenta en cualquier solución exacta del problema de la difracción.

La conducta singular de los campos cerca de aristas es la razón de la efectividad de los pararrayos. En la situación idealizada que hemos discutido aquí la intensidad del campo crece sin límite cuando $\rho \to 0$, pero para una lámina delgada de espesor d con una arista redondeada suavemente puede inferirse que la intensidad del campo en la superficie será proporcional a $d^{-1/2}$. Para valores de d suficientemente pequeños puede ser muy grande. En el vacío absoluto tales intensidades del campo resultan posibles, pero en el aire hay ruptura eléctrica y se produce una descarga si la intensidad del campo excede de un cierto valor (que depende de la forma exacta del electrodo, su proximidad a los otros electrodos, etc., pero que es mayor de unos $2{,}5 \times 10^6$ V/m para el aire en condiciones normales de presión y temperatura, algunas veces incluso en un factor de cuatro). En las tormentas, cuando aparecen grandes diferencias de potencial entre el suelo y las nubes tormentosas, una arista, o mejor, una punta (véase la sección 3.4) conductora unida a tierra dará lugar en primer lugar a una descarga a su alrededor y entonces proporcionará uno de los extremos del camino conductor zigzagueante a través del aire a lo largo del cual viaja la descarga luminosa (rayo).

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

El método de las imágenes, y la técnica de inversión con él relacionada, se tratan en muchos libros; entre las discusiones mejores o más extensas están las de:

JEANS, cap. VIII.
MAXWELL, vol. I, cap. XI.
SMYTHE, caps. IV y V.

La utilización clásica de la inversión por LORD KELVIN en 1847 para obtener la distribución de carga en las superficies interior y exterior de una copa esférica delgada conductora y cargada se discute en

KELVIN, pág. 186.
JEANS, págs. 250-251.

Una fuente verdaderamente enciclopédica de ejemplos de todas clases con numerosos diagramas es el libro de

DURAND, especialmente caps. III y IV. El problema de la inversión se trata en las págs. 107-114.

Las técnicas de variable compleja y la representación conforme para la solución de problemas de potencial bidimensionales se tratan en:

DURAND, cap. X.
JEANS, cap. VIII, secciones 306-337.
MAXWELL, vol. I, cap. XII.
MORSE y FESHBACH, págs. 443-453, 1215-1252.
SMYTHE, cap. IV, secciones 4.09-4.31.
THOMSON, cap. 3.

Además, existen muchos libros de ingeniería dedicados al tema. Por ejemplo:

GIBBS.
ROTHE, OLLENDORF y POLHAUSEN.

Discusiones elementales pero claras de la teoría matemática de las series e integrales de Fourier, y desarrollos en serie de funciones ortogonales, se pueden hallar en:

CHURCHILL.
HILDEBRAND, cap. 5.

Un tratamiento algo antiguado de las series e integrales de Fourier, pero con muchos ejemplos y problemas es el de:

BYERLY.

PROBLEMAS

2.1. Se lleva una carga puntual q a un punto situado a una distancia d de un plano conductor infinito mantenido a potencial cero. Utilizando el método de imágenes, hállese:

a) La densidad superficial de carga inducida en el plano, y represéntesela.
b) La fuerza entre el plano y la carga mediante la ley de Coulomb aplicada a la fuerza entre la carga y la imagen.
c) La fuerza total que actúa sobre el plano por integración de $\sigma^2/2\epsilon_0$ sobre todo él.
d) El trabajo necesario para llevar la carga q desde su posición al infinito.
e) La energía potencial entre la carga q y su imagen [compárese la respuesta con *d)* y discútase.]
f) Dése la respuesta *d)* en electrón-voltios para un electrón que originalmente esté a un angstrom de la superficie.

2.2. Mediante el método de imágenes, discútase el problema de una carga puntual q en el *interior* de una esfera conductora hueca conectada a tierra, de radio interior a. Hállese:

a) El potencial en el interior de la esfera.
b) La densidad de carga superficial inducida.
c) Módulo y dirección de la fuerza que actúa sobre q.

¿Hay algún cambio en la solución si la esfera se mantiene a potencial fijo V? ¿Y si la esfera tiene una carga total Q sobre sus superficies interior y exterior?

2.3. Considérese el problema del potencial en el semiespacio determinado por $z \geqslant 0$, con condiciones de contorno de Dirichlet sobre el plano $z=0$ (y en el infinito):

a) Exprésese la función de Green $G(x, x')$ adecuada.
b) Si en el plano $z=0$ se especifica que el potencial es $\Phi=V$ en el interior de un círculo de radio a con centro en el origen, y $\Phi=0$ en el exterior del mismo, hállese una expresión integral del potencial en el punto P dado por sus coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z).
c) Demuéstrese que a lo largo del eje del círculo ($\rho=0$) el potencial viene dado por

$$\Phi = V\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

d) Pruébese que a grandes distancias ($\rho^2+z^2 \gg a^2$) se puede desarrollar el potencial en serie de potencias de $(\rho^2+z^2)^{-1}$, y que los términos principales son:

$$\Phi=\frac{Va^2}{2}\,\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\left[1-\frac{3a^2}{4(\rho^2+z^2)}+\frac{5(3\rho^2a^2+a^4)}{8(\rho^2+z^2)^2}+\ldots\right]$$

Compruébese que los resultados *c)* y *d)* son compatibles uno con el otro en su zona de validez común.

2.4. Un problema de potencial bidimensional consiste en dos líneas rectas paralelas y cargadas con densidades iguales y opuestas λ y $-\lambda$, separadas por una distancia R.

a) Demuéstrese por construcción directa que la superficie de potencial constante V es un cilindro circular (circunferencia en el plano transversal) y hállense las coordenadas del eje del cilindro y su radio en función de R, λ y V.

b) Utilícense los resultados de la parte *a)* para demostrar que la capacidad por unidad de longitud C de dos conductores cilíndricos, con radios a y b, separados por una distancia $d > a+b$, es

$$C=\frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{d^2-a^2-b^2}{2ab}\right)}$$

c) Verifíquese que este resultado está de acuerdo con la respuesta del problema 1.7, tomando el límite apropiado, y determínese la corrección del orden siguiente no nulo en las potencias de a/d y b/d.

d) Repítase el cálculo de la capacidad por unidad de longitud para dos cilindros uno dentro del otro ($d < |b-a|$). Compruébese el resultado para cilindros concéntricos ($d=0$).

2.5. Se tiene una capa esférica conductora aislada, de radio a, en un campo eléctrico uniforme E_0. Si dividimos la esfera en dos hemisferios mediante un plano perpendicular al campo, hállese la fuerza necesaria para evitar la separación de los mismos.

a) Si la esfera está descargada.

b) Si la carga total sobre la esfera es Q.

2.6. Se construye un gran condensador de placas planoparalelas con dos láminas conductoras planas, una de las cuales presenta una pequeña protuberancia semiesférica de radio a en su cara interior. El conductor con dicha protuberancia se mantiene a potencial cero y el otro a un potencial tal que, lejos de abultamiento, el campo eléctrico entre las placas es E_0.

a) Calcúlense las densidades superficiales de carga en un punto arbitrario sobre el plano y sobre la protuberancia, y represéntese su comportamiento en función de la distancia (o ángulo).

b) Demuéstrese que la carga total sobre la protuberancia es $3\pi\epsilon_0E_0a^2$.

c) Si en lugar de la otra lámina conductora a distinto potencial se coloca una carga puntual q exactamente sobre la protuberancia semiesférica a una distancia d de su centro, demuéstrese que la carga inducida en la misma es

$$q'=-q\left[1-\frac{d^2-a^2}{d\sqrt{d^2+a^2}}\right]$$

2.7. Una línea cargada con densidad lineal de carga τ se coloca paralelamente y a una distancia R del eje de un cilindro conductor de radio b que se mantiene a un potencial fijo tal que el potencial se anula en el infinito. Hállese:

a) La magnitud y posición de la(s) carga(s) imagen.

b) El potencial en un punto cualquiera (expresado en coordenadas polares con origen en el eje del cilindro y la recta que va desde el origen a la línea cargada como eje x), incluyendo la forma asintótica a que se tiende lejos del cilindro.

c) La densidad superficial de carga inducida, y representarla en función del ángulo para $R/b=2$, 4, tomando como unidad $\tau/2\pi b$.

d) La fuerza ejercida sobre la carga.

2.8. Partiendo de la solución mediante desarrollo en serie [2.71] para el problema de potencial bidimensional en el que se especifica el potencial sobre la superficie de un cilindro de radio b, calcúlense los coeficientes formalmente, sustitúyaselos en la serie y súmese ésta para obtener el potencial en el *interior* del cilindro en forma de una integral de Poisson:

$$\Phi(\rho, \phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(b, \phi')\,\frac{b^2-\rho^2}{b^2+\rho^2-2b\rho\cos(\phi'-\phi)}\,d\phi'$$

¿Qué modificación sería necesaria si se desea el potencial en la región del espacio comprendida entre el cilindro y el infinito?

2.9. *a)* Las dos mitades de un conductor cilíndrico largo de radio b están separadas por una pequeña ranura y mantenidas a distintos potenciales V_1 y V_2. Demuéstrese que el potencial en el interior viene dado por

$$\Phi(r, \theta)=\frac{V_1+V_2}{2}+\frac{V_1-V_2}{\pi}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2br}{b^2-r^2}\cos\theta\right)$$

siendo θ el ángulo medido desde la perpendicular al plano que pasa por la ranura.

b) Calcúlese la densidad superficial de carga en cada mitad del cilindro.

2.10. Una variante del problema bidimensional anterior es un cilindro conductor largo y hueco de radio b que está dividido en cuatro partes, de modo que cada uno de los segmentos se mantienen alternadamente a potenciales $+V$ y $-V$.

a) Mediante el desarrollo en serie [2.71] obténgase la solución y demuéstrese que el potencial en el interior del cilindro es

$$\Phi(\rho, \phi)=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{b}\right)^{4n+2}\frac{\mathrm{sen}\,[(4n+2)\phi]}{2n+1}$$

b) Súmese la serie y demuéstrese que:

$$\Phi(\rho, \phi)=\frac{2V}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2\rho^2b^2\,\mathrm{sen}\,2\phi}{b^4-\rho^4}\right)$$

c) Hágase un esquema de las líneas del campo y las equipotenciales.

2.11. *a)* Utilícese el método de las imágenes para demostrar que la función de Green tipo Dirichlet bidimensional del problema exterior de un cilindro de radio b es:

$$G(\rho, \phi;\, \rho', \phi')=\ln\left[\frac{b^4+\rho^2\rho'^2-2b^2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}{b^2[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')]}\right]$$

$$=\ln\left[\frac{(\rho^2-b^2)(\rho'^2-b^2)+b^2|\rho-\rho'|^2}{b^2|\rho-\rho'|^2}\right]$$

donde ρ y ρ' son los vectores posición en el plano.

b) Empléese esta función de Green para verificar la solución del problema 1.7.

c) ¿Qué modificaciones, en su caso, se necesitan para el problema anterior?

2.12. *a)* Utilícese la función de Green del problema 2.11 y la solución [1.44] para obtener en forma de integral de Poisson (véase problema 2.8) la solución para el problema de Dirichlet en el círculo.

b) Utilícese el teorema de Cauchy para deducir la solución en forma de integral de Poisson. El teorema de Cauchy dice que si $F(z)$ es analítica en una región R rodeada por una curva cerrada C, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(z')\,dz'}{z'-z} = \begin{cases} F(z) & \text{en el interior} \\ 0 & \text{en el exterior} \end{cases} \quad \text{si } z \text{ está de } R$$

Ayuda: Se puede añadir una integral que se anula (asociada con el punto imagen) a la integral correspondiente al punto dentro del círculo.

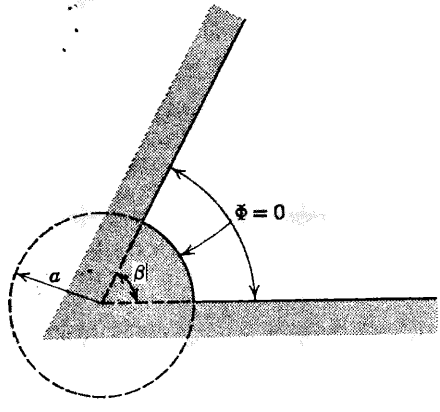
2.13. Las paredes de un cubo hueco conductor están definidas por los seis planos $x=y=z=0$ y $x=y=z=a$. Las paredes $z=0$ y $z=a$ se mantienen a potencial constante V; las otras cuatro se mantienen a potencial cero.

a) Hállese el potencial $\Phi(x, y, z)$ en un punto cualquiera interior al cubo.

b) Calcúlese numéricamente el potencial en el centro del cubo, con un grado de precisión de tres cifras significativas. ¿Cuántos términos de la serie son necesarios para obtener este grado de exactitud? Compárense los resultados numéricos con el valor medio del potencial sobre las paredes. Véase el problema 2.16.

c) Hállese la densidad superficial de carga sobre la superficie $z=a$.

2.14. La región bidimensional, $\rho \geqslant a$, $0 \leqslant \phi \leqslant \beta$, está limitada por superficies conductoras, en $\phi=0$, $\rho=a$ y $\phi=\beta$, que se mantienen a potencial cero, como se indica en la figura. Para valores de ρ grandes el potencial está determinado por cierta configuración de cargas y/o conductores a potenciales fijos.



PROBLEMA 2.14.

a) Descríbase una solución para el potencial $\Phi(\rho, \phi)$ que satisfaga las condiciones de contorno para valores finitos de ρ.

b) Conservando únicamente los términos más bajos que no se anulan, calcúlense las componentes E_ρ y E_ϕ del campo eléctrico, así como las densidades superficiales de carga en las tres superficies que forman el contorno, $\sigma(\rho, 0)$, $\sigma(\rho, \beta)$ y $\sigma(a, \phi)$.

c) Considérese el caso $\beta=\pi$ (un plano conductor con un semicilindro de radio a sobre él). Demuéstrese que lejos del semicilindro los términos de menor orden de *b)* dan lugar a un campo eléctrico uniforme normal al plano. Dibújese la densidad de carga sobre el cilindro y en sus proximidades. Cuando la intensidad del campo eléctrico lejos del plano esté dada, demuéstrese que la carga total sobre el semicilindro (en la realidad, carga por unidad de longitud en la dirección z) es doble de la que aparecería sobre una banda de anchura $2a$ en ausencia del cilindro. Demuéstrese que la carga extra se saca de las regiones del plano inmediatas, de modo que la carga total en una banda de anchura grande comparada con a es la misma si está el cilindro que si no está.

2.15. Considérese la región bidimensional en forma de cuña del problema 2.14, con $\beta=2\pi$. Esto corresponde a una lámina delgada semiinfinita conductora situada a lo largo del eje x, desde $x=a$ hasta el infinito, con un cilindro de radio a, también conductor, unido a su borde.

a) Dibújense las densidades superficiales de carga, sobre el cilindro y sobre las caras superior e inferior de la lámina, usando la aproximación de menor orden.

b) Calcúlese la carga total sobre el cilindro y compárese con la carga total que falta sobre la lámina en las proximidades del cilindro; esto es, la diferencia total entre la carga cuando a es finita comparada con la carga $a=0$, suponiendo que la densidad de carga lejos del cilindro es la misma.

2.16. Un volumen está cerrado por superficies conductoras que son las n caras de un poliedro regular ($n=4$, 6, 8, 12, 20). Las n superficies están a potenciales diferentes V_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Demuéstrese de la forma más sencilla que se pueda que el potencial en el centro del poliedro es la media del potencial sobre las n caras. Este problema conduce al problema 2.12, *b)*, y tiene una interesante semejanza con el resultado del problema 1.10.

$$\cosh = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

PROBLEMAS DE CONDICIONES DE CONTORNO EN ELECTROSTATICA: II

Continuaremos en este capítulo la discusión de los problemas con condiciones en el contorno. En primer lugar consideraremos las geometrías esférica y cilíndrica, y representaremos la solución a la ecuación de Laplace mediante desarrollos en serie de funciones ortonormales adecuadas a cada caso.

De las soluciones de las diferentes ecuaciones diferenciales ordinarias, obtenidas por separación de variables en la ecuación de Laplace, sólo se dan las líneas generales, pero se presenta un resumen adecuado de las propiedades de las diferentes funciones.

El problema de construcción de funciones de Green mediante funciones ortonormales surge de modo natural al intentar resolver la ecuación de Poisson en las diferentes geometrías. Se obtienen ejemplos explícitos de funciones de Green y se aplican a problemas específicos, discutiendo la equivalencia de los diferentes procedimientos de abordar los problemas de potencial.

3.1. LA ECUACION DE LAPLACE EN COORDENADAS ESFERICAS

En las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), indicadas en la figura 3.1, la ecuación de Laplace puede escribirse en la forma:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0 \qquad [3.1]$$

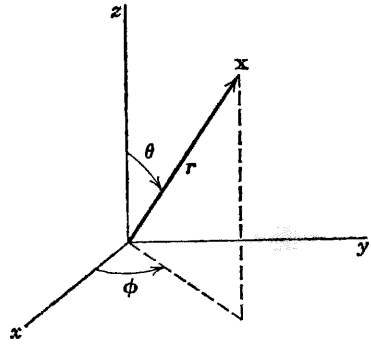


FIG. 3.1.

Y si suponemos una forma factorizada para el potencial, podemos escribirlo:

$$\Phi=\frac{U(r)}{r}P(\theta)Q(\phi) \qquad [3.2]$$

Que sustituyendo en [3.1] da lugar a la ecuación:

$$PQ\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{UQ}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\frac{UP}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{d^2Q}{d\phi^2}=0$$

Si multiplicamos por $r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta/UPQ$, obtenemos:

$$r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\left[\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta P}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right]+\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2}=0 \qquad [3.3]$$

La dependencia de la ecuación en ϕ ha quedado así aislada en el último término, el cual, por tanto, ha de ser una constante que llamaremos $-m^2$:

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2}=-m^2 \qquad [3.4]$$

Esta ecuación tiene como soluciones:

$$Q=e^{\pm im\phi} \qquad [3.5]$$

Para que Q esté definida de modo unívoco, si el acimut puede tomar cualquier valor, m debe ser un entero. Procediendo de un modo análogo, obtenemos ecuaciones separadas para $P(\theta)$ y $U(r)$:

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\right]P=0 \qquad [3.6]$$

$$\frac{d^2U}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}U=0 \qquad [3.7]$$

donde $l(l+1)$ es otra constante real.

La forma de la ecuación radial sugiere que puede satisfacerse con una sola potencia de r (sin que sea necesaria una serie de potencias). La solución general es:

$$U=Ar^{l+1}+Br^{-l} \qquad [3.8]$$

pero l está todavía sin determinar.

3.2. LA ECUACION DE LEGENDRE Y LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

Se acostumbra representar la ecuación en θ para $P(\theta)$ en función de la variable $x=\cos\theta$. Entonces toma la forma:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0 \qquad [3.9]$$

Esta ecuación se conoce como ecuación generalizada de Legendre y sus soluciones son las funciones asociadas de Legendre. Antes de considerar [3.9] obtendremos una solución por desarrollo en serie de potencias de la ecuación diferencial de Legendre ordinaria con $m^2=0$:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+l(l+1)P=0 \qquad [3.10]$$

Suponemos que en la región de interés está incluido el margen de valores completo de $\cos\theta$, incluidos los correspondientes a los polos norte y sur. La solución deseada ha de ser de un solo valor, finita y continua en el intervalo $-1\leqslant x\leqslant 1$, para que represente un potencial físico. Supondremos de antemano la solución representable por una serie de potencias de la forma:

$$P(x)=x^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}a_j x^j \qquad [3.11]$$

donde α es un parámetro que hay que determinar. Sustituyendo en [3.10], resulta la serie:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\{(\alpha+j)(\alpha+j-1)a_j x^{\alpha+j-2}-[(\alpha+j)(\alpha+j+1)-l(l+1)]a_j x^{\alpha+j}\}=0 \qquad [3.12]$$

En este desarrollo cada uno de los coeficientes de las potencias de x debe anularse por separado. Para $j=0$, 1, nos encontramos con que:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{si } a_0\neq 0, & \text{tenemos } \alpha(\alpha-1)=0\\ \text{si } a_1\neq 0, & \text{tenemos } \alpha(\alpha+1)=0\end{array}\right\} \qquad [3.13]$$

mientras que para cualquier otro valor de j

$$a_{j+2}=\left[\frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1)-l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)}\right]a_j \qquad [3.14]$$

Un momento de reflexión demuestra que las dos relaciones [3.13] son equivalentes y basta con elegir a_0 o a_1 distintos de cero, pero no ambos *simultáneamente*. Haciendo la primera elección tenemos $\alpha=0$ o $\alpha=1$. Por [3.14] vemos que la serie de potencias tiene solamente potencias pares de x ($\alpha=0$) o solamente potencias impares ($\alpha=1$).

Para cualquiera de las dos series $\alpha=0$ o $\alpha=1$ se pueden probar las siguientes propiedades:

a) La serie converge para $x^2<1$, cualquiera que sea l.
b) La serie diverge para $x=\pm 1$, a menos que tenga un número finito de términos.

Puesto que queremos que la solución sea finita para $x=\pm 1$, así como para $x^2<1$, exigiremos a la serie que se corte. Como α y j son números enteros positivos o cero, la relación de recurrencia [3.14] dará términos nulos solamente si l es *cero o un número entero positivo*. Incluso así, solamente una de las dos series es convergente para $x=\pm 1$. Si l es par (impar) solamente termina * la serie $\alpha=0$ ($\alpha=1$). En cada caso los polinomios son de grado l, siendo x^{l-2} el término siguiente, y así progresivamente descendiendo hasta x^0 (x) para l par (impar). Por convenio, estos polinomios se «normalizan» para que tengan el valor unidad en el punto $x=+1$. Se les llama *polinomios de Legendre* de orden l y se representan por $P_l(x)$. Los primeros polinomios de Legendre son:

$$\left.\begin{aligned} P_0(x)&=1\\ P_1(x)&=x\\ P_2(x)&=\tfrac{1}{2}(3x^2-1)\\ P_3(x)&=\tfrac{1}{2}(5x^3-3x)\\ P_4(x)&=\tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\end{aligned}\right\} \qquad [3.15]$$

Manejando las soluciones en serie de potencias [3.11] y [3.14] se puede obtener una representación resumida de los polinomios de Legendre conocida como *fórmula de Rodrigues*:

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \qquad [3.16]$$

(Este resultado se puede también obtener por otros procedimientos más elegentes o bien integrando l veces la ecuación diferencial [3.10].)

Los polinomios de Legendre forman un conjunto ortogonal completo de funciones en el intervalo $-1\leqslant x\leqslant 1$. Para demostrar la ortogonalidad podemos recurrir directamente a la ecuación diferencial [3.10]. Escribimos la ecuación diferencial para $P_l(x)$, multiplicamos por $P_{l'}(x)$ y a continuación integramos sobre todo el intervalo:

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)\left\{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]+l(l+1)P_l(x)\right\}dx=0 \qquad [3.17]$$

---

* Por ejemplo, si $l=0$, la serie correspondiente a $\alpha=1$ tiene como coeficiente general $a_j=a_0/j+1$ para $j=0,\ 2,\ 4,\ \ldots$ Así, la serie $a_0\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots\right)$. Este es precisamente el desarrollo en serie de potencias de la función

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

que claramente se ve que diverge en $x=\pm 1$. Para cada valor de l existe una función $Q_l(x)$ análoga, con términos logarítmicos, asociada a la solución polinómica bien comportada. Véase MAGNUS y OBERHETTINGER, págs. 59 y siguientes, o MAGNUS, OBERHETTINGER y SONI, páginas 151 y siguientes. WHITTAKER y WATSON dan, en el capítulo XV, un tratamiento mediante funciones analíticas.

Integrando el primer término por partes, hallamos:

$$\int_{-1}^{1}\left[(x^2-1)\frac{dP_l}{dx}\frac{dP_{l'}}{dx}+l(l+1)P_{l'}(x)P_l(x)\right]dx=0 \qquad [3.18]$$

Si intercambiamos l y l' en [3.18] y restamos de la propia [3.18] nos resulta la condición de ortogonalidad

$$[l(l+1)-l'(l'+1)]\int_{-1}^{1}P_{l'}(x)P_l(x)\,dx=0 \qquad [3.19]$$

Para $l\neq l'$ la integral debe anularse. Para $l=l'$ la integral tiene valor finito. Para determinarlo, hay que utilizar una representación explícita de los polinomios de Legendre, tal como la fórmula de Rodrigues. Entonces la integral es:

$$N_l\equiv\int_{-1}^{1}[P_l(x)]^2\,dx=\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\,dx$$

Integrando por partes l veces, obtenemos:

$$N_l=\frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}(x^2-1)^l\,dx$$

Por diferenciación de $(x^2-1)^l$, $2l$ veces, obtenemos la constante $(2l)!$, así que

$$N_l=\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^l\,dx$$

La restante integral puede hacerse por la fuerza bruta, o también por inducción. Escribimos el integrando en la forma:

$$(1-x)^2)^l=(1-x^2)\,(1-x^2)^{l-1}=(1-x^2)^{l-1}+\frac{x}{2l}\frac{d}{dx}(1-x^2)^l$$

Entonces, tenemos:

$$N_l=\left(\frac{2l-1}{2l}\right)N_{l-1}+\frac{(2l-1)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}x\,d[(1-x^2)^l]$$

La integración por partes de la última integral da:

$$N_l=\left(\frac{2l-1}{2l}\right)N_{l-1}-\frac{1}{2l}N_l$$

o sea

$$(2l+1)N_l=(2l-1)N_{l-1} \qquad [3.20]$$

Esto demuestra que $(2l+1)N_l$ es independiente de l. Para $l=0$ con $P_0(x)=1$, tenemos $N_0=2$. Así, pues, $N_l=2/(2l+1)$ y la condición de ortogonalidad puede escribirse:

$$\int_{-1}^{1}P_{l'}(x)P_l(x)\,dx=\frac{2}{2l+1}\,\delta_{l'l} \qquad [3.21]$$

y las funciones ortonormales en el sentido de la sección 2.8 son:

$$U_l(x)=\sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x) \qquad [3.22]$$

Puesto que los polinomios de Legendre forman un conjunto ortogonal completo de funciones, cualquier función $f(x)$ puede ser desarrollada por medio de ellos en el intervalo $-1\leqslant x\leqslant 1$. La representación en serie de Legendre es

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}A_lP_l(x) \qquad [3.23]$$

donde

$$A_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)\,dx \qquad [3.24]$$

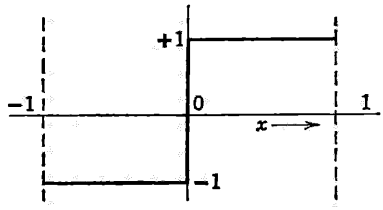


FIG. 3.2.

Como ejemplo, consideremos la función que muestra la figura 3.2:

$$\begin{aligned} f(x)&=+1 \quad \text{para} \quad x>0\\ &=-1 \quad \text{para} \quad x<0 \end{aligned}$$

Entonces

$$A_l=\frac{2l+1}{2}\left[\int_0^1 P_l(x)\,dx-\int_{-1}^{0}P_l(x)\,dx\right]$$

Puesto que $P_l(x)$ es impar (par) respecto del punto $x=0$, si l es impar (par), solamente serán distintos de cero los coeficientes correspondientes a valores impares de l. Así, para l impar:

$$A_l=(2l+1)\int_0^1 P_l(x)\,dx \qquad [3.25]$$

Esta integral puede calcularse mediante la fórmula de Rodrigues, y nos da

$$A_l=(-\tfrac{1}{2})^{(l-1)/2}\frac{(2l+1)\,(l-2)!\,!}{2\left(\dfrac{l+1}{2}\right)!} \qquad [3.26]$$

donde $(2n+1)!\,!\equiv(2n+1)\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots\times 5\times 3\times 1$. Así, pues, la serie para

$f(x)$ es:

$$f(x)=\frac{3}{2}P_1(x)-\frac{7}{8}P_3(x)+\frac{11}{16}P_5(x)-\ldots \qquad [3.27]$$

Existen ciertas relaciones de recurrencia entre polinomios de Legendre de distinto orden que resultan útiles al calcular integrales, para generar polinomios de orden superior a partir de los de menor orden, etc. Partiendo de la fórmula de Rodrigues se demuestra de forma inmediata que:

$$\frac{dP_{l+1}}{dx}-\frac{dP_{l-1}}{dx}-(2l+1)P_l=0 \qquad [3.28]$$

Combinando este resultado con la ecuación diferencial [3.10] se pueden obtener otras fórmulas de recurrencia, algunas de las cuales son:

$$\left.\begin{aligned}(l+1)P_{l+1}-(2l+1)xP_l+lP_{l-1}&=0\\ \frac{dP_{l+1}}{dx}-x\frac{dP_l}{dx}-(l+1)P_l&=0\\ (x^2-1)\frac{dP_l}{dx}-lxP_l+lP_{l-1}&=0\end{aligned}\right\} \qquad [3.29]$$

Como ejemplo de aplicación de estas fórmulas de recurrencia consideremos el cálculo de la integral:

$$I_1=\int_{-1}^{1}xP_l(x)P_{l'}(x)\,dx \qquad [3.30]$$

Con la ayuda de la primera fórmula de recurrencia de las [3.29] obtenemos una expresión $xP(x)$. Así, [3.30] se transforma en:

$$I_1=\frac{1}{2l+1}\int_{-1}^{1}P_{l'}(x)[(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l+1}(x)]\,dx$$

Recurriendo a la integral de ortogonalidad [3.21] podemos demostrar que nuestra integral se anula a menos que $l'=l\pm1$, y que para estos valores tenemos

$$\int_{-1}^{1}xP_l(x)P_{l'}(x)\,dx=\begin{cases}\dfrac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}, & l'=l+1\\ \dfrac{2l}{(2l-1)(2l+1)}, & l'=l-1\end{cases} \qquad [3.31]$$

En realidad, estas dos expresiones constituyen un mismo resultado con los papeles de l y l' intercambiados. De forma semejante es fácil demostrar que:

$$\int_{-1}^{1}x^2P_l(x)P_{l'}(x)\,dx=\begin{cases}\dfrac{2(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)}, & l'=l+2\\ \dfrac{2(2l^2+2l-1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)}, & l'=l\end{cases} \qquad [3.32]$$

en donde se ha supuesto que $l'\geqslant l$.

3.3. PROBLEMAS DE CONTORNO DOTADOS DE SIMETRIA ACIMUTAL

Partiendo de la solución [3.2] a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas se ve que $m=0$ en [3.5], para todo problema provisto de simetría acimutal. O sea, que la solución general para tal problema es

$$\Phi(r, \theta)=\sum_{l=0}^{\infty}[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]P_l(\cos\theta) \qquad [3.33]$$

Los coeficientes A_l y B_l se pueden determinar imponiendo las condiciones de contorno. Supongamos que especificamos el valor del potencial $V(\theta)$ sobre la superficie de la esfera de radio a, y se pide el potencial en su interior. Si no hay cargas en el origen, el potencial debe ser finito en él. Por tanto, $B_l=0$ para todos los valores de l. Los coeficientes se hallan calculando [3.33] sobre la superficie de la esfera:

$$V(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l a^l P_l(\cos\theta) \qquad [3.34]$$

Precisamente ésta es una serie de Legendre de la forma [3.23], cuyos coeficientes A_l son:

$$A_l=\frac{2l+1}{2a^l}\int_0^{\pi}V(\theta)P_l(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \qquad [3.35]$$

Por ejemplo, para el potencial $V(\theta)$ que se vio en la sección 2.7, de una esfera con cada hemisferio a potenciales iguales y de signo contrario:

$$V(\theta)=\begin{cases} +V, & 0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2} \\ -V, & \dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi \end{cases}$$

En este caso, los coeficientes son proporcionales a los de la expresión [3.27]. El potencial en el interior de la esfera es:

$$\Phi(r, \theta)=V\left[\frac{3}{2}\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)-\frac{7}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta)+\frac{11}{16}\left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos\theta)-\ldots\right] \qquad [3.36]$$

Para hallar el potencial en el exterior de la esfera se reemplaza simplemente $(r/a)^l$ por $(a/r)^{l+1}$. El potencial que resulta es el mismo que [2.27] obtenido por otro procedimiento.

La serie [3.33], con sus coeficientes determinados por las condiciones en el contorno, constituye un único desarrollo del potencial. Es precisamente esta unicidad la que nos proporciona un medio de calcular la solución a los problemas de potencial mediante el conocimiento de éste en una región limitada del espacio, que puede ser, por ejemplo, el eje de simetría. En él [3.33] toma el as-

pecto siguiente (con $z=r$):

$$\Phi(z=r)=\sum_{l=0}^{\infty}[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] \qquad [3.37]$$

válida para z positivo. Para los valores negativos de z, debemos multiplicar cada término por $(-1)^l$. Supongamos que podemos hallar el potencial $\Phi(z)$, no importa por qué procedimiento, en un punto cualquiera z del eje de simetría. Si esta función potencial puede desarrollarse en serie de potencias de $z=r$ de la forma [3.37], con coeficientes conocidos, podemos obtener la solución del potencial en cualquier punto del espacio multiplicando cada término en r^l y $r^{-(l+1)}$ por $P_l(\cos\theta)$.

A riesgo de cansar al lector vamos a volver al problema de los dos hemisferios a potenciales iguales y opuestos. Hemos obtenido ya la solución por desarrollo en serie mediante dos métodos diferentes [2.33] y [4.46]. El método que acabamos de enunciar proporciona un tercer camino. Para un punto del eje de simetría, tenemos el potencial en la forma [2.22]:

$$\Phi(z=r)=V\left[1-\frac{r^2-a^2}{r\sqrt{r^2+a^2}}\right]$$

Podemos desarrollar esta expresión en serie de potencias de a^2/r^2:

$$\Phi(z=r)=\frac{V}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(2j-\frac{1}{2})\Gamma(j-\frac{1}{2})}{j!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2j}$$

Por comparación con la expresión [3.37] se observa que sólo intervienen los valores impares de l ($l=2j-1$). Por tanto, la solución válida para todos los puntos exteriores a la esfera es:

$$\Phi(r,\theta)=\frac{V}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(2j-\frac{1}{2})\Gamma(j-\frac{1}{2})}{j!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2j}P_{2j-1}(\cos\theta)$$

Esta es la misma solución ya obtenida en [2.27] y [3.36].

Un desarrollo importante es el del potencial en el punto x debido a una carga puntual $4\pi\epsilon_0$ situada en x':

$$\frac{1}{|x-x'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\gamma) \qquad [3.38]$$

donde $r_<$ ($r_>$) es el menor (mayor) de $|x|$ y $|x'|$, y γ es el ángulo entre x y x', tal como nos muestra la figura 3.3. Esto puede probarse girando los ejes de modo que x' quede a lo largo del eje z. En estas condiciones el potencial satisface la ecuación de Laplace, posee simetría acimutal y puede desarrollarse de acuerdo con [3.33], excepto en el punto $x=x'$:

$$\frac{1}{|x-x'|}=\sum_{l=0}^{\infty}[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]P_l(\cos\gamma)$$

Si el punto x se halla sobre el eje z, el segundo miembro se reduce a [3.37], mientras que el primer miembro es:

$$\frac{1}{|x-x'|} \equiv \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2}} \to \frac{1}{|r-r'|}$$

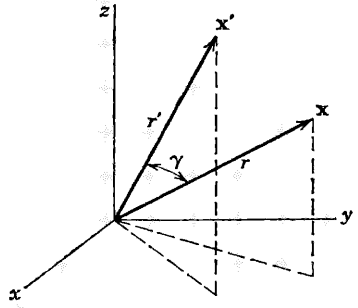


FIG. 3.3.

Haciendo el desarrollo, cuando x está sobre el eje, encontramos:

$$\frac{1}{|x-x'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l$$

Para los puntos fuera del eje, de acuerdo con [3.33] y [3.37], solamente nos falta multiplicar cada término por $P_l(\cos\gamma)$. Esto nos justifica el resultado general [3.38].

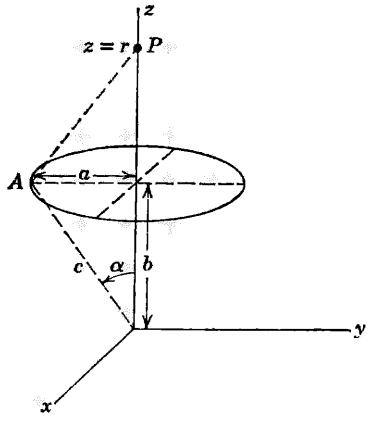


FIG. 3.4. Anillo de carga de radio a y carga total q, situado simétricamente alrededor del eje z y con su centro en $z=b$.

Otro ejemplo es el cálculo del potencial creado por una carga total q distribuida uniformemente sobre un anillo circular de radio a, tal como indica la

figura 3.4, con su eje de simetría en el de las z y su centro en $z=b$. El potencial en un punto P del eje de simetría con $z=r$ es:

$$\Phi(z=r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(r^2+c^2-2cr\cos\alpha)^{1/2}}$$

donde $c^2=a^2+b^2$ y $\alpha=\text{tg}^{-1}(a/b)$. El inverso de la distancia AP puede desarrollarse utilizando [3.38]. Así, para $r>c$:

$$\Phi(z=r)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\alpha)$$

Para $r<c$, la forma correspondiente es:

$$\Phi(z=r)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\alpha)$$

El potencial en *cualquier punto* del espacio se puede obtener multiplicando cada término de la serie por $P_l(\cos\theta)$:

$$\Phi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\alpha)\,P_l(\cos\theta)$$

donde $r_<$ ($r_>$) es el menor (mayor) de los dos, r o c.

3.4. COMPORTAMIENTO DE LOS CAMPOS EN UN AGUJERO CONICO O CERCA DE UNA PUNTA

Antes de pasar a problemas de condiciones de contorno más complicados consideremos uno con simetría acimutal, pero con sólo un intervalo limitado para θ. Esta situación constituye la análoga en tres dimensiones a la discutida en la sección 2.11. Supóngase que la región angular limitada $0\leqslant\theta\leqslant\beta, 0\leqslant\phi\leqslant2\pi$, está limitada por una superficie cónica conductora, tal como se indica en la figura 3.5. Si $\beta<\pi/2$, la región puede considerarse como un agujero cónico profundo perforado en un conductor. Cuando $\beta>\pi/2$, es la región del espacio que rodea un conductor de punta cónica.

El tratamiento de la sección 3.2 para la ecuación diferencial de Legendre necesita modificación. Con la hipótesis de simetría acimutal, la expresión [3.10] aún es aplicable, pero ahora buscamos soluciones finitas y de valor único cuando $x=\cos\theta$ yace en el intervalo $\cos\beta\leqslant x\leqslant1$. Además, como la superficie conductora $\theta=\beta$ se encuentra a potencial fijo, que puede tomarse cero, la solución en $\cos\theta$ debe anularse para $\theta=\beta$ a fin de satisfacer las condiciones de contorno. Como exigimos que la solución sea regular para $x=1$, es conveniente hacer el desarrollo en serie alrededor de $x=1$, en lugar de alrededor de $x=0$ como se hizo con [3.11]. Introduciendo la variable:

$$\xi=\frac{1}{2}(1-x)$$

la ecuación de Legendre [3.10] se convierte en:

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi(1-\xi)\frac{dP}{d\xi}\right]+\nu(\nu+1)P=0 \qquad [3.39]$$

en la que se ha reemplazado l por ν para evitar confusiones. Las soluciones ra-

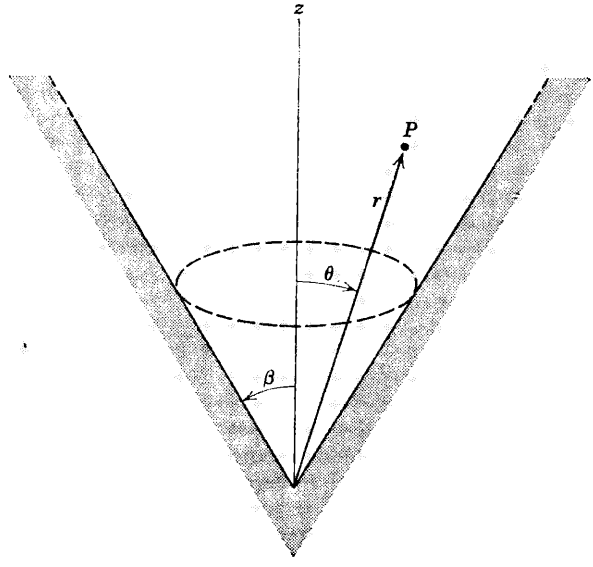


FIG. 3.5.

diales correspondientes para $U(r)/r$ en [3.2] son r^{ν} y $r^{-\nu-1}$. Sustituyendo en [3.39] una solución en forma de serie de potencias:

$$P(\xi)=\xi^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\xi^j$$

la anulación del coeficiente de la potencia menor de ξ requiere que $\alpha=0$. La relación recursiva entre los coeficientes sucesivos de la serie es entonces:

$$\frac{a_{j+1}}{a_j}=\frac{(j-\nu)(j+\nu+1)}{(j+1)^2} \qquad [3.40]$$

Escogiendo $a_0=1$, para que la solución se normalice al valor unidad en $\xi=0$ ($\cos\theta=1$), tenemos la representación en serie:

$$P_{\nu}(\xi)=1+\frac{(-\nu)(\nu+1)}{1!1!}\xi+\frac{(-\nu)(-\nu+1)(\nu+1)(\nu+2)}{2!2!}\xi^2+\ldots \qquad [3.41]$$

Observamos primeramente que si ν es cero o un entero positivo la serie termina. El lector puede verificar que para $\nu=l=0$, 1, 2, ..., [3.41] da exacta-

mente los polinomios de Legendre [3.15]. Cuando ν no es igual a un entero, [3.41] representa una generalización y se denomina *función de Legendre de primera clase y orden* ν. La serie [3.41] es un ejemplo de función hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$ cuyo desarrollo en serie es:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots$$

Al comparar con [3.41] se ve que la función de Legendre puede escribirse:

$$P_\nu(x) = {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) \qquad [3.42]$$

Aquí hemos vuelto a nuestra variable usual $x = \cos\theta$. Las propiedades de las funciones hipergeométricas son bien conocidas (véase MORSE y FESHBACH, capítulo 5; DENNERY y KRZYWICKI, sección 4, 16-18; WHITTAKER y WATSON, capítulo XIV). La función de Legendre $P_\nu(x)$ es regular en $x = 1$ y para $|x| < 1$, pero es singular en $x = -1$, salvo si ν es entero. Tiene un cierto número de ceros en el intervalo $|x| < 1$ que depende del valor de ν. Como el polinomio $P_l(x)$ tiene l ceros para $|x| < 1$, podemos anticipar que para ν real se presentarán cada vez más ceros a medida que ν se haga mayor. Además, los ceros están distribuidos más o menos uniformemente en el intervalo. En particular, el primer cero se va aproximando a $x = 1$ a medida que ν aumenta.

La solución básica del problema de Laplace de condiciones de contorno de la figura 3.5 es

$$Ar^\nu P_\nu(\cos\theta)$$

donde se requiere que $\nu > 0$ para que el potencial sea finito en el origen. Como el potencial debe anularse para $\theta = \beta$ para todo r, es necesario que

$$P_\nu(\cos\beta) = 0 \qquad [3.43]$$

Esta es una condición de valores propios para ν. Resulta evidente de lo que se acaba de decir sobre los ceros de P_ν que [3.43] tiene un número infinito de soluciones, $\nu = \nu_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, que clasificaremos por orden de valor creciente. Para $\nu = \nu_1$, $x = \cos\beta$ es el primer cero de $P_{\nu_1}(x)$. Para $\nu = \nu_2$, $x = \cos\beta$ es el segundo cero de $P_{\nu_2}(x)$, etc. La solución completa para el potencial con simetría acimutal en la región $0 \leqslant \theta \leqslant \beta$ es*:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\nu_k} P_{\nu_k}(\cos\theta) \qquad [3.44]$$

Con el espíritu de la sección 2.11, estamos interesados en el comportamiento general del potencial y los campos en la proximidad de $r = 0$ y no en la solución completa cuando se imponen condiciones de contorno específicas para valores grandes de r. Por consiguiente, aproximaremos el comportamiento del potencial

* La ortogonalidad de las funciones de $P_{\nu_k}(\cos\theta)$ en el intervalo $\cos\beta \leqslant x \leqslant 1$ puede demostrarse de igual modo que para $P_l(\cos\theta)$ véase [3.17]-[3.19]. También puede demostrarse la completitud.

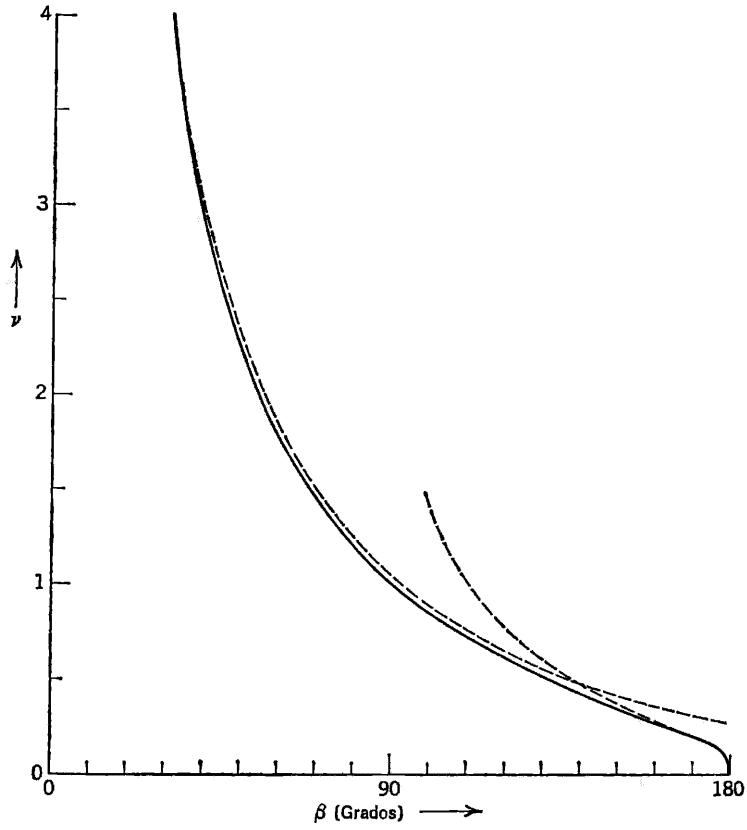


FIG. 3.6. Orden ν del polinomio para el primer cero $P_\nu(\cos\beta)$ frente a β en grados. El intervalo $0 < \beta < 90°$ corresponde al agujero cónico, mientras que $90° < \beta < 180°$ representa una punta cónica. Cerca de $r=0$ los campos y la densidad superficial de carga son proporcionales a $r^{\nu-1}$. Las curvas de trazos son las expresiones aproximadas [3.48*a*] y [3.48*b*].

cerca de $r=0$ mediante el primer término de [3.44] y escribiremos:

$$\Phi(r, \theta) \simeq A r^{\nu} P_{\nu}(\cos\theta) \qquad [3.45]$$

donde ahora ν es la raíz más pequeña de [3.43]. Las componentes del campo eléctrico y la densidad superficial de carga sobre el conductor cónico son

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \simeq -\nu A r^{\nu-1} P_{\nu}(\cos\theta) \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \simeq A r^{\nu-1} \operatorname{sen}\theta P'_{\nu}(\cos\theta) \\ \sigma(r) &= -\epsilon_0 E_\theta\big|_{\theta=\beta} \simeq -A\epsilon_0 r^{\nu-1} \operatorname{sen}\beta P'_{\nu}(\cos\beta) \end{aligned}\right\} \qquad [3.46]$$

En ellas la prima sobre P_ν indica diferenciación con respecto a su argumento. Tanto los campos como la densidad de carga varían como $r^{\nu-1}$ cuando $r \to 0$.

En la figura 3.6 se ha representado el orden ν para el primer cero de $P_\nu(\cos\beta)$ como función de β. Evidentemente, para $\beta \gg 1$, $\nu \gg 1$. Mediante la aproximación de la función de Bessel puede obtenerse en este dominio una expresión aproximada para ν *,

$$P_\nu(\cos\theta) \simeq J_0\left((2\nu+1)\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right) \qquad [3.47]$$

que es válida para ν grande y $\theta < 1$. El primer cero de $J_0(x)$ se halla para $x = 2{,}405$. Esto da:

$$\nu \simeq \frac{2{,}405}{\beta} - \frac{1}{2} \qquad [3.48a]$$

Como $|\boldsymbol{E}|$ y σ varían según $r^{\nu-1}$, en las profundidades del agujero cónico hay muy poca carga y campos muy pequeños cuando $\beta \to 0$. Cuando $\beta = \pi/2$ el conductor se convierte en un plano. Entonces, $\nu = 1$ y $\sigma \propto 1$, como podía esperarse. Cuando $\beta > \pi/2$, la geometría es la de una punta cónica. Entonces $\nu < 1$ y el campo es singular en $r = 0$. Cuando $\beta \to \pi$, $\nu \to 0$, pero de modo bastante lento. Una aproximación apropiada cuando $(\pi - \beta)$ es pequeño es:

$$\nu \simeq \left[2\ln\left(\frac{2}{\pi-\beta}\right)\right]^{-1} \qquad [3.48b]$$

Esto demuestra que cuando $(\pi - \beta) \simeq 10°$, $\nu \simeq 0{,}2$, e incluso para $(\pi - \beta) \simeq 1°$, $\nu \simeq 0{,}1$. En cualquier caso, para una punta cónica fina los campos cerca de la punta varían según $r^{-1+\epsilon}$, siendo $\epsilon \ll 1$. Alrededor de la punta existen campos muy elevados. La eficacia de tales puntas en los pararrayos se discute en la sección 2.11.

R. N. HALL, en *J. Appl. Phys.*, **20**, 925 (1949), da una discusión más extensa de los problemas de potencial de esta clase. Hay gráficos para varias raíces ν_k de [3.43] en función de β.

3.5. LAS FUNCIONES ASOCIADAS DE LEGENDRE Y LOS ARMONICOS ESFERICOS, $Y_{l,m}(\theta, \phi)$

Hasta ahora solamente hemos tratado problemas provistos de simetría acimutal, cuyas soluciones eran de la forma [3.33]. En ellos, salvo si el intervalo en que varía θ está limitado, como en la sección 3.4, intervienen polinomios ordinarios de Legendre. El problema general de potencial, sin embargo, puede presentar variaciones acimutales, y de este modo será $m \neq 0$ en [3.5] y [3.9]. En estas condiciones se requiere una generalización de $P_l(\cos\theta)$, es decir, una solución de [3.9] con l y m, ambos arbitrarios. Del mismo modo esencialmente que para los polinomios de Legendre podemos demostrar que, si se exigen soluciones finitas en el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 1$, el parámetro l *debe ser un entero positivo o nulo*, y el *entero* m solamente puede tomar los valores $-l$, $-(l-1)$, ..., 0, ... $(l-1)$, l. La solución que posee todas estas propiedades se llama función

* Las funciones de Bessel se discuten en la sección 3.7.

asociada de Legendre $P_l^m(x)$. Para los valores positivos de m se define por la fórmula *:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \qquad [3.49]$$

Si se usa la fórmula de Rodrigues para representar $P_l(x)$, podemos obtener una definición válida para valores positivos y negativos de m:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \qquad [3.50]$$

$P_l^{-m}(x)$ y $P_l^m(x)$ son proporcionales, ya que la ecuación diferencial [3.9] depende sólo de m^2 y m es un entero. Puede demostrarse que

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \qquad [3.51]$$

Si fijamos m, las funciones $P_l^m(x)$ forman un conjunto ortogonal en el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 1$. La condición de ortogonalidad puede obtenerse de la misma forma que para las funciones de Legendre:

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}^m(x) P_l^m(x)\, dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l} \qquad [3.52]$$

La solución a la ecuación de Laplace se descompuso en producto de tres factores dependientes cada uno de las variables r, θ y ϕ. Interesa combinar los dos factores angulares y construir así funciones ortonormales sobre la esfera unidad. A estas funciones las llamaremos *armónicos esféricos*, aunque a veces se reserve esta terminología para las soluciones de la ecuación generalizada de Legendre [3.9]. Los armónicos esféricos reciben en algunos libros antiguos en lengua inglesa el nombre de «tesseral harmonics». Las funciones $Q_m(\phi) = e^{im\phi}$ forman un conjunto ortogonal completo de funciones de índice m en el intervalo $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$. Las funciones $P_l^m(\cos\theta)$ forman un conjunto semejante en el índice l, para cada valor fijo m, en el intervalo $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$. Por tanto, el producto $P_l^m Q_m$ formará un conjunto ortogonal completo en los dos índices l, m sobre la esfera de radio unidad. De la condición de normalización [3.52] se ve claramente que las funciones normalizadas adecuadamente, que representaremos por $Y_{lm}(\theta, \phi)$, son:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \qquad [3.53]$$

De [3.51] se deduce que:

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi) \qquad [3.54]$$

---

* La elección de fase para las funciones asociadas es la de MAGNUS y OBERHETTINGER, y la de E. U. CONDON y G. H. SHORTLEY en *Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press (1953). Para formas explícitas de representación y fórmulas de recurrencia, véase MAGNUS y OBERHETTINGER, pág. 54.

Las condiciones de ortogonalidad y normalización son:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{l'l}\delta_{m'm} \qquad [3.55]$$

Y la relación de completitud, equivalente a [2.35], es:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta(\phi-\phi')\delta(\cos\theta - \cos\theta') \qquad [3.56]$$

A continuación se presenta la forma explícita de $Y_{lm}(\theta,\phi)$ para los primeros valores de l, y $m \geqslant 0$. Para los valores negativos de m hay que usar [3.54].

Armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta,\phi)$

$$l=0 \qquad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l=1 \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta e^{i\phi} \\ Y_{10} = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \cos\theta \end{cases}$$

$$l=2 \begin{cases} Y_{22} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta e^{2i\phi} \\ Y_{21} = -\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta\cos\theta e^{i\phi} \\ Y_{20} = \sqrt{\dfrac{5}{4\pi}}\left(\dfrac{3}{2}\cos^2\theta - \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$l=3 \begin{cases} Y_{33} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{35}{4\pi}} \operatorname{sen}^3\theta e^{3i\phi} \\ Y_{32} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{105}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta e^{2i\phi} \\ Y_{31} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{21}{4\pi}} \operatorname{sen}\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{i\phi} \\ Y_{30} = \sqrt{\dfrac{7}{4\pi}}\left(\dfrac{5}{2}\cos^3\theta - \dfrac{3}{2}\cos\theta\right) \end{cases}$$

Obsérvese que, para $m=0$,

$$Y_{l0}(\theta, \phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta) \qquad [3.57]$$

Cualquier función arbitraria $g(\theta, \phi)$ puede ser desarrollada en armónicos esféricos:

$$g(\theta, \phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [3.58]$$

donde los coeficientes son

$$A_{lm}=\int d\Omega\ Y^*_{lm}(\theta, \phi)g(\theta, \phi)$$

En la próxima sección nos interesará la forma del desarrollo para $\theta=0$. Utilizando la definición [3.57], hallamos:

$$[g(\theta, \phi)]_{\theta=0}=\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}A_{l0} \qquad [3.59]$$

donde

$$A_{l0}=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int d\Omega\ P_l(\cos\theta)g(\theta, \phi) \qquad [3.60]$$

Todos los términos de la serie con $m\neq 0$ se anulan para $\theta=0$.

La solución general a un problema de contorno en coordenadas esféricas puede expresarse por medio de los armónicos esféricos y las potencias de r en una generalización de [3.33]:

$$\Phi(r, \theta, \phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-(l+1)}]Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [3.61]$$

Si se especifica el potencial sobre una superficie esférica, podemos determinar los coeficientes calculando [3.61] sobre la superficie y utilizando [3.58].

3.6. EL TEOREMA DE ADICION PARA LOS ARMONICOS ESFERICOS

Se conoce con el nombre de *teorema de adición* para los armónicos esféricos a un resultado matemático de interés y aplicación considerables. Si, como se indica en la figura 3.7, los radios vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}'$, de los puntos con coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) y (r', θ', ϕ'), respectivamente, forman un ángulo γ entre sí, el teorema de adición expresa un polinomio de Legendre de orden l y argumento $\cos\gamma$ por medio de productos de armónicos esféricos de ángulos θ, ϕ y θ', ϕ':

$$P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{lm}(\theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [3.62]$$

donde $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi-\phi')$. Para demostrar este teorema consideraremos el vector x' fijo en el espacio. De este modo $P_l(\cos\gamma)$ es

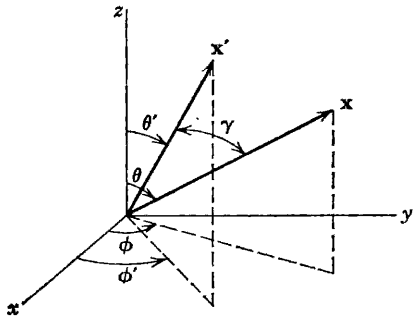


FIG. 3.7.

función de los ángulos θ, ϕ con los ángulos θ', ϕ' como parámetros. Puede, pues, desarrollarse en serie de la forma [3.58]:

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l'm}(\theta', \phi') Y_{l'm}(\theta, \phi) \qquad [3.63]$$

Por comparación con [3.62], se ve que solamente aparecen los términos con $l=l'$. Para ver el porqué de esto, observemos que si los ejes de coordenadas se eligen de modo que x' coincide con el eje z, γ es el ángulo polar y $P_l(\cos\gamma)$ satisface la ecuación

$$\nabla'^2 P_l(\cos\gamma) + \frac{l(l+1)}{r^2} P_l(\cos\gamma) = 0 \qquad [3.64]$$

donde ∇'^2 es la laplaciana referida a los nuevos ejes. Si giramos ahora los ejes hasta la posición de la figura 3.7, $\nabla'^2 = \nabla^2$, y r no se altera *. Por tanto, $P_l(\cos\gamma)$ satisface todavía una ecuación de la forma [3.64], es decir, es un armónico esférico de orden l. Esto significa que es únicamente una combinación lineal de los Y_{lm} del mismo orden:

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^{l} A_m(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [3.65]$$

Los coeficientes $A_m(\theta', \phi')$ vienen dados por:

$$A_m(\theta', \phi') = \int Y^*_{lm}(\theta, \phi) P_l(\cos\gamma)\, d\Omega \qquad [3.66]$$

Para calcularlos, observaremos que se puede considerar, de acuerdo con [3.60],

* La demostración de que $\nabla'^2 = \nabla^2$, o sea que es invariante a las rotaciones, se deduce más fácilmente de observar que $\nabla^2\psi = \nabla\cdot\nabla\psi$ es un operador producto escalar y que los productos escalares son invariantes en las rotaciones.

como el coeficiente para $m'=0$ de un desarrollo de la función $\sqrt{4\pi/(2l+1)}\, Y^*_{lm}(\theta, \phi)$ en serie de funciones $Y_{lm'}(\gamma, \beta)$ referidas a los ejes «prima» de [3.64]. Según [3.59], nos encontramos con que, puesto que sólo hay presente un valor de l, el coeficiente [3.66] es:

$$A_m(\theta', \phi') = \frac{4\pi}{2l+1} \{ Y^*_{lm}[\theta(\gamma, \beta), \phi(\gamma, \beta)] \}_{\gamma=0} \qquad [3.67]$$

en el límite $\gamma \to 0$, los ángulos (θ, ϕ), como funciones de (γ, β), tienden hacia (θ', ϕ'). Así, queda probado el teorema de adición [3.62]. A veces se acostumbra a expresarlo mediante $P_l^m(\cos\theta)$ en lugar de Y_{lm}. De este modo tendremos:

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta') + \\ + 2 \sum_{m=1}^{l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta') \cos[m(\phi - \phi')] \qquad [3.68]$$

Si el ángulo γ se hace cero, nos resulta una regla para la suma de los cuadrados de Y_{lm}:

$$\sum_{m=-l}^{l} |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \qquad [3.69]$$

El teorema de adición nos sirve para expresar el desarrollo [3.38] del potencial en el punto $\boldsymbol{x}$ creado por una carga $4\pi\epsilon_0$ en $\boldsymbol{x}'$, en su forma más general. Sustituyendo la expresión [3.62] de $P_l(\cos\gamma)$ en [3.38], obtenemos:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [3.70]$$

La ecuación [3.70] nos da el potencial de modo completamente factorizado por medio de las coordenadas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}'$. Esta expresión resulta muy útil en integrales sobre densidades de carga, etc., en las que una variable es la de integración, y la otra consiste en las coordenadas del punto de observación. El precio que hay que pagar es que implica una doble suma en lugar de un solo término.

3.7. LA ECUACION DE LAPLACE EN COORDENADAS CILINDRICAS; FUNCIONES DE BESSEL

En coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) (Fig. 3.8), la ecuación de Laplace toma la forma:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad [3.71]$$

La separación de variables se consigue sustituyendo:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho) Q(\phi) Z(z) \qquad [3.72]$$

Operando de la forma usual, llegamos a las tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2Z = 0 \qquad [3.73]$$

$$\frac{d^2Q}{d\phi^2} + \nu^2 Q = 0 \qquad [3.74]$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0 \qquad [3.75]$$

Las soluciones de las dos primeras son inmediatas:

$$\begin{aligned} Z(z) &= e^{\pm kz} \\ Q(\phi) &= e^{\pm i\nu\phi} \end{aligned} \qquad [3.76]$$

Para que el potencial esté unívocamente determinado, cuando ϕ varía en todo su margen, ν debe ser un número entero. Si prescindimos de algunas condicio-

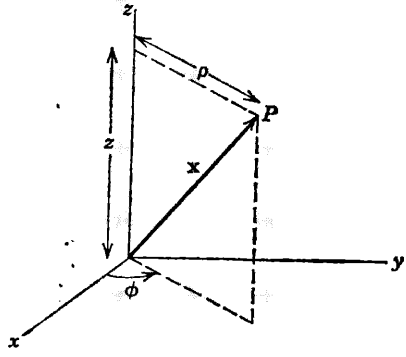


FIG. 3.8.

nes de contorno requeridas en la dirección del eje z, el parámetro k es arbitrario. Por el momento supondremos que k es real y positivo.

Efectuando el cambio de variable $x = k\rho$ podemos obtener la ecuación radial en la forma estandarizada:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0 \qquad [3.77]$$

Esta es la ecuación de Bessel, y sus soluciones se llaman *funciones de Bessel* de orden ν. Si suponemos la solución expresable en forma de serie de potencias de la forma:

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \qquad [3.78]$$

se encuentra que

$$\alpha = \pm\nu \qquad [3.79]$$

$$a_{2j} = -\frac{1}{4j(j+\alpha)}\, a_{2j-2} \qquad [3.80]$$

para $j=0, 1, 2, 3, \ldots$ Todas las potencias impares de x^j tienen coeficientes nulos. La fórmula de recurrencia nos lleva por iteración a:

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha+1)}{2^{2j} j!\, \Gamma(j+\alpha+1)}\, a_0 \qquad [3.81]$$

Se conviene por lo general en elegir la constante $a_0 = [2^\alpha \Gamma(\alpha+1)]^{-1}$. De este modo las soluciones son:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\, \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \qquad [3.82]$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\, \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \qquad [3.83]$$

Estas soluciones reciben el nombre de funciones de Bessel de primera especie y de orden $\pm\nu$. La serie converge para cualquier valor finito de x. Si ν *es un número no entero,* las dos soluciones $J_{\pm\nu}(x)$ forman un par de funciones linealmente independientes. Por el contrario, si ν es entero, es bien sabido que ambas soluciones son linealmente dependientes. En efecto, si $\nu = m$ entero, se puede ver a partir de las representaciones por serie que:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \qquad [3.84]$$

Por tanto, surge la necesidad de encontrar otra solución linealmente independiente cuando m es entero. Es costumbre, incluso cuando ν es no entero, reemplazar el par $J_{\pm\nu}(x)$ por $J_\nu(x)$ y $N_\nu(x)$, que es la función de Neumann (o función de Bessel de segunda especie):

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}\nu\pi} \qquad [3.85]$$

Para ν no entero, $N_\nu(x)$ es con toda evidencia independiente de $J_\nu(x)$. En el límite $\nu \to$ entero, puede demostrar que $N_\nu(x)$ es también linealmente independiente de $J_\nu(x)$. Como ya era de esperar, $N_\nu(x)$ incluye términos logarítmicos en x. Su representación en serie viene en los libros que se citan.

Las funciones de Bessel de tercera especie, llamadas *funciones de Hankel,* se definen como combinaciones lineales de $J_\nu(x)$ y $N_\nu(x)$:

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x) \end{aligned}\right\} \qquad [3.86]$$

Las funcions de Hankel constituyen un conjunto fundamental de soluciones a la ecuación de Bessel, igual que $J_\nu(x)$ y $N_\nu(x)$.

Las funciones J_ν, N_ν, $H_\nu^{(1)}$ y $H_\nu^{(2)}$ satisfacen todas ellas las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$\Omega_{\nu-1}(x)+\Omega_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}\,\Omega_\nu(x) \qquad [3.87]$$

$$\Omega_{\nu-1}(x)-\Omega_{\nu+1}(x)=2\,\frac{d\Omega_\nu(x)}{dx} \qquad [3.88]$$

donde $\Omega_\nu(x)$ es cualquiera de las funciones cilíndricas de orden ν. Estas fórmulas pueden obtenerse directamente a partir de la serie [3.82].

A continuación expondremos las formas límite a que tienden las funciones de Bessel de primera y segunda especie para los valores muy grandes y muy pequeños de la variable. Por simplicidad daremos solamente los primeros términos:

$$x\ll 1 \qquad J_\nu(x)\to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \qquad [3.89]$$

$$N_\nu(x)\to\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left[\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)+0{,}5772\ldots\right], & \nu=0\\[2ex] -\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^\nu, & \nu\neq 0\end{cases} \qquad [3.80]$$

En estas fórmulas se supone que ν es real y no negativo.

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(x)&\to\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\ N_\nu(x)&\to\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sen}\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}\right\} \qquad x\gg 1,\nu \qquad [3.91]$$

La transición entre el comportamiento de la función para los valores pequeños a la forma asintótica para valores grandes de x tiene lugar en la región $x\sim\nu$.

A la vista de las formas asintóticas [3.91] se aprecia claramente que cada función de Bessel posee infinitas raíces. Primordialmente nos referiremos a las raíces de $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x_{\nu n})=0, \qquad n=1,2,3,\ldots \qquad [3.92]$$

$x_{\nu n}$ es la enésima raíz de $J_\nu(x)$. Para los primeros valores enteros de ν las tres primeras raíces son:

$$\begin{aligned}&\nu=0, \quad x_{0n}=2{,}405,\ 5{,}520,\ \ 8{,}654,\ \ldots\\ &\nu=1, \quad x_{1n}=3{,}832,\ 7{,}016,\ 10{,}173,\ \ldots\\ &\nu=2, \quad x_{2n}=5{,}136,\ 8{,}417,\ 11{,}620,\ \ldots\end{aligned}$$

Para las raíces superiores se puede hacer uso de la fórmula asintótica

$$x_{\nu n}\simeq n\pi+(\nu-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}$$

que da una precisión adecuada (al menos de tres cifras). En JAMKE, EMDE y

LÖSCH, pág. 194, y en ABRAMOWITZ y STEGUN, pág. 409, figuran tablas de raíces de las funciones de Bessel.

Ahora que ya tenemos la solución de la parte radial de la ecuación de Laplace mediante funciones de Bessel, podemos preguntarnos en qué sentido las funciones de Bessel forman un conjunto de funciones ortogonal y completo. Consideraremos solamente las funciones de Bessel de primera especie y demostraremos que $\sqrt{\rho}\,J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)$, para todo ν fijo ($\nu \geqslant 0$), y siendo $n=1, 2, \ldots$, forman un sistema ortogonal en el intervalo $0 \leqslant \rho \leqslant a$. Para demostrarlo partiremos de la ecuación diferencial satisfecha por $J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dJ_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)}{d\rho}\right]+\left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)=0 \qquad [3.93]$$

Si multiplicamos la ecuación por $\rho J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a)$ e integramos en el intervalo $(0, a)$, obtenemos

$$\int_0^a J_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dJ_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)}{d\rho}\right]d\rho+$$

$$+\int_0^a\left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\rho J_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho=0$$

Integrando por partes y sabiendo que $(\rho J_\nu J_\nu')$ se anula para $\rho=0$ y para $\rho=a$ (cuando $\nu \geqslant 0$), llegamos al resultado:

$$-\int_0^a \rho\frac{dJ_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right)}{d\rho}\frac{dJ_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)}{d\rho}d\rho+$$

$$+\int_0^a\left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\rho J_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho=0$$

Si escribimos ahora la misma expresión intercambiando n y n' y restamos, obtenemos la condición de ortogonalidad:

$$(x_{\nu n}^2-x_{\nu n'}^2)\int_0^a \rho J_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{2}\right)d\rho=0 \qquad [3.94]$$

Utilizando las fórmulas de recurrencia [3.87] y [3.88] y la ecuación diferencial, podemos calcular la integral de normalización:

$$\int_0^a \rho J_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho=\frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2\delta_{n'n} \qquad [3.95]$$

Suponiendo que el conjunto de funciones de Bessel es completo, podemos desarrollar cualquier función arbitraria de ρ en el intervalo $0 \leqslant \rho \leqslant a$, en serie

de Bessel-Fourier:

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right) \qquad [3.96]$$

donde

$$A_{\nu n}=\frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})}\int_0^a \rho f(\rho) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right)d\rho \qquad [3.97]$$

En nuestra deducción de [3.96] impusimos la restricción $\nu \geqslant 0$. Realmente, se puede demostrar que es válida para todos los valores $\nu \geqslant -1$.

El desarrollo [3.96] y [3.97] es una serie convencional de Fourier-Bessel, que es muy adecuada para las funciones que se anulan para $\rho=a$ (por ejemplo, condiciones de Dirichlet homogéneas en un cilindro; véase la sección siguiente). Pero se ve que es también posible un desarrollo diferente en serie de funciones $\sqrt{\rho}\,J_\nu(y_{\nu n}\rho/a)$, donde $y_{\nu n}$ es la raíz enésima de la ecuación $[dJ_\nu(x)]/dx=0$. La razón de que se pueda hacer el desarrollo indistintamente en unas o en otras estriba en que para demostrar la ortogonalidad de las funciones solamente se requiere que la expresión $[\rho J_\nu(\lambda\rho)\,(d/d\rho)J_\nu(\lambda'\rho)]$ se anule en los puntos extremos $\rho=0$ y $\rho=a$. Este requisito lo cumplen *tanto* $\lambda=x_{\nu n}/a$ *como* $\lambda=y_{\nu n}/a$, donde $J_\nu(x_{\nu n})=0$ y $J'_\nu(y_{\nu n})=0$. El desarrollo en funciones $\sqrt{\rho}\,J_\nu(y_{\nu n}\rho/a)$ es especialmente adecuado a las funciones de pendiente nula para $\rho=a$ (véase el problema 3.10).

Una serie de Fourier-Bessel no es sino uno de los tipos de desarrollo por medio de funciones de Bessel. Otras posibilidades son las series de Neumann $\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(z)\right]$, series de Kapteyn $\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}[(\nu+n)z]\right\}$ y series de Schlömilch $\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(nx)\right]$. Para una discusión detallada de las propiedades de estos desarrollos deberá el lector consultar WATSON, caps. XVI-XIX. Las series de Kapteyn aparecen en la discusión del movimiento de los planetas y en la radiación debida a partículas que se mueven a gran velocidad (véanse los problemas 14.7 y 14.8).

Antes de abandonar el estudio de las propiedades de las funciones de Bessel deberá hacerse una pequeña observación. Si al separar variables en la ecuación de Laplace hubiéramos tomado $-k^2$ en lugar de k^2, la solución $Z(z)$ hubiese sido $\operatorname{sen} kz$ o $\cos kz$, y como ecuación radial para $R(\rho)$ hubiéramos tenido:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\left(k^2+\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0 \qquad [3.98]$$

Con $k\rho=x$, ésta se nos hace

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0 \qquad [3.99]$$

Las soluciones de esta ecuación se llaman *funciones de Bessel modificadas.* Es

evidente que son precisamente funciones de Bessel de argumento imaginario puro. El par de funciones linealmente independientes que normalmente se utilizan son $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$. Se definen mediante

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \qquad [3.100]$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) \qquad [3.101]$$

y son funciones reales cuando x y ν son reales. Para valores pequeños y grandes de x, suponiendo que $\nu \geqslant 0$ y real, sus formas asintóticas son:

$$x \ll 1 \qquad I_\nu(x) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \qquad [3.102]$$

$$K_\nu(x) \to \begin{cases} -\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0{,}5772\ldots\right], & \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, & \nu \neq 0 \end{cases} \qquad [3.103]$$

$$x \gg 1, \nu \qquad \left.\begin{aligned} I_\nu(x) &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ K_\nu(x) &\to \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad [3.104]$$

3.8. PROBLEMAS DE CONDICIONES DE CONTORNO EN COORDENADAS CILINDRICAS

La solución a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es $\Phi = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$, donde la forma de cada uno de los factores viene dada en la sección precedente. Consideremos ahora el problema específico de condiciones de contorno que se ilustra en la figura 3.9. El cilindro tiene radio a y

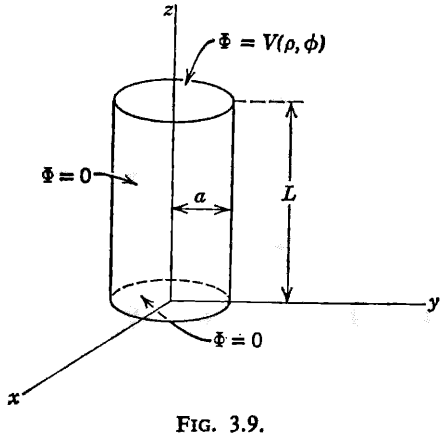


FIG. 3.9.

altura L, y las bases superior e inferior se hallan en los planos $z=L$ y $z=0$. El potencial en la superficie lateral del cilindro y en la base inferior es cero, mientras que en la base superior viene dado por $\Phi=V(\rho, \phi)$. Se desea hallar el potencial en los puntos interiores al cilindro. Para que Φ sea unívoco y se anule en $z=0$,

$$\left.\begin{aligned} Q(\phi) &= A \operatorname{sen} m\phi + B \cos m\phi \\ Z(z) &= \operatorname{senh} kz \end{aligned}\right\} \qquad [3.105]$$

donde $\nu=m$ es entero y k es una constante que hay que determinar. El factor radial es:

$$R(\rho)=CJ_m(k\rho)+DN_m(k\rho) \qquad [3.106]$$

Si el potencial es finito para $\rho=0$, $D=0$. Si se requiere que el potencial se anule para $\rho=a$, es preciso que k tome solamente uno de los valores especiales:

$$k_{mn}=\frac{x_{mn}}{a}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots \qquad [3.107]$$

donde x_{mn} son las raíces de $J_m(x)=0$.

Combinando todas estas condiciones hallamos que la forma general de la solución es:

$$\Phi(\rho, \phi, z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) \operatorname{senh}(k_{mn}z)\,[A_{mn} \operatorname{sen} m\phi + B_{mn} \cos m\phi] \qquad [3.108]$$

Para $z=L$ se nos da el potencial $V(\rho, \phi)$. Por tanto, tenemos

$$V(\rho, \phi)=\sum_{m,n} \operatorname{senh}(k_{mn}L) J_m(k_{mn}\rho)\,[A_{mn} \operatorname{sen} m\phi + B_{mn} \cos m\phi]$$

Esta es una serie de Fourier en ϕ y una serie de Bessel-Fourier en ρ. Los coeficientes vienen dados, según [2.43] y [3.97], por

$$\left.\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{2 \operatorname{cosech}(k_{mn}L)}{\pi a J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho\, \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \operatorname{sen} m\phi \\ \text{y} \qquad B_{mn} &= \frac{2 \operatorname{cosech}(k_{mn}L)}{\pi a J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho\, \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \cos m\phi \end{aligned}\right\} \qquad [3.109]$$

en donde hay que tener en cuenta que, para $m=0$, hay que poner $\frac{1}{2}B_{0n}$ en la serie.

La forma especial del desarrollo [3.108] viene condicionada por el requisito de que el potencial se anule para $z=0$ independientemente de ρ, y para $\rho=a$ independientemente de z. Si hubiéramos tenido unas condiciones de contorno distintas, hubiéramos tomado otra forma de desarrollo. En el problema 3.6 se deja como ejercicio para el lector un ejemplo en que el potencial es cero en las bases del cilindro y $V(\phi, z)$ en la superficie lateral.

La serie de Fourier-Bessel [3.108] es apta para un intervalo finito de ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant a$. Si $a \to \infty$, la serie pasa a ser una integral de modo enteramente aná-

logo a la transición sufrida por una serie trigonométrica de Fourier, que pasa a una integral de Fourier. Así, por ejemplo, si el potencial en el espacio desprovisto de cargas es finito para $z \geqslant 0$ y se anula cuando $z \to \infty$, la forma general de la solución para $z \geqslant 0$ deberá ser:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk\, e^{-kz} J_m(k\rho)\, [A_m(k) \operatorname{sen} m\phi + B_m(k) \cos m\phi] \quad [3.110]$$

Si especificamos el potencial, sobre todo el plano $z=0$, mediante la expresión $V(\rho, \phi)$, los coeficientes vienen determinados por

$$V(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk\, J_m(k\rho)\, [A_m(k) \operatorname{sen} m\phi + B_m(k) \cos m\phi]$$

La variación en ϕ es justamente una serie de Fourier. Por consiguiente, los coeficientes $A_m(k)$ y $B_m(k)$ vienen determinados separadamente por las relaciones integrales:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\rho, \phi) \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} d\Phi = \int_0^{\infty} J_m(k'\rho) \begin{Bmatrix} A_m(k') \\ B_m(k') \end{Bmatrix} dk' \quad [3.111]$$

Estas ecuaciones integrales de primera especie pueden resolverse con facilidad, ya que son *transformadas de Hankel*. Para nuestros fines la relación integral:

$$\int_0^{\infty} x J_m(kx) J_m(k'x)\, dx = \frac{1}{k}\, \delta(k' - k) \quad [3.112]$$

puede aprovecharse para invertir las ecuaciones [3.111]. Multiplicando ambos miembros por $\rho J_m(k\rho)$ e integrando respecto de ρ, encontramos, con la ayuda de [3.112], que los coeficientes vienen determinados por integrales extendidas a todo el plano $z=0$:

$$\begin{Bmatrix} A_m(k) \\ B_m(k) \end{Bmatrix} = \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} d\rho\, \rho \int_0^{2\pi} d\phi\, V(\rho, \phi) J_m(k\rho) \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} \quad [3.113]$$

Como antes, para $m=0$, deberemos poner $\frac{1}{2}B_0(k)$ en la serie [3.110].

3.9. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES DE GREEN EN COORDENADAS ESFERICAS

Para tratar problemas en los que se den distribuciones de carga junto con condiciones de contorno para el potencial (es decir, soluciones a la ecuación de Poisson), es necesario conocer la función de Green $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ que satisfaga las condiciones de contorno oportunas. A menudo se dan estas condiciones sobre superficies de alguno de los sistemas separables de coordenadas, tal como, por ejemplo, contornos esféricos o cilíndricos. En tales casos es conveniente expresar la función de Green como serie de productos de funciones idóneas al

sistema de coordenadas que se trate. Consideraremos en primer lugar, para ilustrar el tipo de desarrollos que aparecen, las coordenadas esféricas.

Tenemos ya el desarrollo de la función de Green [3.70], cuando no existen superficies límite, salvo en el infinito:

$$\frac{1}{|x-x'|}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

Supongamos que queremos obtener un desarrollo análogo para la función de Green apta para el problema «exterior» con un contorno esférico en $r=a$. Hallamos rápidamente el resultado partiendo de la forma imagen de la función de Green [2.16]. Utilizando el desarrollo [3.70] para los dos términos de [2.16], obtenemos:

$$G(x,x')=4\pi\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}\left[\frac{r_<}{r_>^{l+1}}-\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{l+1}\right]Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \quad [3.114]$$

Para ver con claridad la estructura de [3.114] y comprobar que satisface efectivamente las condiciones de contorno, vamos a poner de manifiesto los factores radiales por separado, para $r<r'$ y para $r>r'$:

$$\left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}-\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{l+1}\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{r'^{l+1}}\left[r^l-\dfrac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right], & r<r'\\[2ex] \left[r'^l-\dfrac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right]\dfrac{1}{r^{l+1}}, & r>r'\end{cases} \quad [3.115]$$

Primeramente, observaremos que tanto cuando r como r' son iguales a a el factor radial se anula, tal como se pretende. Análogamente, también para r o $r'\to\infty$ se anula el factor radial. La función es simétrica en r y r'. Considerándola como función de r, por haber fijado r', el factor radial es precisamente una combinación lineal de soluciones r^l y $r^{-(l+1)}$ de la parte radial [3.7] de la ecuación de Laplace. La combinación lineal es distinta para $r<r'$ y para $r>r'$. La razón de esto, que se apreciará a continuación, hay que buscarla en el hecho de que la función de Green es una solución a la ecuación de Poisson con una inhomogeneidad debida a la función delta.

Ahora que hemos visto la forma general del desarrollo de la función de Green en coordenadas separables, volveremos a considerar la construcción sistemática de tales desarrollos partiendo de los primeros principios. La función de Green para un problema de potencial satisface la ecuación

$$\nabla_x^2 G(x,x')=-4\pi\delta(x-x') \quad [3.116]$$

a la que hay que añadir las condiciones de contorno $G(x,x')=0$ cuando x o x' están sobre la superficie S. Cuando las superficies límites sean esféricas deseamos un desarrollo de la forma general [3.114]. Para este fin aprovecharemos el hecho de que la función delta puede escribirse así *:

$$\delta(x-x')=\frac{1}{r^2}\,\delta(r-r')\,\delta(\phi-\phi')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')$$

* Para expresar $\delta(x-x')=\delta(x_1-x_1')\delta(x_2-x_2')\delta(x_3-x_3')$ por medio de las coordenadas (ξ_1,ξ_2,ξ_3) relacionadas con (x_1,x_2,x_3) mediante el jacobiano $J(x_i,\xi_i)$, observaremos que la

y que la relación de completitud [3.56] puede usarse para representar las funciones delta angulares:

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{r^2}\,\delta(r-r')\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m-l}^{l}Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad [3.117]$$

De este modo, podemos desarrollar la función de Green, considerada como función de $\boldsymbol{x}$:

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}(\theta',\phi')g_l(r,r')Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad [3.118]$$

Sustituyendo [3.117] y [3.118] en [3.116] obtenemos los resultados siguientes:

$$A_{lm}(\theta',\phi')=Y^*_{lm}(\theta',\phi') \qquad [3.119]$$

y

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[rg_l(r,r')]-\frac{l(l+1)}{r^2}g_l(r,r')=-\frac{4\pi}{r^2}\,\delta(r-r') \qquad [3.120]$$

Vemos que la función de Green radial ha de satisfacer la ecuación homogénea [3.7] para $r\neq r'$. Así, pues, podemos escribir:

$$g_l(r,r')=\begin{cases}Ar^l+Br^{-(l+1)}, & \text{para } r<r'\\ A'r^l+B'r^{-(l+1)} & \text{para } r>r'\end{cases}$$

Los coeficientes A, B, A', B' son funciones de r' que deben ser calculadas teniendo en cuenta las condiciones de contorno, el requisito implicado por $\delta(r-r')$ en [3.120], y la simetría de la función $g_l(r,r')$ en r y r'. Supongamos que las superficies límite son esferas concéntricas a las distancias $r=a$ y $r=b$. El hecho de que $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ se anule para todo punto $\boldsymbol{x}$ sobre la superficie, implica que $g_l(r,r')$ se ha de anular para $r=a$ y para $r=b$. Por tanto, tenemos para $g_l(r,r')$:

$$g_l(r,r')=\begin{cases}A\left(r^l-\dfrac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right), & r<r'\\ B'\left(\dfrac{1}{r^{l+1}}-\dfrac{r^l}{b^{2l+1}}\right), & r>r'\end{cases} \qquad [3.121]$$

La simetría en r y r' requiere que los coeficientes $A(r')$ y $B'(r')$ sean tales que $g_l(r,r')$ pueda escribirse así:

$$g_l(r,r')=C\left(r_<^l-\frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) \qquad [3.122]$$

---

magnitud fundamental es $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')d^3x$. De donde

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{|J(x_i,\xi_i)|}\,\delta(\xi_1-\xi_1')\delta(\xi_2-\xi_2')\delta(\xi_3-\xi_3')$$

Véase el problema 1.2.

donde $r_<$ ($r_>$) es el menor (mayor) entre r y r'. Para determinar la constante C consideraremos el efecto de la función delta en la expresión [3.120]. Si multiplicamos ambos miembros por r e integramos en el intervalo $r=r'-\epsilon$ a $r=r'+\epsilon$, siendo ϵ muy pequeño, obtenemos:

$$\left[\frac{d}{dr}(rg_l(r,r'))\right]_{r'+\epsilon} - \left[\frac{d}{dr}(rg_l(r,r'))\right]_{r'-\epsilon} = -\frac{4\pi}{r'} \qquad [3.123]$$

Hay, pues, una discontinuidad en la pendiente para $r=r'$, tal como indica la figura 3.10.

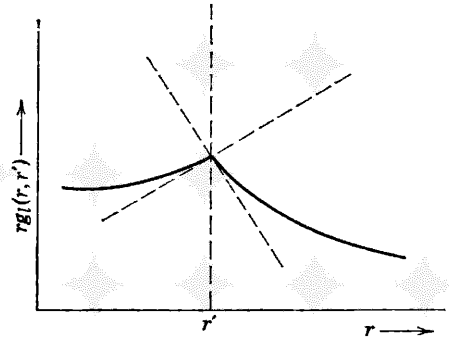


FIG. 3.10. Discontinuidad en la pendiente de la función radial de Green.

Para $r=r'+\epsilon$, $r_>=r$, $r_<=r'$. Por tanto,

$$\left[\frac{d}{dr}(rg_l(r,r'))\right]_{r'+\epsilon} = C\left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right)\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}}\right)\right]_{r=r'}$$

$$= -\frac{C}{r'}\left[1-\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right]\left[l+(l+1)\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\right]$$

De modo análogo:

$$\left[\frac{d}{dr}(rg_l(r,r'))\right]_{r'-\epsilon} = \frac{C}{r'}\left[l+1+l\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right]\left[1-\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\right]$$

Por sustitución de estas derivadas en [3.123], hallamos:

$$C = \frac{4\pi}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} \qquad [3.124]$$

Por combinación de [3.124], [3.122], [3.119] y [3.118] llegamos a un desarrollo de la función de Green para una capa esférica limitada por las superficies $r=a$ y $r=b$:

$$G(x,x') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]}\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) \qquad [3.125]$$

Para los casos particulares $a \to 0$, $b \to \infty$ y $b \to \infty$, volvemos a encontrar los desarrollos [3.70] y [3.114], respectivamente. Para el problema «interior» a una esfera de radio b haremos simplemente que $a \to 0$. Mientras que el resultado para una esfera única se obtiene más fácilmente por el método de las imágenes, el resultado general [3.125] para la capa esférica es bastante difícil de obtener por imágenes, puesto que implica un conjunto de imágenes infinito.

3.10. SOLUCION A LOS PROBLEMAS DE POTENCIAL MEDIANTE EL DESARROLLO EN FUNCIONES DE GREEN ESFERICAS

La solución general a la ecuación de Poisson con valores especificados del potencial en la superficie del contorno es (Sec. 1.10):

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(x')G(x, x')\, d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(x')\frac{\partial G}{\partial n'}\, da' \qquad [3.126]$$

A título de ilustración, consideremos el potencial en el *interior* de una esfera de radio b. En primer lugar vamos a establecer la equivalencia de la integral de superficie en [3.126] y el método visto en la sección 3.5, ecuaciones [3.61] y [3.58]. Haciendo $a=0$ en [3.125], la derivada normal, calculada para $r'=b$, es:

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{\partial G}{\partial r'}\bigg|_{r'=b} = -\frac{4\pi}{b^2}\sum_{l,m}\left(\frac{r}{b}\right)^l Y^*_{lm}(\theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [3.127]$$

Por tanto, la solución a la ecuación de Laplace en el interior de $r=b$ con la condición $\Phi = V(\theta', \phi')$ sobre la superficie es, de acuerdo con [3.126]:

$$\Phi(x) = \sum_{l,m}\left[\int V(\theta', \phi')Y^*_{lm}(\theta', \phi')\, d\Omega'\right]\left(\frac{r}{b}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [3.128]$$

En el caso considerado, ésta es la misma forma de solución que [3.61] con [3.58]. Existe una tercera forma de solución para la esfera, la llamada integral de Poisson [2.19].

La equivalencia entre esta solución y el desarrollo en funciones de Green hay que buscarla en el hecho de que ambas provienen de la expresión general [3.126] y la función de Green imagen. Se dejará para los problemas la demostración explícita de la equivalencia entre [2.19] y la solución en serie [3.61].

Nos referiremos ahora a problemas con distribución volúmica de carga, de modo que habrá que considerar la integral de volumen de [3.126]. Es suficiente considerar problemas en los que el potencial se anula en el contorno. La solución general puede obtenerse por superposición de una solución de la ecuación de Laplace. El primer ejemplo es el de una esfera hueca de radio b conectada a tierra, con un anillo concéntrico cargado de radio a y carga total Q. Dicho anillo está situado en el plano x-y, según la figura 3.11. Con la ayuda de funciones delta en el radio y el ángulo podemos expresar la densidad de carga del anillo

$$\rho(x') = \frac{Q}{2\pi a^2}\delta(r'-a)\,\delta(\cos\theta') \qquad [3.129]$$

En la integral de volumen de la función de Green sólo quedarán los términos de [3.125] que tengan $m=0$, debido a la simetría acimutal. De este modo,

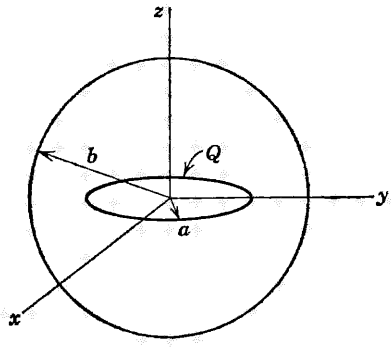


FIG. 3.11. Anillo de radio a y carga total Q en el interior de una esfera conductora de radio b conectada a tierra.

usando [3.57] y recordando que $a \to 0$ en [3.125], hallamos:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\boldsymbol{x}')G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\,d^3x'$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) P_l(\cos\theta) \qquad [3.130]$$

donde ahora $r_<$ ($r_>$) es el menor (mayor) de r y a. Basándonos en el hecho que $P_{2n+1}(0)=0$ y $P_{2n}(0)=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}$, podemos excribir la expresión [3.130] así:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!} r_<^{2n}\left(\frac{1}{r_>^{2n+1}} - \frac{r_>^{2n}}{b^{4n+1}}\right) P_{2n}(\cos\theta) \qquad [3.131]$$

En el límite, cuando $b \to \infty$, se ve que [3.130] o [3.131] se reducen a la fórmula final de la sección 3.3 para un anillo de carga en el espacio ilimitado. El presente resultado puede obtenerse también partiendo de aquel resultado y las imágenes para una esfera.

Un segundo ejemplo con densidades de carga es el que se ilustra en la figura 3.12, una esfera hueca conectada a tierra con una línea cargada uniformemente, de carga total Q, situada a lo largo del eje z entre los polos norte y sur de la esfera. Podemos expresar la densidad volúmica de carga nuevamente con la ayuda de las funciones delta.

$$\rho(\boldsymbol{x}') = \frac{Q}{2b}\frac{1}{2\pi r^2}[\delta(\cos\theta'-1)+\delta(\cos\theta'+1)] \qquad [3.132]$$

donde las dos funciones delta en $\cos\theta$ corresponden a las dos mitades de la línea cargada por encima y por debajo del plano x-y. El factor $2\pi r^2$ en el de-

nominador nos asegura que la densidad de carga es una densidad *lineal* constante $Q/2b$. Con ella en [3.126] obtenemos:

$$\Phi(x)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2b}\sum_{l=0}^{\infty}[P_l(1)+P_l(-1)]P_l(\cos\theta)\int_0^b r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)dr' \qquad [3.133]$$

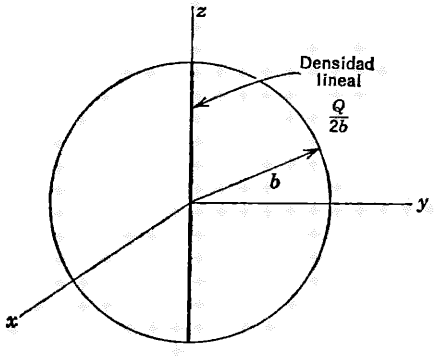


FIG. 3.12. Carga lineal uniforme de longitud $2b$ y carga total Q en el interior de una esfera de radio b conectada a tierra.

Deberemos descomponer la integral en los intervalos $0\leqslant r'<r$ y $r\leqslant r'\leqslant b$. De este modo tenemos:

$$\int_0^b=\left(\frac{1}{r^{l+1}}-\frac{r^l}{b^{2l+1}}\right)\int_0^r r'^l\,dr'+r^l\int_r^b\left(\frac{1}{r'^{l+1}}-\frac{r'^l}{b^{2l+1}}\right)dr'$$

$$=\frac{(2l+1)}{l(l+1)}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^l\right] \qquad [3.134]$$

Para $l=0$ este resultado es indeterminado. Sólo para este caso aplicaremos la regla de l'Hospital, y nos da:

$$\int_0^b=\lim_{l\to 0}\frac{\frac{d}{dl}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^l\right]}{\frac{d}{dl}(l)}=\lim_{l\to 0}\left(-\frac{d}{dl}e^{l\ln(r/b)}\right)=\ln\left(\frac{b}{r}\right) \qquad [1.135]$$

Resultado que puede verificarse por integración directa de [3.133] para $l=0$. Aprovechando el hecho de que $P_l(-1)=(-1)^l$, el potencial [3.133] puede ponerse bajo la forma:

$$\Phi(x)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{b}\left\{\ln\left(\frac{b}{r}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(4j+1)}{2j(2j+1)}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^{2j}\right]P_{2j}(\cos\theta)\right\} \qquad [3.136]$$

La presencia del logaritmo para $l=0$ nos recuerda que el potencial se hace infinito en el eje z. Se pone esto de manifiesto por la serie [3.136], que se hace divergente para $\cos\theta=\pm 1$, con la excepción de $r=b$ exactamente.

La densidad superficial de carga en la esfera se obtiene rápidamente por diferenciación de [3.136]:

$$\sigma(\theta)=\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r}\bigg|_{r=b}=-\frac{Q}{4\pi b^2}\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(4j+1)}{(2j+1)}P_{2j}(\cos\theta)\right] \qquad [3.137]$$

El primer término nos muestra que la carga total inducida sobre la esfera es $-Q$, ya que los restantes términos al integrar sobre toda la superficie esférica se anulan.

3.11. DESARROLLO DE LA FUNCION DE GREEN EN COORDENADAS CILINDRICAS

El desarrollo del potencial debido a una carga puntual en coordenadas esféricas nos suministra otro ejemplo de desarrollo de la función de Green. Expondremos los principios con la suficiente generalidad para que el procedimiento pueda adaptarse con rapidez al cálculo de funciones de Green para problemas de potencial con contornos cilíndricos. El punto de partida es la ecuación que nos da la función de Green:

$$\nabla_x^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=-\frac{4\pi}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z') \qquad [3.138]$$

donde las funciones delta se han expresado en coordenadas cilíndricas. Las funciones delta en ϕ y z pueden escribirse por medio de funciones ortonormales:

$$\left.\begin{aligned}\delta(z-z')&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ik(z-z')}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dk\cos[k(z-z')]\\ \delta(\phi-\phi')&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\phi-\phi')}\end{aligned}\right\} \qquad [3.139]$$

De un modo análogo desarrollamos la función de Green:

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dk\,e^{im(\phi-\phi')}\cos[k(z-z')]g_m(\rho,\rho') \qquad [3.140]$$

Sustituyendo en [3.138] llegamos a la ecuación para la función radial de Green $g_m(\rho,\rho')$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dg_m}{d\rho}\right)-\left(k^2+\frac{m^2}{\rho^2}\right)g_m=-\frac{4\pi}{\rho}\delta(\rho-\rho') \qquad [3.141]$$

Cuando $\rho\neq\rho'$, es ésta precisamente la ecuación [3.98] que da lugar a las funciones de Bessel modificadas $I_m(k\rho)$ y $K_m(k\rho)$. Supóngase que $\psi_1(k\rho)$ es una combinación lineal de I_m y K_m que satisface las condiciones de contorno para

$\rho < \rho'$ y que $\psi_2(k\rho)$ es otra combinación lineal independiente de la primera que satisface las condiciones de contorno para $\rho > \rho'$. La simetría de la función de Green en ρ y ρ' exige que

$$g_m(\rho, \rho') = \psi_1(k\rho_<)\psi_2(k\rho_>) \qquad [3.142]$$

La normalización del producto $\psi_1\psi_2$ se determina por la discontinuidad en la pendiente que implica la función delta en [3.141]:

$$\frac{dg_m}{d\rho}\bigg|_+ - \frac{dg_m}{d\rho}\bigg|_- = -\frac{4\pi}{\rho'} \qquad [3.143]$$

donde $|_\pm$ indica que se calcula para $\rho = \rho' \pm \epsilon$. A partir de [3.142] es obvio que

$$\left[\frac{dg_m}{d\rho}\bigg|_+ - \frac{dg_m}{d\rho}\bigg|_-\right] = k(\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1') = kW[\psi_1, \psi_2] \qquad [3.144]$$

donde las «primas» significan diferenciación respecto del argumento y $W[\psi_1, \psi_2]$ es el wronskiano de ψ_1 y ψ_2. La ecuación [3.141] es del tipo de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + g(x)y = 0 \qquad [3.145]$$

y es bien sabido que el wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de tal ecuación es proporcional a $[1/p(x)]$. De aquí que podemos asegurar la posibilidad de satisfacer a [3.143] para todos los valores de ρ'. Claro está que debemos exigir que la condición de normalización del producto $\psi_1\psi_2$ sea tal que el wronskiano tenga el valor:

$$W[\psi_1(x), \psi_2(x)] = -\frac{4\pi}{x} \qquad [3.146]$$

Si no hay superficies límite, la condición es que $g_m(\rho, \rho')$ sea finito para $\rho = 0$ y se anule para $\rho \to \infty$. Por tanto, $\psi_1(k\rho) = AI_m(k\rho)$ y $\psi_2(k\rho) = K_m(k\rho)$. La constante A deberá determinarse a partir de la condición impuesta al wronskiano [3.146]. Puesto que éste es proporcional a $(1/x)$ para todos los valores de x, no importa para qué punto se calcule. Usando las formas límite [3.102] y [3.103] para valores pequeños de x (o [3.104] para valores grandes) hallamos:

$$W[I_m(x), K_m(x)] = -\frac{1}{x} \qquad [3.147]$$

así que $A = 4\pi$. El desarrollo de $1/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$ es, por tanto,

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = \frac{2}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty dk\, e^{im(\phi-\phi')}\cos[k(z-z')]I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>) \qquad [3.148]$$

Que también puede expresarse mediante funciones reales:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty dk\cos[k(z-z')]$$
$$\times\left\{\tfrac{1}{2}I_0(k\rho_<)K_0(k\rho_>)+\sum_{m=1}^{\infty}\cos[m(\phi-\phi')]I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>)\right\} \qquad [3.149]$$

De este desarrollo se pueden obtener ciertos resultados matemáticos de gran utilidad. Si hacemos $\boldsymbol{x}'\to 0$, solamente subsisten los términos con $m=0$, y así obtenemos la siguiente representación integral:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos kz\, K_0(k\rho)\, dk \qquad [3.150]$$

Si sustituimos ρ^2 en [3.150] por $R^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')$, tendremos en el primer miembro el inverso de la distancia $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-1}$ con $z'=0$, es decir, precisamente [3.149] con $z'=0$. Comparando ahora los segundos miembros de [3.149] y [3.150], llegamos, por ser válidos para *todos* los valores de z, a la siguiente identificación:

$$K_0[k\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}]$$
$$=I_0(k\rho_<)K_0(k\rho_>)+2\sum_{m=1}^{\infty}\cos[m(\phi-\phi')]I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>) \qquad [3.151]$$

En este último resultado podemos tomar el límite para $k\to 0$, y obtenemos una expresión para la función de Green en coordenadas polares (bidimensionales):

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{1}{\rho_>}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^m\cos[m(\phi-\phi')] \qquad [3.152]$$

Podemos verificar esta representación por una construcción sistemática de la función de Green bidimensional para la ecuación de Poisson siguiendo las directrices que nos llevan a [3.148].

3.12. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES DE GREEN EN FUNCIONES PROPIAS

Otra técnica para obtener el desarrollo de las funciones de Green es el uso de funciones propias. Esta aproximación está íntimamente relacionada con los métodos vistos en las secciones 3.9 y 3.11.

Para aclarar lo que entendemos por funciones propias consideraremos una ecuación diferencial elíptica de la forma:

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{x}) + [f(\boldsymbol{x}) + \lambda]\psi(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad [3.153]$$

Si se requiere que las soluciones $\psi(\boldsymbol{x})$ satisfagan ciertas condiciones en el contorno S que rodea el volumen que nos ocupa V, la ecuación [3.153] no tendrá en general soluciones bien comportadas (es decir, finitas y continuas), excepto para ciertos valores de λ. Estos se denotan por λ_n y se llaman *valores propios* (o valores característicos), y las soluciones $\psi_n(\boldsymbol{x})$ reciben el nombre de *funciones propias* *. La ecuación diferencial para valores propios se expresa así:

$$\nabla^2\psi_n(\boldsymbol{x}) + [f(\boldsymbol{x}) + \lambda_n]\psi_n(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad [3.154]$$

Por métodos semejantes a los usados para probar la ortogonalidad de las funciones de Legendre o Bessel puede demostrarse que las funciones propias son ortogonales:

$$\int_V \psi_m(\boldsymbol{x})\psi_n(\boldsymbol{x})\, d^3x = \delta_{mn} \qquad [3.155]$$

donde las funciones propias se suponen normalizadas. El espectro de valores propios puede ser discreto, o continuo, o bien ambas cosas. Supondremos que la totalidad de las funciones propias forma un conjunto completo.

Supongamos ahora que queremos hallar la función de Green para la ecuación

$$\nabla_x^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') + [f(\boldsymbol{x}) + \lambda]G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \qquad [3.156]$$

donde λ *no* es, en general, uno de los valores propios de λ_n de [3.154]. Más aún, supongamos que la función de Green debe satisfacer las mismas condiciones en el contorno que las funciones propias de [3.154]. En tal caso, podemos desarrollar la función de Green en serie de funciones propias de la forma:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_n a_n(\boldsymbol{x}')\psi_n(\boldsymbol{x}) \qquad [3.157]$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial que satisfacen las funciones de Green, obtenemos el resultado:

$$\sum_m a_m(\boldsymbol{x}')(\lambda - \lambda_m)\psi_m(\boldsymbol{x}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \qquad [3.158]$$

Si multiplicamos ambos miembros por $\psi_n^*(\boldsymbol{x})$ e integramos sobre todo el volumen V, la condición de ortogonalidad [3.155] reduce el primer miembro a un solo término y hallamos:

$$a_n(\boldsymbol{x}') = 4\pi \frac{\psi_n^*(\boldsymbol{x}')}{\lambda_n - \lambda} \qquad [3.159]$$

* El lector familiarizado con la mecánica ondulatoria reconocerá la ecuación [3.153] como equivalente a la ecuación de Schrödinger para una partícula en un potencial.

Por lo que el desarrollo de la función de Green en serie de funciones propias es:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(\boldsymbol{x}')\psi_n(\boldsymbol{x})}{\lambda_n - \lambda} \qquad [3.160]$$

Para el caso de un espectro continuo se sustituye el sumatorio por una integral.

Para particularizar las consideraciones anteriores a la ecuación de Poisson, ponemos $f(\boldsymbol{x})=0$ y $\lambda=0$ en [3.156]. Como un primer ejemplo, esencialmente trivial, haremos que [3.154] sea la ecuación de ondas en todo el espacio:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_k(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad [3.161]$$

con el espectro continuo de autovalores k^2, y de funciones propias:

$$\psi_k(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \qquad [3.162]$$

La relación de normalización es:

$$\int \psi_{k'}^*(\boldsymbol{x})\psi_k(\boldsymbol{x})\, d^3x = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \qquad [3.163]$$

Por tanto, de acuerdo con [3.160], la función de Green para el espacio infinito tiene el desarrollo:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \, \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{k^2} \qquad [3.164]$$

Precisamente ésta es la representación tridimensional por integral de Fourier de $1/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$.

Como segundo ejemplo, consideraremos la función de Green para un problema de Dirichlet en el interior de una caja rectangular definida por seis planos, $x=y=z=0$, $x=a$, $y=b$, $z=c$. Hay que obtener el desarrollo por medio de funciones propias de la ecuación de ondas:

$$(\nabla^2 + k_{lmn}^2)\psi_{lmn}(x, y, z) = 0 \qquad [3.165]$$

donde las funciones propias que se anulan en todas las superficies del contorno son:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{lmn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \\ &\text{y} \\ &k_{lmn}^2 = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [3.166]$$

Por tanto, el desarrollo de la función de Green es:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{32}{\pi abc} \times \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x'}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y'}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z'}{c}\right)}{\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)} \qquad [3.167]$$

Para relacionar el desarrollo [3.167] con el tipo de expresiones obtenidas en las secciones 3.9 y 3.11, a saber, [3.125] para coordenadas esféricas y [3.148] para coordenadas cilíndricas, escribiremos a continuación el desarrollo análogo para la caja rectangular. Si tratamos las coordenadas x e y de la misma forma que (θ, ϕ) o (ϕ, z), mientras que la coordenada z recibe un tratamiento especial, obtenemos, para la función de Green:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{16\pi}{ab} \sum_{l,m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x'}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y'}{b}\right) \times \left\{ \frac{\operatorname{senh}(K_{lm} z_<) \operatorname{senh}[K_{lm}(c - z_>)]}{K_{lm} \operatorname{senh}(K_{lm} c)} \right\} \qquad [3.168]$$

donde

$$K_{lm} = \pi \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{1/2}$$

Si [3.167] y [3.168] deben ser iguales, se debe cumplir que la suma sobre n en [3.167] dé precisamente la representación en serie de Fourier, en el intervalo $(0, c)$, de la función de Green unidimensional en z que aparece en [3.168]:

$$\frac{\operatorname{senh}(K_{lm} z_<) \operatorname{senh}[K_{lm}(c - z_>)]}{K_{lm} \operatorname{senh}(K_{lm} c)} = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z'}{c}\right)}{K_{lm}^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \qquad [3.169]$$

se deja como ejercicio para el lector la comprobación de que [3.169] es la representación correcta en serie de Fourier.

En los problemas del final de este capítulo se encuentran más ejemplos de aplicación de esta técnica.

3.13. CONDICIONES DE CONTORNO MIXTAS. PLANO CONDUCTOR CON UN ORIFICIO CIRCULAR

Los problemas de potencial discutidos hasta ahora en el presente capítulo han sido de la clase ortodoxa, en los que las condiciones de contorno eran de un solo tipo (usualmente de Dirichlet) en toda la superficie límite. Sin embargo, al demostrar la unicidad de las soluciones de la ecuación de Laplace o Poisson (Sec. 1.9) vimos que las *condiciones de contorno mixtas,* en las que se especificaba el potencial en una parte del contorno y su derivada normal en el resto, también conducían a problemas de condiciones de contorno bien definidos y de solución única. Existe la tendencia en los libros de texto publicados de mencionar la posibilidad de estas condiciones al demostrar la unicidad, pero se ignoran tales problemas en la discusión posterior. El motivo de todo esto, como veremos, es que las condiciones mixtas son mucho más difíciles de manejar que las ordinarias.

Para hacernos una idea de las dificultades que aparecen al imponer condiciones mixtas, consideraremos el problema de un plano conductor infinita-

mente delgado, conectado a tierra, en el que se ha practicado un orificio circular de radio a, en presencia de un campo eléctrico que, a grandes distancias del orificio, es normal al plano y de módulo constante, teniendo valores diferentes a cada lado del plano. En la figura 3.13 se esquematiza la geometría del problema. El plano se encuentra en $z=0$, con el orificio centrado en el origen de coordenadas; las componentes del campo eléctrico que no se anu-

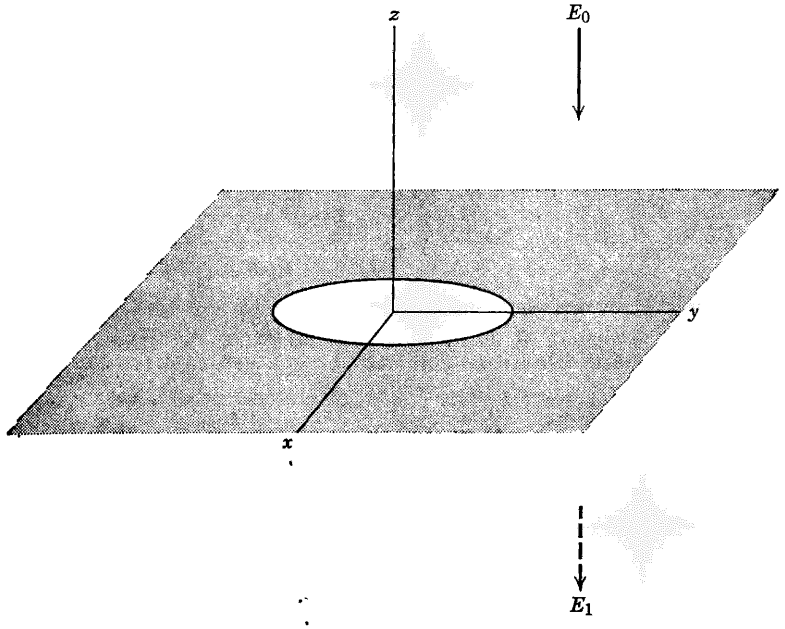


FIG. 3.13.

lan asintóticamente son, $E_z=-E_0$ para $z>0$ y $E_z=-E_1$ para $z<0$. El problema puede parecer inventado, pero si $E_0=0$ o $E_1=0$ es aplicable a la radiación de un orificio pequeño en la pared de una guía de ondas. El término «pequeño» significa pequeño comparado con la longitud de onda, de modo que pueden aplicarse condiciones electrostáticas (véase sección 9.5).

Como el campo eléctrico queda especificado lejos del orificio, escribimos el potencial en la forma:

$$\Phi=\begin{cases} E_0 z+\Phi^{(1)} & (z>0) \\ E_1 z+\Phi^{(1)} & (z<0) \end{cases} \qquad [3.170]$$

Si el orificio no estuviera, $\Phi^{(1)}$ sería cero. La cara superior de la lámina tendría una densidad de carga superficial uniforme $-\epsilon_0 E_0$ y en la cara inferior una densidad de carga $\epsilon_0 E_1$. Puede pensarse que el potencial $\Phi^{(1)}$ es el resultado de un reajuste de la carga superficial en la proximidad del orificio. Como esta densidad de carga se halla localizada sobre el plano $z=0$, el potencial $\Phi^{(1)}$ puede representarse por:

$$\Phi^{(1)}(x, y, z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma^{(1)}(x', y')\,dx'\,dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}$$

Esto indica que $\Phi^{(1)}$ es *par* en z, de modo que $E_x^{(1)}$ y $E_y^{(1)}$ son pares en z, pero $E_z^{(1)}$ es *impar*. Nótese que $E_x^{(1)}$ y $E_y^{(1)}$ son las componentes x e y del campo eléctrico total, pero que $E_z^{(1)}$ no es la componente z total a causa de [3.170]. Así, pues, aun cuando es impar en z, no se anula para $z=0$. En cambio, allí es discontinua. Como la *componente z total* del campo eléctrico debe ser continua al atravesar el orificio en $z=0$, debemos tener:

$$-E_0+E_z^{(1)}|_{z=0^+}=-E_1+E_z^{(1)}|_{z=0^-}$$

Esta relación, debido a que E_z es impar en z, determina que la componente normal del campo eléctrico sea:

$$E_z^{(1)}|_{z=0^+}=-E_z^{(1)}|_{z=0^-}=\frac{1}{2}(E_0-E_1)$$

supuesto que las coordenadas x e y corresponden al interior de la abertura ($0\leqslant\rho<a$). Para los puntos situados sobre la superficie conductora ($a\leqslant\rho<\infty$), el campo eléctrico no se conoce, pero el potencial es cero por hipótesis. Según [3.170] esto significa que $\Phi^{(1)}=0$ en ellos. Nótese que en la abertura no conocemos el potencial. Por consiguiente, tenemos un problema electrostático de condiciones de contorno con las *condiciones mixtas* siguientes:

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=0^+}&=-\frac{1}{2}(E_0-E_1) \quad \text{para } 0\leqslant\rho<a\\ \Phi^{(1)}|_{z=0}&=0 \quad \text{para } a\leqslant\rho<\infty\end{aligned}\right\} \qquad [3.171]$$

Como la situación presenta simetría acimutal, el potencial $\Phi^{(1)}$ puede escribirse (a partir de [3.110]) en función de las coordenadas esféricas en la forma:

$$\Phi^{(1)}(\rho,z)=\int_0^\infty dk\, A(k)e^{-k|z|}J_0(k\rho) \qquad [3.172]$$

Antes de proceder a ver cómo las condiciones de contorno determinan $A(k)$, vamos a relacionar $A(k)$ y sus derivadas para $k=0$ con el comportamiento asintótico del potencial. Las rápidas oscilaciones de $J_0(k\rho)$, o el decrecimiento rápido de $e^{-k|z|}$, para ρ o $|z|$ grandes implican que la integral de [3.172] recibe sus contribuciones más importantes de la región alrededor de $k=0$. El comportamiento asintótico de $\Phi^{(1)}$ está relacionado, por tanto, con el comportamiento de $A(k)$ para valores de k pequeños. Suponemos que $A(k)$ puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor de $k=0$:

$$A(k)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k^l}{l!}\frac{d^lA}{dk^l}(0)$$

Llevando esta serie a [3.172], el potencial $\Phi^{(1)}$ se convierte en:

$$\Phi^{(1)}(\rho,z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d^lA}{dk^l}(0)\,B_l(\rho,z) \qquad [3.173]$$

donde

$$B_l(\rho, z)=\frac{1}{l!}\int_0^\infty dk\, k^l e^{-k|z|}J_0(k\rho) \qquad [3.174]$$

Evidentemente, la integral [3.174] puede escribirse:

$$B_l=\frac{1}{l!}\left(-\frac{d}{d|z|}\right)^l\int_0^\infty dk\, e^{-k|z|}J_0(k\rho)$$

Haciendo uso del resultado del problema 3.14, *c)*, encontramos que B_l es:

$$B_l=\frac{1}{l!}\left(-\frac{d}{d|z|}\right)^l\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right) \qquad [3.175]$$

El lector no debe sorprenderse de que al hacer explícitamente el cálculo resulte:

$$B_l=\frac{P_l(|\cos\theta|)}{r^{l+1}} \qquad [3.176]$$

en la que $\cos\theta=z/r$ y $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$. El desarrollo asintótico [3.173] es, pues, un desarrollo de la forma [3.33] en armónicos esféricos:

$$\Phi^{(1)}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d^lA}{dk^l}(0)\cdot\frac{P_l(|\cos\theta|)}{r^{l+1}} \qquad [3.177]$$

Como se discute en el próximo capítulo, este desarrollo en potencias de r^{-1} se denomina desarrolo multipolar. El coeficiente $A(0)$, para $l=0$, es la *carga total*. El coeficiente para $l=1$, $dA(0)/dk$, es el *momento dipolar* en la dirección z, etc. Una vez conocida la función $A(k)$ pueden calcularse estas magnitudes, que describen el comportamiento asintótico del potencial, sin expresar en forma explícita el potencial mismo.

Ahora estamos en condiciones de discutir el problema con las condiciones de contorno mixtas. Con la forma supuesta [3.172] para $\Phi^{(1)}$ las condiciones de contorno [3.171] se convierten en un par de ecuaciones integrales de primera especie en $A(k)$:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty dk\, kA(k)J_0(k\rho)&=\tfrac{1}{2}(E_0-E_1) \quad \text{para } 0\leqslant\rho<a\\ \int_0^\infty dk\, A(k)J_0(k\rho)&=0 \quad \text{para } a\leqslant\rho<\infty\end{aligned}\right\} \qquad [3.178]$$

Tales parejas de ecuaciones integrales se conocen con el nombre de *ecuaciones integrales duales*. Una de las ecuaciones se cumple en una parte del intervalo de variación de la variable independiente, y la otra, en el resto del intervalo. La teoría general de estas ecuaciones integrales es complicada y no se halla muy desarrollada *. Hace precisamente unos cien años que H. WEBER resolvió el

* Hay una monografía reciente dedicada a este tema: I. N. SNEDDON, *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory*, North-Holland, Amsterdam, y Wiley-Interscience, Nueva York (1966). Véase también TRANTER, pág. 50 y Cap. VIII.

problema, íntimamente relacionado, del potencial de un disco circular cargado por medio de ciertas integrales discontinuas con funciones de Bessel. Apelaremos a una generalización de las fórmulas de Weber. Considérense las ecuaciones integrales duales:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dy\, yg(y)J_n(yx) = x^n \quad \text{para } 0 \leqslant x < 1 \\ &\int_0^\infty dy\, g(y)J_n(yx) = 0 \quad \text{para } 1 \leqslant x < \infty \end{aligned} \qquad [3.179]$$

El examen de la fórmula de Sonine y Schafheitlin para la integral de $J_\mu(at)J_\nu(bt)t^{-\lambda}$ [véase WATSON, pág. 398 y siguientes, o MAGNUS y OBERHETTINGER, pág. 35, ecuaciones (S_1) y (S_2)] muestra que la solución para $g(y)$ es:

$$g(y) = \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+3/2)} j_{n+1}(y) = \frac{\Gamma(n+1)J_{n+3/2}(y)}{\Gamma(n+3/2)(2y)^{1/2}} \qquad [3.180]$$

En esta relación $j_n(y)$ es la función esférica de Bessel de orden n (véase sección 16.1).

Para nuestro par de ecuaciones [3.177] tenemos $n=0$, $x=\rho/a$, $y=ka$. Por tanto, $A(k)$ es:

$$A(k) = \frac{(E_0 - E_1)a^2}{\pi} j_1(ka) = \frac{(E_0 - E_1)}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} ka}{k^2} - \frac{a\cos ka}{\pi}\right] \qquad [3.181]$$

El desarrollo de $A(k)$ para k pequeño toma la forma:

$$A(k) \simeq \frac{(E_0 - E_1)a^2}{3\pi}\left[ka - \frac{(ka)^3}{10} + \ldots\right]$$

Lo que significa que la carga total asociada con $\Phi^{(1)}$ es cero y que el primer término del potencial asintótico es la contribución de $l=1$:

$$\Phi^{(1)} \to \frac{(E_0 - E_1)a^3}{3\pi} \cdot \frac{|z|}{r^3} \qquad [3.182]$$

que disminuye con la distancia como r^{-2} y equivale a un *momento dipolar efectivo*:

$$\boldsymbol{p} = \mp 4\epsilon_0 \frac{(\boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{E}_1)a^3}{3} \quad (z \gtrless 0) \qquad [3.183]$$

La inversión del momento dipolar efectivo depende de si el punto de observación está por encima o por debajo del plano y es una consecuencia de que un potencial dipolar verdadero es impar en z, en tanto que [3.182] es par. La idea de que un pequeño orificio en una lámina plana conductora es equivalente lejos de la abertura a un dipolo normal a la superficie es importante para discutir las consecuencias de tales aberturas en las paredes de guías de onda y cavidades. La figura 9.4 expresa en forma gráfica el origen del campo tipo dipolar como consecuencia de la penetración de las líneas del campo a través del agujero para

terminar en el lado en que el campo uniforme es más pequeño. El dibujo adquiere significado cuantitativo a través de [3.182] y [3.183].

El potencial adicional $\Phi^{(1)}$ en la proximidad de la abertura puede calcularse mediante la expresión exacta:

$$\Phi^{(1)}(\rho, z)=\frac{(E_0-E_1)}{\pi} a^2 \int_0^\infty dk\, j_1(ka)e^{-k|z|}J_0(k\rho) \qquad [3.184]$$

Nos contentaremos con algunos casos especiales. El potencial adicional en el eje ($\rho=0$) es *:

$$\Phi^{(1)}(0, z)=\frac{(E_0-E_1)a}{\pi}\left[1-\frac{|z|}{a}\tan^{-1}\left(\frac{a}{|z|}\right)\right]$$

Esto para $|z|\gg a$ se reduce a [3.182] con $r=|z|$, mientras que para $|z|\to 0$ puede aproximarse mediante el primer término. En el plano de la abertura ($z=0$) el potencial $\Phi^{(1)}$ es, para $0\leqslant\rho<a$:

$$\Phi^{(1)}(\rho, 0)=\frac{(E_0-E_1)}{\pi}\sqrt{a^2-\rho^2}$$

(y, naturalmente, cero para $\rho\geqslant a$). El *campo eléctrico tangencial en la abertura* es radial:

$$\boldsymbol{E}_{\tan}(\rho, 0)=\frac{(E_0-E_1)}{\pi}\frac{\boldsymbol{\rho}}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \qquad [3.185]$$

Según la primera de las ecuaciones [3.171], la *componente normal* del campo eléctrico en la abertura es precisamente el valor medio de los campos uniformes por encima y por debajo del plano; es decir:

$$E_z(\rho, 0)=-\frac{1}{2}(E_0+E_1) \qquad [3.186]$$

Notemos que el valor del campo eléctrico tiene en el borde de la abertura una singularidad en raíz cuadrada, de acuerdo con las consideraciones de la sección 2.11. Las densidades superficiales de carga en las proximidades del orificio en las caras superior e inferior pueden calcularse de manera sencilla. El cálculo explícito se deja para los problemas.

Las superficies equipotenciales para el potencial total [3.170] cerca del orificio circular se indican en la figura 3.14 para el caso en que $E_1=0$. A distancias del orificio mayores de dos o tres veces el radio su existencia apenas es perceptible.

El problema clásico de un disco conductor cargado está discutido con detalle en SNEDDON (véanse citas). Las condiciones de contorno mixtas para el disco o el orificio pueden evitarse separando la ecuación de Laplace en coordenadas elípticas. En tal caso, el disco (o el agujero) se toman como la forma límite de una superficie esferoidal aplastada. Para este método, véase, por ejemplo, SMYTHE, págs. 124 y 171, o JEANS, pág. 244.

* Para integrales del tipo encontrado aquí véanse: WATSON, Cap. 13; GRADSHTEYN y y RYZHIK; MAGNUS, OBERHETTINGER y SONI, o el *Bateman Manuscript Project*.

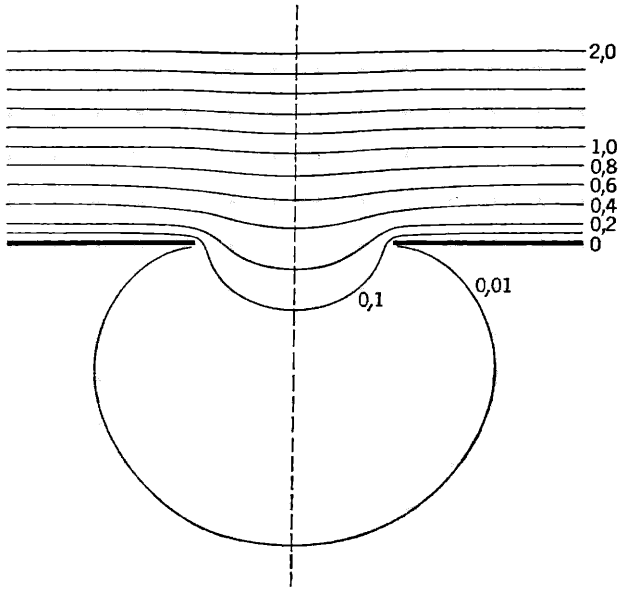


FIG. 3.14. Superficies equipotenciales en la proximidad de un orificio circular practicado en un plano conductor cuando el campo eléctrico normal vale E_0 en uno de los lados lejos del orificio y en el otro lado el campo tiende asintóticamente a cero ($E_1=0$). Las cifras corresponden a los valores del potencial tomando a E_0 como unidad. La distribución presenta simetría de revolución alrededor de la línea vertical de trazos que pasa por el centro del orificio.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

Los temas de funciones especiales de la Física matemática, solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, funciones hipergeométricas y teoría de Sturm-Liouville se encuentran tratados en muchos libros. Para el lector que no tenga sus preferencias, algunas de las posibilidades de elección son:

ARFKEN,
DENNERY y KRIZWICKI,
MORSE y FESHBACH,
WHITTAKER y WATSON.

Un tratamiento más elemental con ejemplos y problemas bien escogidos puede verse en:

HILDEBRAND, caps. 4, 5 y 8.

Aunque algo pasada de moda, puede verse la teoría de los polinomios de Legendre y armónicos esféricos, con muchos ejemplos y problemas, en:

BYERLY.

Para las propiedades puramente matemáticas de las funciones esféricas, una de las referencias más útiles en un solo tomo es:

MAGNUS y OBERHETTINGER, revisado ahora con SONI.

Para propiedades matemáticas con mayores detalles, véase:

WATSON, para las funciones de Bessel.
Bateman Manuscript Project books, para cualquier tipo de funciones especiales.

Los problemas electrostáticos en coordenadas cilíndricas, esféricas y otras se discuten extensamente en:

DURAND, cap. XI.
JEANS, cap. VIII.
SMYTHE, cap. V.
STRATTON, cap. III.

PROBLEMAS

3.1. Dos esferas concéntricas de radios a, b $(b > a)$ se hallan divididas en hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interior y el inferior de la exterior se mantienen al potencial V. Los otros dos hemisferios están a potencial cero.

Determínese el potencial en la región $a \leqslant r \leqslant b$ como una serie de polinomios de Legendre. Inclúyanse términos al menos hasta $l=4$. Compárese la solución con otros resultados ya conocidos en los casos límite $l \to \infty$ y $a \to 0$.

3.2. Una superficie esférica de radio R posee carga distribuida uniformemente sobre su superficie con una densidad $Q/4\pi a^2$, con la excepción de un casquete esférico situado en el Polo Norte y definido por el cono $\theta=\alpha$.

a) Demuéstrese que el potencial en el interior de la superficie esférica se puede expresar como:

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}[P_{l+1}(\cos\alpha)-P_{l-1}(\cos\alpha)]\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

en donde, para $l=0$, $P_{l-1}(\cos\alpha)=-1$. ¿Cuál es el potencial en el exterior?

b) Hállese la magnitud y dirección del campo eléctrico en el origen.

c) Discútanse las formas límites del potencial *a)* y campo eléctrico *b)* cuando el casquete esférico se hace 1) muy pequeño, 2) tan grande que el área cargada se convierte en un casquete muy pequeño situado en el Polo Sur.

3.3. Un disco conductor delgado y plano de radio R está situado en el plano $x-y$ con su centro en el origen y mantenido a potencial fijo V. Sabiendo que la densidad de carga sobre dicho disco a potencial fijo es proporcional a $(R^2-\rho^2)^{-1/2}$, siendo ρ la distancia medida desde el centro del disco:

a) Demuéstrese que para $r > R$ el potencial es

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\frac{2V}{\pi}\frac{R}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2l}P_{2l}(\cos\theta)$$

b) Hállese el potencial para $r < R$.

c) ¿Cuál es la capacidad del disco?

3.4. Dividimos la superficie de un conductor esférico hueco de radio interior a en un *número par* de segmentos iguales mediante un sistema de planos que pasan por el eje z y se distribuyen uniformemente según el ángulo ϕ (dichos segmentos tienen el aspecto de cuñas obtenidas al mondar una manzana o bien de la

superficie terrestre entre dos meridianos sucesivos). Los segmentos se ponen alternativamente a potenciales fijos $\pm V$.

a) Obténgase una representación, por desarrollo en serie, del potencial en el interior de la esfera para el caso general de $2n$ segmentos y llévese a cabo el cálculo de los coeficientes de la serie con la suficiente precisión que nos permita saber qué coeficientes son distintos de cero. Exprésense los coeficientes no nulos mediante una integral sobre $\cos\theta$.

b) En el caso $n=1$ (dos hemisferios), determínese de forma explícita el potencial hasta incluir todos los términos con $l=3$. Mediante una transformación de coordenadas, obsérvese que se reduce éste al resultado [3.36] de la sección 3.3.

3.5. Una esfera hueca de radio interior a tiene especificado el potencial sobre su superficie $\Phi=V(\theta,\phi)$. Pruébese la equivalencia entre las dos formas de solución del potencial en el interior de la esfera:

a)

$$\Phi(x)=\frac{a(a^2-r^2)}{4\pi}\int\frac{V(\theta',\phi')}{(r^2+a^2-2ar\cos\gamma)^{3/2}}\,d\Omega'$$

en donde $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi-\phi')$.

b)

$$\Phi(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}\left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta,\phi)$$

en donde $A_{lm}=\int d\Omega'\,Y^*_{lm}(\theta',\phi')V(\theta',\phi')$.

3.6. Dos cargas puntuales q y $-q$ están situadas sobre el eje z, en $z=+a$ y $z=-a$, respectivamente.

a) Encuéntrese el potencial electrostático como desarrollo en armónicos esféricos y potencias de r, tanto para $r>a$ como para $r<a$.

b) Manteniendo constante el producto $qa=p/2$, hágase el paso al límite $a\to 0$ y calcúlese el potencial para $r\neq 0$. Por definición, éste es un dipolo según el eje z y su potencial.

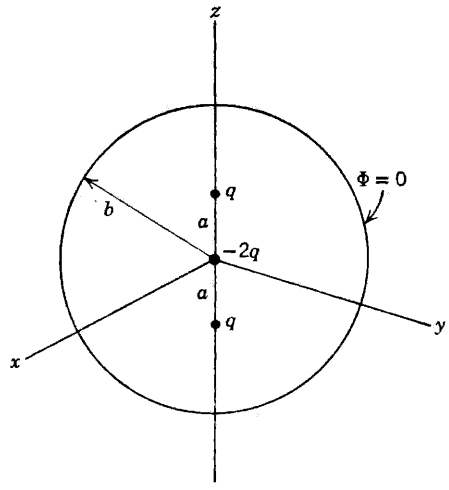
c) Supóngase ahora que el dipolo de la parte *b)* está rodeado por una capa esférica de radio b con centro en el origen y conectada a tierra. Hállese el potencial en todo el interior de la esfera por superposición lineal.

3.7. Tres cargas puntuales $(q,-2q,q)$ están situadas sobre una línea recta con separaciones iguales a. La carga central $(-2q)$ se halla en el centro de una capa esférica conductora unida a tierra y de radio b, como se indica en el esquema.

a) Exprésese el potencial de las tres cargas en ausencia de la esfera a tierra. Hállese la forma límite del potencial cuando $a\to 0$, en tanto que el producto $qa^2=Q$ se mantiene finito. Escríbase este último resultado en coordenadas esféricas.

b) La presencia de la esfera de radio b conectada a tierra altera el potencial para $r<b$. El potencial adicional puede considerarse debido a la densidad de carga superficial inducida sobre la cara interna en $r=b$ o por cargas imagen situadas para $r>b$. Utilícese la superposición lineal para satisfacer las condiciones de contorno y hállese el potencial en todos los puntos interiores a la esfera para $r<a$ y $r>a$. Demuéstrese que en el límite $a\to 0$:

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2Q}{r^3}\left(1-\frac{r^5}{b^5}\right)P_2(\cos\theta)$$



PROBLEMA 3.7.

3.8. Un cilindro circular recto, hueco, de radio b, tiene su eje coincidiendo con el eje z y sus bases en los planos $z=0$, $z=L$. El potencial en las bases es cero, mientras que en la superficie cilíndrica viene dado por $V(\phi, z)$. Mediante una separación de variables adecuada en coordenadas cilíndricas, hállese una solución por desarrollo en serie que nos dé el potencial en todos los puntos interiores al cilindro.

3.9. En el cilindro del problema anterior se divide la superficie cilíndrica en dos partes, una a potencial V y la otra a potencial $-V$, tales que

$$V(\phi, z)=\begin{cases} V \text{ para } -\dfrac{\pi}{2}<\phi<\dfrac{\pi}{2} \\ -V \text{ para } \dfrac{\pi}{2}<\phi<\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

a) Hállese el potencial en el interior del cilindro.

b) Suponiendo que $L \gg b$, considérese el potencial en el plano $z=L/2$ en función de ρ, ϕ, y compárese el resultado con el del problema bidimensional 2.9.

3.10. Demuéstrese que una función arbitraria $f(x)$ puede desarrollarse en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant a$ en serie de Fourier-Bessel modificada

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_\nu\left(y_{\nu n}\frac{x}{a}\right)$$

en donde $y_{\nu n}$ es la raíz enésima de $\dfrac{dJ_\nu(x)}{dx}=0$, y los coeficientes A_n vienen dados por

$$A_n=\frac{2}{a^2\left(1-\dfrac{\nu^2}{y_{\nu n}^2}\right)J_\nu^2(y_{\nu n})}\int_0^a f(x)xJ_\nu\left(y_{\nu n}\frac{x}{a}\right)dx$$

3.11. Una lámina delgada plana infinita de material conductor presenta una abertura circular de radio a. Llenando el hueco, hay un disco circular plano y delgado del mismo material y radio ligeramente menor de modo que está separado de la lámina por un anillo aislante muy estrecho. El disco se mantiene a un potencial fijo V, en tanto que la lámina infinita está a potencial cero.

a) Utilizando las coordenadas cilíndricas apropiadas, hállese una expresión integral para el potencial en cualquier punto por encima del plano en la que figuren funciones de Bessel.

b) Demuéstrese que el potencial a una distancia z a lo largo de la perpendicular que pasa por el centro del disco es:

$$\Phi_0(z)=V\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

c) Demuéstrese que el potencial a una distancia z a lo largo de la perpendicular que pasa por un punto del borde del disco es:

$$\Phi_a(z)=\frac{V}{2}\left[1-\frac{kz}{\pi a}K(k)\right]$$

siendo $k=2a/(z^2+4a^2)^{1/2}$, y $K(k)$, la integral elíptica completa de primera especie.

3.12. Resuélvase el problema de potencial 3.1, utilizando la función de Green adecuada obtenida en el texto, y compruébese que la solución hallada por este procedimiento está de acuerdo con la solución extraída directamente de la ecuación diferencial.

3.13. Una carga lineal de longitud $2d$, con una carga total Q, presenta una densidad lineal de carga que varía proporcionalmente a (d^2-z^2), siendo z la distancia desde el punto medio. Una capa esférica conductora de radio interior $b>d$ está centrada sobre el punto medio de la línea cargada.

a) Hállese el potencial en cualquier punto interior a la esfera mediante desarrollo en polinomios de Legendre.

b) Calcúlese la densidad superficial de carga inducida sobre la esfera.

c) Discútanse las respuestas *a)* y *b)* en el límite en que $d \ll b$.

3.14. *a)* Partiendo de la ecuación diferencial de Bessel, verifíquese la ecuación [3.112], o, lo que es equivalente, que:

$$\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')=\int_0^\infty kJ_m(k\rho)J_m(k\rho')dk$$

b) Obténgase el desarrollo siguiente:

$$\frac{1}{|x-x'|}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty dk\, e^{im(\phi-\phi')}J_m(k\rho)J_m(k\rho')e^{-k(z_>-z_<)}$$

c) Mediante procesos de paso a límite adecuados, demuéstrense los siguientes desarrollos:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=\int_0^\infty e^{-k|z|}J_0(k\rho)dk$$

$$J_0(k\sqrt{\rho+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\phi})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\phi}J_m(k\rho)J_m(k\rho')$$

$$e^{ik\rho\cos\phi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^m e^{im\phi}J_m(k\rho)$$

d) A partir del último desarrollo, obténgase la representación integral de la función de Bessel:

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi i^m}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\phi - im\phi}d\phi$$

Compárese con las representaciones integrales estándar.

3.15. La función de Green tipo Dirichlet para el espacio entre los planos $z=0$ y $z=L$ permite tratar el caso de una carga puntual o una distribución de carga entre planos conductores paralelos mantenidos a potencial cero.

a) Demuéstrese, utilizando coordenadas cilíndricas, que una forma de la función de Green es:

$$G(x, x')=\frac{4}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z'}{L}\right)I_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_<\right)K_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_>\right)$$

b) Demuéstrese que otra forma alternativa de dicha función es:

$$G(x, x')=2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dk\, e^{im(\phi-\phi')}J_m(k\rho)J_m(k\rho')\frac{\operatorname{senh}(kz_<)\operatorname{senh}[k(L-z_>)]}{\operatorname{senh}(kL)}$$

3.16. Se modifica la configuración del problema 3.11 colocando un plano conductor, mantenido a potencial cero, paralelo a, y a una distancia L, del plano que tiene insertado el disco. Concretamente, póngase el plano conectado a tierra en $z=0$ y el otro plano con el centro del disco sobre el eje z en $z=L$.

a) Demuéstrese que el potencial entre los planos puede escribirse en coordenadas cilíndricas (z, ρ, ϕ):

$$\Phi(z, \rho)=V\int_0^{\infty} d\lambda\, J_1(\lambda)J_0(\lambda\rho/a)\frac{\operatorname{senh}(\lambda z/a)}{\operatorname{senh}(\lambda L/a)}$$

b) Demuéstrese que en el límite $a\to\infty$, con z, ρ y L fijos, la solución de la parte *a)* se reduce al resultado esperado. Considerando este resultado como la respuesta de orden menor de un desarrollo en potencias de a^{-1}, estúdiese la cuestión de las correcciones a la expresión de menor orden si a es *grande* comparada con ρ y L, pero no es infinita. ¿Existen dificultades? ¿Puede usted obtener una *estimación* explícita de la corrección?

c) Considérese el límite $L\to\infty$, $(L-z)$, a y ρ fijos, y demuéstrese que se obtienen de nuevo los resultados del problema 3.11. ¿Qué hay sobre las correcciones para $L\gg a$, pero no infinito?

3.17. Considérese una carga puntual q entre dos planos conductores paralelos e infinitos mantenidos a potencial cero. En un sistema de coordenadas cilíndricas colóquense los planos en $z=0$ y $z=L$, con la carga sobre el eje z en $z=z_0$, $0<z_0<L$. Utilícese el teorema de reciprocidad de Green del problema 1.12 y el problema 3.16 como punto de comparación.

a) Demuéstrese que la cantidad de carga inducida sobre la placa en $z=L$, dentro de un círculo de radio a cuyo centro se halla sobre el eje z viene dada por

$$Q_L(a)=-\frac{c}{V}\Phi(z_0, 0)$$

siendo $\Phi(z_0, 0)$ el potencial del problema 3.16 calculado en $z=z_0$, $\rho=0$. Hállese

la carga total inducida sobre la placa superior. Compárese con la solución del problema 1.13 (en método y resultado).

b) Demuéstrese que la *densidad* de carga inducida en la placa superior puede escribirse como:

$$\sigma(\rho)=\frac{q}{2\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{\operatorname{senh}(kz_0)}{\operatorname{senh}(kL)}\,kJ_0(\rho)$$

Esta integral puede expresarse (véase, por ejemplo, GRADSHTEYN y RYZHIK, pág. 728, fórmula 6.666) como una serie infinita de las funciones modificadas de Bessel $K_0(n\pi\rho/L)$, demostrando que para distancias radiales grandes la densidad de carga inducida disminuye como $(\rho)^{-1/2}\,e^{-\pi\rho/L}$.

3.18. *a)* De los resultados del problema 3.15, o a partir de principios básicos, demuéstrese que el potencial de una carga puntual q entre dos planos conductores paralelos e infinitos mantenidos a potencial cero puede escribirse

$$\Phi(z,\sigma)=\frac{4q}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$$

si los planos están en $z=0$ y $z=L$ y la carga está sobre el eje z en el punto $z=z_0$.

b) Calcúlense las densidades superficiales de carga $\sigma_0(\rho)$ y $\sigma_L(\rho)$ en las placas inferior y superior. El resultado para $\sigma_L(\rho)$ es:

$$\sigma_L(\rho)=\frac{q}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$$

Discútase la relación entre esta expresión y la del problema 3.17, *b)*.

c) A partir de la respuesta al apartado *b)* calcúlese la carga total Q_L sobre la placa en $z=L$. Verifíquese el resultado, sumando la serie de Fourier o por otros medios, frente a la expresión conocida del problema 1.13. [C. Y. FONG y C. KITTEL, *Am. J. Phys.*, **35**, 1091 (1967).]

3.19. *a)* Utilizando la función de Green del problema 3.15, *b)*, en el límite $L\to\infty$, demuéstrese que la capacidad de un disco conductor, plano, delgado y de radio R, que está situado paralelo a un plano conductor conectado a tierra, y a una distancia d del mismo, viene dada por

$$C^{-1}=\int_0^\infty dk\,(1-e^{-2kd})\,\frac{\left[\int_0^R \rho J_0(k\rho)\sigma(\rho)d\rho\right]^2}{\left[\int_0^R \rho\sigma(\rho)d\rho\right]^2}$$

siendo $\sigma(\rho)$ la densidad de carga sobre el disco.

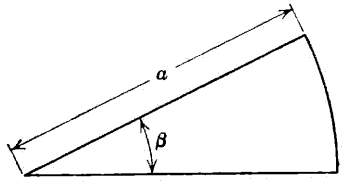
b) Utilícese la expresión de la parte *a)* como un principio variacional para C^{-1}, haciendo la aproximación de que $\sigma(\rho)=$ cte. Demuéstrese explícitamente que se obtiene el valor límite correcto para C^{-1} cuando $d\ll R$. Determínese el valor aproximado de C^{-1} para un disco aislado ($d\gg R$) y calcúlese la relación entre este valor y el resultado exacto, $C^{-1}=(\pi/2)R^{-1}$.

c) Como una forma mejor de tanteo para $\sigma(\rho)$ considérese una combinación lineal de una constante y $(R^2-\rho^2)^{-1/2}$, que es la forma correcta para un disco aislado.

Para la parte *b)* son de utilidad las integrales siguientes:

$$\int_0^\infty dt[J_1(t)/t]^2=\frac{4}{3\pi}, \qquad \int_0^\infty dt\, J_1^2(t)/t=1/2$$

3.20. Un problema de potencial bidimensional en coordenadas polares presenta la geometría indicada en el esquema, estando la región limitada por las superficies $\phi=0$, $\phi=\beta$ y $\rho=a$.



PROBLEMA 3.20.

Utilizando la separación de variables en coordenadas polares, demuéstrese que la función de Green puede escribirse:

$$G(\rho,\phi;\rho'\phi')=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{m}\rho_<^{m\pi/\beta}\left(\frac{1}{\rho_>^{m\pi/\beta}}-\frac{\rho_<^{m\pi/\beta}}{a^{2m\pi/\beta}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\phi'}{\beta}\right)$$

3.21. Se coloca una carga puntual $4\pi\epsilon_0$ en el punto (ρ',ϕ',z') en el interior de una caja cilíndrica, a potencial cero, definida por las superficies $z=0$, $z=L$, $\rho=a$. Demuéstrese que el potencial en el interior de la caja puede expresarse en las formas siguientes:

$$\Phi(x,x')=\frac{4}{a}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{im(\phi-\phi')}J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right)J_m\left(\frac{x_{mn}\rho'}{a}\right)}{x_{mn}J_{m+1}^2(x_{mn})\operatorname{senh}\left(\frac{x_{mn}L}{a}\right)}$$

$$\times\operatorname{senh}\left[\frac{x_{mn}}{a}z_<\right]\operatorname{senh}\left[\frac{x_{mn}}{a}(L-z_>)\right]$$

$$\Phi(x,x')=\frac{4}{L}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{im(\phi-\phi')}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z'}{L}\right)\frac{I_m\left(\frac{n\pi\rho_>}{L}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}$$

$$\times\left[I_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)K_m\left(\frac{n\pi\rho_>}{L}\right)-K_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)I_m\left(\frac{n\pi\rho_>}{L}\right)\right]$$

$$\Phi(x,x')=\frac{8}{La^2}$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right)J_m\left(\frac{x_{mn}\rho'}{a}\right)e^{im(\phi-\phi')}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi z}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi z'}{L}\right)}{\left[\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\right]J_{m+1}^2(x_{mn})}$$

Discútase la relación entre la última expresión (con un sumatorio extra) y las otras dos.

3.22. Las paredes de la caja cilíndrica conductora del problema anterior están todas a potencial cero, con la excepción de un disco en la base superior, definido por $\rho=b<a$, que se halla a potencial V.

a) Utilizando las distintas formas de la función de Green obtenidas en el problema 3.21, hállense tres desarrollos del potencial en el interior del cilindro.

b) Calcúlese numéricamente para cada serie la razón del potencial en $\rho=0$, $z=L/2$ al potencial del disco, suponiendo que $b=L/4=a/2$. Trátese de obtener por lo menos dos cifras significativas exactas. ¿Converge una de las series con menos rapidez que la otra? ¿Por qué?

(JAHNKE, EMDE y LOSCH tienen tablas de J_0 y J_1, I_0 e I_1, $(2/\pi)K_0$ y $(2/\pi)K_1$. WATSON también tiene numerosas tablas.)

3.23. Considérense las densidades superficiales de carga para el plano conductor con un orificio circular de radio a del problema de la sección 3.13.

a) Demuéstrese que las densidades superficiales de carga en las caras superior e inferior del plano, para $\rho\geqslant a$, son:

$$\sigma_+(\rho)=-\epsilon_0 E_0+\Delta\sigma(\rho)$$
$$\sigma_-(\rho)=\epsilon_0 E_1+\Delta\sigma(\rho)$$

donde

$$\Delta\sigma(\rho)=-\frac{\epsilon_0(E_0-E_1)}{\pi}\left[\frac{a}{\sqrt{\rho^2-a^2}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)\right]$$

¿Cómo se comporta $\Delta\sigma(\rho)$ para ρ grande? Si $\Delta\sigma(\rho)$ se define en función de $\Phi^{(1)}$, ¿sería cero para $\rho<a$? Explíquese.

b) Demuéstrese por integración directa que

$$\lim_{R\to\infty}\left[2\pi\int_0^R d\rho\,\rho(\sigma_++\sigma_-)+2\pi\int_0^R d\rho\,\rho\,\epsilon_0(E_0+E_1)\right]=0$$

Interprétese este resultado.

MULTIPOLOS, ELECTROSTATICA DE LOS MEDIOS MACROSCOPICOS, DIELECTRICOS

En primer lugar, este capítulo trata del potencial creado por distribuciones localizadas de carga y de su desarrollo en multipolos. Tal desarrollo se hace mediante armónicos esféricos, pero en los primeros multipolos se relacionarán con las componentes rectangulares. También se discute la energía de un multipolo en un campo exterior. Se da un esquema de la deducción elemental de las ecuaciones macroscópicas de la electrostática, pero se difiere hasta el capítulo 6 un tratamiento más cuidadoso. A continuación se describen los dieléctricos y las condiciones de contorno apropiadas y se resuelven algunos problemas típicos de condiciones de contorno con dieléctricos. Se recurre a modelos clásicos sencillos para ilustrar los aspectos fundamentales de la polarizabilidad y susceptibilidad atómicas. Finalmente, se discute la cuestión de la energía electrostática y las fuerzas en presencia de dieléctricos.

4.1. EL DESARROLLO MULTIPOLAR

Una distribución localizada de carga viene descrita por una densidad $\rho(\boldsymbol{x}')$ que es distinta de cero solamente en el interior de una esfera de radio R * con centro en un cierto origen. El potencial exterior a la esfera puede expresarse como desarrollo en armónicos esféricos donde la elección de la forma de los coeficientes se ha hecho con miras posteriores:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \qquad [4.1]$$

La ecuación [4.1] recibe el nombre de desarrollo en multipolos; el término $l=0$ se conoce como término monopolar, a $l=1$ corresponde el término dipolar, etc. La razón de estas denominaciones se verá más adelante. El problema que hay que resolver es la determinación de las constantes q_{lm} basándonos en la densidad de carga $\rho(\boldsymbol{x}')$. La solución se obtiene muy fácilmente a partir de la integral [1.17] para el potencial:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x'$$

* La esfera de radio R es un artificio conceptual utilizado únicamente para dividir el espacio en regiones con carga y sin ella. Si la densidad de carga disminuye con la distancia más rápidamente que cualquier potencia, el desarrollo en multipolos es válido a distancias suficientemente grandes.

si utilizamos el desarrollo [3.70] para $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$. Puesto que por el momento nos interesa el potencial exterior a la distribución de carga, $r_<=r'$ y $r_>=r$. Así tenemos:

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}\left[\int Y^*_{lm}(\theta,\phi)r'^l\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x'\right]\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \qquad [4.2]$$

Por tanto, los coeficientes de [4.1] son:

$$q_{lm}=\int Y^*_{lm}(\theta',\phi')r'^l\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x' \qquad [4.3]$$

Estos coeficientes reciben el nombre de *momentos multipolares*. Para ver su interpretación física expondremos a continuación la forma explícita de los primeros términos en coordenadas cartesianas:

$$q_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x'=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,q \qquad [4.4]$$

$$\left.\begin{aligned} q_{11}&=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int(x'-iy')\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x'=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x-ip_y)\\ q_{10}&=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int z'\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x'=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,p_z \end{aligned}\right\} \qquad [4.5]$$

$$\left.\begin{aligned} q_{22}&=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int(x'-iy')^2\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x'=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{11}-2iQ_{12}-Q_{22})\\ q_{21}&=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int z'(x'-iy')\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x'=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(Q_{13}-iQ_{23})\\ q_{20}&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\int(3z'^2-r'^2)\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\,Q_{33} \end{aligned}\right\} \qquad [4.6]$$

Hemos dado solamente los momentos para $m\geqslant 0$, ya que, según [3.54], los momentos para $m<0$ de una distribución real de cargas están relacionados mediante la expresión:

$$q_{l,-m}=(-1)^m q^*_{lm} \qquad [4.7]$$

En las ecuaciones [4.4]-[4.6], q es la carga total o momento monopolar, $\boldsymbol{p}$ es el momento dipolar eléctrico:

$$\boldsymbol{p}=\int\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x' \qquad [4.8]$$

y Q_{ij} es el tensor momento cuadripolar de traza nula:

$$Q_{ij}=\int(3x'_ix'_j-r'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x' \qquad [4.9]$$

Vemos que los coeficientes multipolares de orden l, en número de $(2l+1)$, son combinaciones lineales de los multipolos correspondientes expresados en coordenadas cartesianas. El desarrollo de $\Phi(x)$ en tales coordenadas es:

$$\phi(x)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{r}+\frac{p\cdot x}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5}+\ldots\right\} \qquad [4.10]$$

cuya obtención directa por el desarrollo en serie de Taylor de $1/|x-x'|$ se deja como ejercicio al lector. Continuar el desarrollo [4.10] más allá de los términos cuadripolares se hace progresivamente más engorroso.

Las componentes del campo eléctrico de un multipolo dado se expresan con mayor facilidad en coordenadas esféricas. Las componentes del gradiente, cambiado de signo, de un término de [4.1] con valores determinados de l y m son, en coordenadas esféricas:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{(l+1)}{\epsilon_0(2l+1)}\,q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+2}} \\ E_\theta &= \frac{-1}{\epsilon_0(2l+1)}\,q_{lm}\frac{1}{r^{l+2}}\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\theta,\phi) \\ E_\phi &= \frac{-1}{\epsilon_0(2l+1)}\,q_{lm}\frac{1}{r^{l+2}}\frac{im}{\operatorname{sen}\theta}Y_{lm}(\theta,\phi) \end{aligned}\right\} \qquad [4.11]$$

se puede expresar $\partial Y_{lm}/\partial\theta$ e $Y_{lm}/\operatorname{sen}\theta$ como combinaciones lineales de otros de los Y_{lm}, pero tales expresiones no resultan particularmente interesantes y por ello las omitiremos. El método apropiado para describir un campo multipolar vectorial es mediante armónicos esféricos *vectoriales*, lo cual se tratará en el capítulo 16.

Para un dipolo p en la dirección del eje z, el campo [4.11] se reduce a la forma ya conocida:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= \frac{p\operatorname{sen}\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [4.12]$$

En forma vectorial puede escribirse por recombinación de [4.12] o bien directamente calculando el gradiente del término dipolar de [4.10]. Resulta así que el campo en un punto x debido a un dipolo p situado en x_0 es:

$$E(x)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3n(p\cdot n)-p}{|x-x_0|^3} \qquad [4.13]$$

donde n es el vector unitario dirigido de x_0 a x.

Hay que hacer dos observaciones importantes. La primera se refiere a la relación entre los momentos multipolares cartesianos como el [4.8] y los momentos multipolares esféricos [4.3]. De los primeros hay $(l+1)(l+2)/2$ y, por tanto, para $l>1$ son más numerosos que las $(2l+1)$ componentes esféricas. En ello no existe contradicción alguna. La razón de la diferencia yace en las diferentes propiedades

de transformación rotacional de los dos tipos de momentos multipolares (véase el problema 4.3). Adviértase que al definir el momento cuadripolar cartesiano [4.9] como un tensor de *traza nula* hemos reconocido expresamente la diferencia para el caso $l=2$.

La segunda observación es que, en general, los momentos multipolares, coeficientes en el desarrollo [4.1], dependen de la elección de origen. Considérese como ejemplo llamativo, una *carga puntual* e situada en $\boldsymbol{x}_0=(r_0, \theta_0, \phi_0)$. Su expansión multipolar de la forma [4.1] tiene los momentos multipolares:

$$q_{lm}=er_0{}^lY^*_{lm}(\theta_0, \phi_0)$$

En general, éstos no se anulan para cualquier l y m. Sólo el multipolo $l=0$, $q_{00}=e/\sqrt{4\pi}$ es independiente de la posición de la carga puntual. Para dos cargas puntuales $+e$ y $-e$, situadas en $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{x}_1$, respectivamente, los momentos multipolares son:

$$q_{lm}=e[r_0{}^lY^*_{lm}(\theta_0, \phi_0)-r_1{}^lY^*_{lm}(\theta_1, \phi_1)]$$

En este caso el momento multipolar $l=0$ se anula, y los momentos con $l=1$ son

$$q_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,e(z_0-z_1)$$

$$q_{11}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,e[(x_0-x_1)-i(y_0-y_1)]$$

Estos momentos son independientes de la localización del origen, dependiendo únicamente de la posición relativa de las dos cargas, pero todos los momentos superiores dependen también de la localización del origen. Estos ejemplos sencillos son casos particulares de un teorema general (véase el problema 4.4); los valores de q_{lm} para el *momento multipolar no nulo de menor orden* de cualquier distribución de carga *son independientes de la elección del origen* de coordenadas, pero todos los momentos multipolares superiores dependen en general de la localización del origen.

Antes de abandonar la formulación general de los multipolos, vamos a considerar un resultado que resulta útil para aclarar las diferencias básicas entre los dipolos eléctricos y magnéticos (véase sección 5.6), así como para otros fines. Considérese una distribución localizada de carga $\rho(\boldsymbol{x})$ que da lugar a un campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ en todo el espacio. Deseamos calcular la integral de $\boldsymbol{E}$ extendida al volumen de una esfera de radio R. Empezaremos por examinar el problema general, pero después particularizaremos para los dos casos extremos indicados en la figura 4.1, aquel en el cual la esfera contiene toda la carga y aquel otro en el cual la carga yace toda ella fuera de la esfera. Eligiendo el origen de coordenadas en el centro de la esfera, la integral de volumen del campo eléctrico será:

$$\int_{r<R}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\,d^3x=-\int_{r<R}\nabla\Phi\,d^3x \qquad [4.14]$$

Esta ecuación puede convertirse en una integral extendida a la superficie de la esfera:

$$\int_{r<R} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\, d^3x = -\int_{r=R} R^2\, d\Omega\, \Phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \qquad [4.15]$$

siendo $\boldsymbol{n}$ la normal dirigida hacia fuera ($\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}/R$). Sustituyendo la expresión [1.17] para el potencial se obtiene

$$\int_{r<R} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\, d^3x = -\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\rho(x')\int_{r=R} d\Omega\, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \qquad [4.16]$$

Para realizar la integración angular observamos en primer lugar que $\boldsymbol{n}$ puede escribirse, en función de los ángulos (θ, ϕ) de las coordenadas esféricas, en la forma:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi + \boldsymbol{k}\cos\theta$$

Evidentemente, las diferentes componentes de $\boldsymbol{n}$ son combinaciones lineales de los Y_{lm} *exclusivamente* con $l=1$. Cuando se introduce [3.38]-[3.70] en la

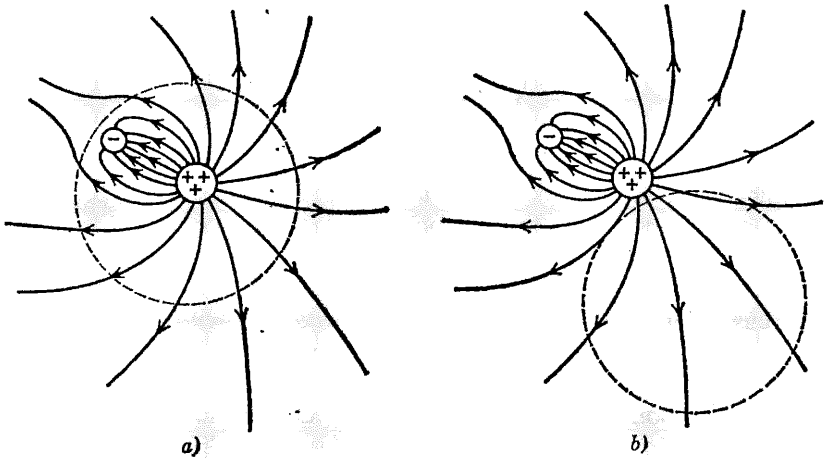


FIG. 4.1. Esferas dentro de las cuales se calcula la integral de volumen del campo eléctrico para dos configuraciones de carga, una interior y otra exterior.

[4.16], la ortogonalidad de los Y_{lm} asegura que desaparecen todos los términos de la serie salvo el $l=1$. Entonces tenemos:

$$\int_{r=R} d\Omega\, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{r_<}{r_>^2}\int d\Omega\, \boldsymbol{n}\cos\gamma \qquad [4.16']$$

siendo $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\theta'\cos(\phi-\phi')$. La integral angular es igual

a $4\pi n'/3$, siendo $n' = r'/r'$. Así, pues, la integral de [4.16] es:

$$\int_{r<R} E(x)\, d^3x = -\frac{R^2}{3\epsilon_0} \int d^3x' \frac{r_<}{r_>^2}\, n'\rho(x') \qquad [4.17]$$

en la que $(r_<, r_>) = (r', R)$, o bien (R, r'), según cuál sea mayor, r' o R.

Si la esfera de radio R encierra completamente la distribución de carga, como indica la figura 4.1, *a*, entonces $r_< = r'$ y $r_> = R$ en [4.17]. La integral de volumen del campo eléctrico en el volumen de la esfera resulta ser:

$$\int_{r<R} E(x)\, d^3x = -\frac{p}{3\epsilon_0} \qquad [4.18]$$

siendo p el momento dipolar eléctrico [4.8] de la distribución de carga con respecto al centro de la esfera. Nótese que esta integral de volumen es independiente del tamaño de la región *esférica* de integración supuesto que toda la carga está dentro.

Por otra parte, si la situación es la dibujada en la figura 4.1, *b*, siendo toda la carga exterior a la esfera de interés, $r_< = R$ y $r_> = r'$ en [4.17]. Entonces tenemos:

$$\int_{r<R} E(x)\, d^3x = -\frac{R^3}{3\epsilon_0} \int d^3x \frac{n'}{r'^2}\, \rho(x')$$

La integral puede identificarse, según la ley de Coulomb [1.5], con el campo eléctrico en el centro de la esfera cambiado de signo. Por tanto, la integral de volumen de E es:

$$\int_{r<R} E(x)\, d^3x = \frac{4\pi}{3} R^3 E(0) \qquad [4.19]$$

En otras palabras, el valor medio del campo eléctrico en un volumen esférico que no contiene cargas es el valor del campo en el centro de la esfera.

El resultado [4.18] implica una modificación de la expresión [4.13] del campo eléctrico de un dipolo. Para que sea consistente con [4.18], el campo dipolar debe escribirse:

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3n(p\cdot n) - p}{|x - x_0|^3} - \frac{4\pi}{3}\, p\delta(x - x_0) \right\} \qquad [4.20]$$

La función delta adicional no contribuye al campo fuera de la posición del dipolo mismo. Su propósito es proporcionar el valor requerido de la integral de volumen [4.18], con el *convenio* de que la integral de volumen del primer término es cero (debido a la integración angular), así la singularidad en $x = x_0$ da lugar a un resultado que de otro modo resultaría ambiguo. La ecuación [4.20], y su contrapartida para el dipolo magnético [5.64], cuando se maneja con cuidado, puede emplearse como si los dipolos fueran dipolos puntuales idealizados; los términos que contienen la función delta portan la información esencial sobre las distribuciones de carga y corriente que en realidad son finitas.

4.2. DESARROLLO EN MULTIPOLOS DE LA ENERGIA DE UNA DISTRIBUCION DE CARGA EN UN CAMPO EXTERIOR

Si se sitúa una distribución localizada de carga, descrita por $\rho(\boldsymbol{x})$, en un potencial *externo* $\Phi(\boldsymbol{x})$, la energía electrostática del sistema es:

$$W = \int \rho(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})\, d^3x \qquad [4.21]$$

Si en la región en que $\rho(\boldsymbol{x})$ no es despreciable el potencial Φ varía en forma suave, puede desarrollarse en serie de Taylor en el entorno de un origen escogido convenientemente:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi(0) + \boldsymbol{x}\cdot\nabla\Phi(0) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j x_i x_j \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_j}(0) + \ldots \qquad [4.22]$$

Y teniendo en cuenta que el campo eléctrico es $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$, podemos hacer intervenir $\boldsymbol{E}$ en los dos términos. Así, [4.22] toma la forma:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi(0) - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_i\sum_j x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \ldots$$

Como para el campo externo $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$, podemos restar del último término:

$$\frac{1}{6}r^2\nabla\cdot\boldsymbol{E}(0)$$

y obtenemos finalmente la expresión:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi(0) - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_i\sum_j (3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \ldots \qquad [4.23]$$

Sustituyendo esta expresión en [4.21] y mediante las definiciones de carga total, momento dipolar [4.8] y momento cuadripolar [4.9], la energía toma la forma siguiente:

$$W = q\Phi(0) - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_i\sum_j Q_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \ldots \qquad [4.24]$$

Esta expresión nos pone de manifiesto la forma característica en que los distintos multipolos interaccionan con un campo externo: la carga con el potencial, el dipolo con el campo eléctrico, el cuadripolo con el «gradiente» del campo, y así sucesivamente.

La interacción cuadripolar resulta de particular interés en Física nuclear. Los núcleos atómicos pueden tener momentos cuadripolares eléctricos, cuyo valor y signo reflejan la naturaleza de las fuerzas entre neutrones y protones, así como la forma de los núcleos mismos. Los niveles de energía o estados del núcleo se caracterizan mediante los números cuánticos del momento angular total J y su

proyección M sobre el eje z, así como otros que designaremos con el índice general α. Un estado nuclear dado tiene asociada con él una distribución mecanocuántica de carga * $\rho_{JM\alpha}(x)$, que depende de los números cuánticos (J, M, α), pero que presenta simetría cilíndrica alrededor del eje z. Así, pues, el único momento cuadripolar que no se anula es q_{20} en [4.6], o bien Q_{33} en [4.9] **. Se define el momento cuadripolar de un estado nuclear como el valor de $(1/e)\ Q_{33}$ con la densidad de carga $\rho_{JM\alpha}(x)$, siendo e la carga del protón:

$$Q_{JM\alpha}=\frac{1}{e}\int (3z^2-r^2)\rho_{JM\alpha}(x)\, d^3x \qquad [4.25]$$

Por tanto, las dimensiones de $Q_{JM\alpha}$ son (longitud)^2. A menos que nos hallemos en circunstancias excepcionales (por ejemplo, núcleos de átomos con capas electrónicas completas), los núcleos están sometidos a campos internos que presentan gradientes del campo en las proximidades del núcleo. Por tanto, y de acuerdo con [4.24], a la energía del núcleo contribuirá la interacción cuadripolar. Los estados a los que corresponde diferente valor de M para el mismo de J tendrán momentos cuadripolares $Q_{JM\alpha}$ diferentes, y de este modo, la degeneración que pudiera aparecer en M se evitará por acoplamiento cuadripolar con el campo eléctrico «externo» (campo debido a la red cristalina o a las moléculas). La detección de estas pequeñas diferencias energéticas mediante las técnicas de radiofrecuencia permite determinar los momentos cuadrupolares de los núcleos ***.

La energía de interacción entre dos dipolos $\boldsymbol{p}_1$ y $\boldsymbol{p}_2$ se puede obtener directamente partiendo de [4.24] y mediante el uso del campo dipolar [4.20]. La energía potencial mutua es:

$$W_{12}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2-3(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_2)}{|x_1-x_2|^3} \qquad [4.26]$$

donde $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario en la dirección de (x_1-x_2) y se ha supuesto que $x_1\neq x_2$. La interacción dipolo-dipolo es atractiva o repulsiva, según la orientación de los dipolos. El valor de la interacción, promediado sobre las posiciones relativas de los dipolos, es cero cuando se fijan la orientación y la separación entre los dipolos. Si los momentos son en general paralelos, la atracción (la repulsión) tiene lugar cuando los dipolos están orientados más o menos paralelos (perpendiculares) a la línea que une sus centros. Cuando los dipolos son antiparalelos ocurre al revés. Los valores extremos de la energía potencial son de igual magnitud.

* Para una discusión elemental de los aspectos cuánticos del problema, véase BLATT y WEISSKOPF, pág. 23 y sig.

** En realidad, Q_{11} y Q_{22} son distintos de cero, pero no independientes de Q_{33}, cumpliéndose la relación $Q_{11}=Q_{22}=-\frac{1}{2}Q_{33}$.

*** «El momento cuadripolar de un núcleo», que se designa por Q, se define como el valor de $Q_{JM\alpha}$ en el estado $J=M$. Véase BLATT y WEISSKOPF, *op. cit.*

4.3. TRATAMIENTO ELEMENTAL DE LA ELECTROSTATICA EN PRESENCIA DE MEDIOS MATERIALES

En los capítulos 1, 2 y 3 considerábamos campos y potenciales electrostáticos en presencia de cargas y conductores, pero sin ningún otro medio material. Por consiguiente, no hacíamos distinción alguna entre campos microscópicos y campos macroscópicos, aun cuando nuestro tatamiento de los conductores de forma idealizada con densidades de carga *superficial* implicaba una descripción macroscópica. El aire es lo suficientemente tenue para que el despreciar sus propiedades dieléctricas no cause un gran error: nuestros resultados hasta este momento son aplicables a él. Pero una gran parte de la electrostática se ocupa de cargas y campos en los medios materiales cuya respuesta eléctrica debe tenerse en cuenta. En la Introducción indicábamos la necesidad de promediar en regiones macroscópicamente pequeñas, pero microscópicamente grandes, a fin de obtener las ecuaciones de Maxwell apropiadas para los fenómenos macroscópicos. Esto se hace con cuidado en el capítulo 6, una vez que se han discutido las ecuaciones de Maxwell con variaciones temporales. Por el momento únicamente recordaremos al lector las líneas generales de una discusión elemental de la polarización de un modo que palie las dificultades y los aspectos, a veces sutiles, del procedimiento de obtener la media e introducir las magnitudes macroscópicas.

La primera observación es que cuando se realiza el promedio de la ecuación $\nabla \times \boldsymbol{E}_{\text{micro}} = 0$, se cumple para el campo eléctrico promediado, esto es, para el campo macroscópico $\boldsymbol{E}$, la misma ecuación, a saber,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad [4.27]$$

Esto significa que el campo eléctrico aún es derivable en electrostática de un potencial $\Phi(\boldsymbol{x})$.

Si se aplica un campo eléctrico a un medio formado por un gran número de átomos o moléculas, las cargas ligadas en cada molécula responderán al campo aplicado y realizarán movimientos perturbados. La densidad de carga molecular será distorsionada. Los momentos multipolares de cada molécula serán diferentes de los que eran en ausencia del campo. En las sustancias sencillas, los momentos multipolares son todos cero cuando no hay campo aplicado, al menos si se promedia sobre muchas moléculas. El multipolo molecular dominante cuando se aplica el campo es el dipolo. Por consiguiente, se produce en el medio una *polarización eléctrica* $\boldsymbol{P}$ (momento dipolar por unidad de volumen) dada por:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \sum_i N_i \langle \boldsymbol{p}_i \rangle \qquad [4.28]$$

siendo $\boldsymbol{p}_i$ el momento dipolar del i-ésimo tipo de molécula del medio, la media se toma en un pequeño volumen centrado en $\boldsymbol{x}$ y N_i es el número medio de moléculas del i-ésimo tipo por unidad de volumen en el punto $\boldsymbol{x}$. Si las moléculas tienen una carga neta e_i y, además, hay un exceso macroscópico de carga neta, la densidad de carga a nivel macroscópico será

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_i N_i \langle e_i \rangle + \rho_{\text{exceso}} \qquad [4.29]$$

Usualmente la carga molecular media es cero. Entonces la densidad de carga es el exceso de carga neta (promediado de modo adecuado).

Si ahora miramos el medio desde un punto de vista macroscópico, podemos construir el potencial o el campo por superposición lineal de las contribuciones de cada elemento de volumen macroscópicamente pequeño ΔV en el punto variable x'. Por tanto, la carga de ΔV es $\rho(x)\Delta V$ y el momento dipolar de ΔV es $\boldsymbol{P}(x')\Delta V$. Si no existen otras densidades macroscópicas de momento multipolar superiores, el potencial $\Delta\Phi(x, x')$ debido a la configuración de momentos en ΔV, como puede verse de [4.10], estará dado sin aproximación alguna por:

$$\Delta\Phi(x, x') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\rho(x')}{|x-x'|}\Delta V + \frac{\boldsymbol{P}(x')\cdot(x-x')}{|x-x'|^3}\Delta V\right\} \qquad [4.30]$$

supuesto que x está fuera de ΔV. A continuación, tratamos ΔV como infinitesimal (macroscópicamente), lo sustituimos por d^3x' e integramos sobre todo el espacio, con lo cual obtenemos el potencial:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\left[\frac{\rho(x')}{|x-x'|} + \boldsymbol{P}(x')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)\right] \qquad [4.31]$$

El segundo término es análogo al potencial de una capa dipolar [1.25], pero corresponde a una distribución de dipolos en volumen. Una integración por partes transforma el potencial en:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\frac{1}{|x-x'|}[\rho(x') - \nabla'\cdot\boldsymbol{P}(x')] \qquad [4.32]$$

Esta es precisamente la expresión usual para el potencial debido a una distribución de carga $(\rho - \nabla\cdot\boldsymbol{P})$. Por consiguiente, siendo $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$, la primera ecuación de Maxwell es

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}[\rho - \nabla\cdot\boldsymbol{P}] \qquad [4.33]$$

La presencia de la divergencia de $\boldsymbol{P}$ en la densidad de carga efectiva puede comprenderse cualitativamente. Si la polarización no es uniforme puede haber un aumento o disminución netos de carga dentro de un volumen pequeño, como se indica esquemáticamente en la figura 4.2.

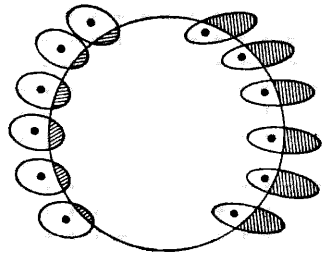


FIG. 4.2. Origen de la densidad de carga de polarización. Como consecuencia de la variación espacial de la polarización, puede salir más carga molecular de un volumen dado pequeño de la que entra. Sólo se han dibujado las moléculas próximas a la superficie límite.

Con la definición del *desplazamiento eléctrico* $\boldsymbol{D}$,

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad [4.34]$$

[4.33] se convierte en la familiar ecuación:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad [4.35]$$

Las ecuaciones [4.27] y [4.35] son los equivalentes macroscópicos de [1.13] y [1.14] del capítulo 1.

Como se discutía en la Introducción, antes de que pueda obtenerse una solución para el potencial o el campo electrostático es necesaria una *relación constitutiva* que conecte $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$. En las secciones subsiguientes de este capítulo supondremos que la respuesta del sistema a un campo aplicado es lineal. Esto excluye de la discusión a la ferroelectricidad, pero, por lo demás, no hay restricción real supuesto que las intensidades del campo no se hagan extremadamente grandes. Como simplificación adicional supondremos que el medio es isótropo. En tal caso la polarización inducida $\boldsymbol{P}$ es paralela a $\boldsymbol{E}$, con un coeficiente de proporcionalidad que es independiente de la dirección

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \qquad [4.36]$$

La constante χ_e se denomina *susceptibilidad eléctrica* del medio. Por tanto, el desplazamiento $\boldsymbol{D}$ es proporcional a $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \qquad [4.37]$$

donde

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \qquad [4.38]$$

es la *constante dieléctrica* o permitividad del medio.

Si el dieléctrico es homogéneo además de isótropo, ϵ es independiente de la posición. En tal caso podemos escribir la ecuación de la divergencia como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \qquad [4.39]$$

Todos los problemas en *tal medio* se reducen a los resueltos en los capítulos anteriores, con la única excepción de que los campos creados por cargas dadas vienen reducidos por el factor ϵ_0/ϵ. Este aminoramiento del campo puede interpretarse mediante la polarización de los átomos, que provoca campos opuestos al debido a la carga dada. Consecuencia inmediata es que la capacidad de un condensador aumenta en el factor ϵ/ϵ_0 si llenamos el espacio vacío entre los electrodos con una sustancia de constante dieléctrica ϵ (esto sólo es cierto en la medida en que pueda despreciarse la dispersión de los campos en los bordes).

Si el medio homogéneo no llena todo el espacio en que existen campos eléctricos, o bien, en el caso más general, si hay medios diferentes yuxtapuestos, cuya respuesta no tiene por qué ser necesariamente lineal, debemos considerar la cuestión de las condiciones de contorno que satisfacen $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$ en las superficies de separación entre medios. Estas condiciones de contorno han sido deducidas en la sección 0.5 a partir del conjunto completo de ecuaciones de Maxwell. Los resultados son que la componente normal de $\boldsymbol{D}$ y la componente tangencial de $\boldsymbol{E}$ a cada lado de la superficie de separación satisfacen las *condiciones de contorno,*

que son válidas tanto para campos variables con el tiempo como para campos estáticos:

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{n}_{21}&=\sigma\\(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)\times\boldsymbol{n}_{21}&=0\end{aligned}\right\} \qquad [4.40]$$

siendo $\boldsymbol{n}_{21}$ el vector unitario normal a la superficie dirigido desde la región 1 a la región 2, y σ la densidad macroscópica de carga superficial sobre la superficie límite (que *no* incluye la carga de polarización).

4.4. PROBLEMAS DE CONDICIONES DE CONTORNO CON DIELECTRICOS

Los métodos de capítulos anteriores para resolver problemas electrostáticos con condiciones en el contorno son susceptibles de extensión para tratar la presencia de dieléctricos.

En la presente sección trataremos unos pocos ejemplos de las distintas técnicas aplicadas a los medios dieléctricos.

Para ilustrar el método de las imágenes para dieléctricos, consideremos una carga puntual q inmersa en un medio dieléctrico ϵ_1 semiinfinito, situada a una distancia d del límite plano que separa el primer medio de otro dieléctrico semi-

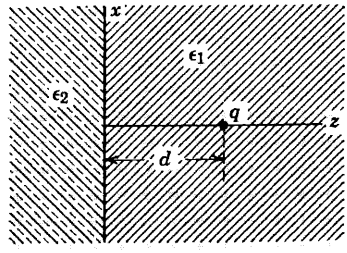


FIG. 4.3.

infinito de constante ϵ_2. Tal como se indica en la figura 4.3, la superficie puede tomarse como plano $z=0$. Debemos hallar la solución apropiada a las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}&\epsilon_1\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho, \qquad z>0\\&\epsilon_2\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0, \qquad z<0\\&\\&\nabla\times\boldsymbol{E}=0, \qquad \text{en todo el espacio}\end{aligned}\right\} \qquad [4.41]$$

y

sujetas a las condiciones de contorno para $z=0$:

$$\lim_{z\to 0^+}\begin{Bmatrix}\epsilon_1 E_z\\E_x\\E_y\end{Bmatrix}=\lim_{z\to 0^-}\begin{Bmatrix}\epsilon_2 E_z\\E_x\\E_y\end{Bmatrix} \qquad [4.42]$$

Como $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ en todo el espacio, $\boldsymbol{E}$ puede derivarse en la forma usual de un potencial Φ. Al intentar emplear el método de las imágenes es natural colocar

una carga imagen q' en la posición simétrica A' indicada en la figura 4.4. De este modo, para $z > 0$, el potencial en un punto P de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) será:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2}\right), \qquad z > 0 \qquad [4.43]$$

donde $R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}$, $R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}$. Hasta ahora, el procedimiento es completamente análogo al problema con material conductor en lugar del dieléctrico ϵ_2 para $z < 0$. Pero en este caso, tenemos que dar también el potencial

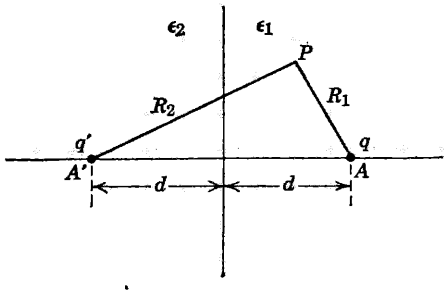


FIG. 4.4.

para $z < 0$ y, puesto que no existen cargas en esta región, debemos hallar una solución a la ecuación de Laplace que no tenga singularidades en esta región. Claramente, la hipótesis más sencilla consiste en suponer que el potencial para $z < 0$ es equivalente al de una carga q'' colocada en el mismo punto A en que está la carga real q:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{R_1}, \qquad z < 0 \qquad [4.44]$$

Como:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_1}\right)\Big|_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_2}\right)\Big|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

mientras que:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{R_1}\right)\Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{R_2}\right)\Big|_{z=0} = \frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

para que se cumplan las condiciones de contorno [4.42] se requiere que:

$$q - q' = q''$$

$$\frac{1}{\epsilon_1}(q + q') = \frac{1}{\epsilon_2}q''$$

La resolución de este sistema nos da las cargas imagen:

$$\left.\begin{aligned} q' &= -\left(\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_2+\epsilon_1}\right)q \\ q'' &= \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2+\epsilon_1}\right)q \end{aligned}\right\} \qquad [4.45]$$

En la figura 4.5 se han dibujado cualitativamente las líneas de fuerza (en realidad son líneas de D), para ambos casos $\epsilon_2 > \epsilon_1$ y $\epsilon_2 < \epsilon_1$.

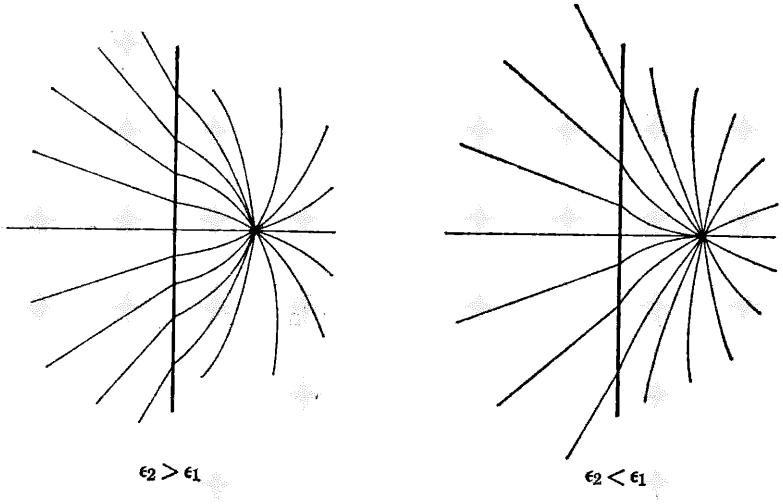


FIG. 4.5. Líneas del vector desplazamiento eléctrico de una carga puntual embebida en un dieléctrico ϵ, cerca de una lámina semiinfinita de otro dieléctrico ϵ_2.

La densidad de carga de polarización viene dada por $-\nabla \cdot \boldsymbol{P}$. En el seno del dieléctrico, $\boldsymbol{P} = \epsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$, de modo que $-\nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\epsilon_0 \chi_e \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$, excepto en la carga puntual q. Sin embargo, al atravesar la superficie, cuando z pasa por $z=0$, χ_e presenta un salto discontinuo, $\Delta\chi_e = (1/\epsilon_0)(\epsilon_1 - \epsilon_2)$. Esto implica que sobre el plano $z=0$ hay una densidad superficial de carga de polarización:

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \cdot \boldsymbol{n}_{21} \qquad [4.46]$$

siendo $\boldsymbol{n}_{21}$ el vector unitario normal que se dirige del dieléctrico 1 al dieléctrico 2; $\boldsymbol{P}_i$ es el vector polarización en el dieléctrico i a un lado y otro del plano $z=0$. Puesto que:

$$\boldsymbol{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0)\boldsymbol{E} = -(\epsilon_i - \epsilon_0)\nabla\Phi$$

resulta ya muy sencillo probar que la densidad de carga de polarización es:

$$\sigma_{\text{pol}} = -\frac{q\epsilon_0}{2\pi} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \qquad [4.47]$$

En el límite $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$, el dieléctrico ϵ_2 se comporta como un conductor en el interior del cual el campo eléctrico se hace muy pequeño, y la densidad superficial de carga [4.47] se aproxima al valor apropiado para la superficie de un conductor.

El segundo ejemplo de problema electrostático con dieléctricos es el de una esfera dieléctrica de radio a y constante dieléctrica ϵ colocada en un campo eléctrico inicialmente uniforme que, como se indica en la figura 4.6, a grandes distancias de la esfera está dirigido a lo largo del eje z y tiene por módulo E_0.

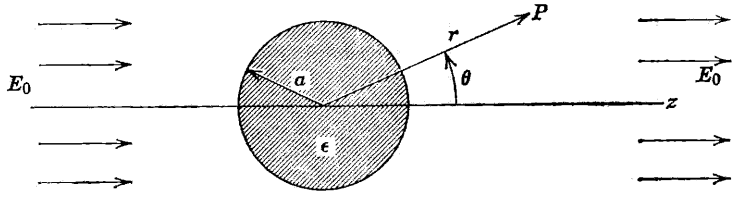


FIG. 4.6.

No hay cargas libres ni dentro ni fuera de la esfera. Como consecuencia, el problema es del tipo de resolver la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno adecuadas para $r=a$. Teniendo en cuenta la simetría axial que presenta el problema, podemos tomar la solución de la forma:

$$\text{INTERIOR:} \qquad \Phi_{\text{int}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \qquad [4.48]$$

$$\text{EXTERIOR:} \qquad \Phi_{\text{ext}} = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta) \qquad [4.49]$$

De la condición de contorno en el infinito ($\Phi \to -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$) hallamos que el único B_l que no se anula es $B_1 = -E_0$. Los otros coeficientes se calculan por las condiciones de contorno para $r=a$:

$$\left.\begin{aligned} &\text{COMPONENTE TANGENCIAL DE } \vec{E}: \quad -\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi_{\text{int}}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = -\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} \\ &\text{COMPONENTE NORMAL DE } D: \quad -\epsilon\frac{\partial \Phi_{\text{int}}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{-\epsilon_0 \partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial r}\bigg|_{r=a} \end{aligned}\right\} \qquad [4.50]$$

Cuando se sustituyen en ellas los desarrollos [4.48] y [4.49] resultan dos desarrollos en polinomios de Legendre igualados a cero. Como éstos deben anularse para todo θ, el coeficiente de cada polinomio debe anularse por separado. Esto conduce, para la primera condición de contorno, a las relaciones:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \\ A_l &= \frac{C_l}{a^{2l+1}}, \quad \text{para } l \neq 1 \end{aligned}\right\} \qquad [4.51]$$

mientras que la segunda da:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon A_1 &= -\epsilon_0\left(E_0+2\frac{C_1}{a^3}\right) \\ \epsilon l A_l &= -\epsilon_0(l+1)\frac{C_l}{a^{2l+1}}, \quad \text{para } l\neq 1 \end{aligned}\right\} \qquad [4.52]$$

Las segundas ecuaciones en [4.51] y [4.52] solamente pueden ser satisfechas simultáneamente, siendo $A_l=C_l=0$ para todo $l\neq 1$. Los coeficientes vienen dados en función del campo eléctrico aplicado E_0:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\left(\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\right)E_0 \\ C_1 &= \left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right)a^3E_0 \end{aligned}\right\} \qquad [4.53]$$

Por tanto, el potencial es:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\text{int}} &= -\left(\frac{3\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right)E_0 r\cos\theta \\ \Phi_{\text{ext}} &= -E_0 r\cos\theta+\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right)E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad [4.54]$$

El potencial dentro de la esfera corresponde a un campo eléctrico uniforme paralelo al campo aplicado y de valor:

$$E_{\text{int}}=\frac{3\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}E_0 < E_0 \qquad [4.55]$$

En el exterior de la esfera el potencial es equivalente al del campo aplicado E_0 más el campo debido a un dipolo colocado en el centro de la esfera cuyo momento dipolar es:

$$p=4\pi\epsilon_0\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right)a^3E_0 \qquad [4.56]$$

y orientado en la dirección del campo E_0. Podemos interpretar el momento dipolar como la integral de volumen de la polarización $\boldsymbol{P}$. La polarización vale:

$$\boldsymbol{P}=(\epsilon-\epsilon_0)\boldsymbol{E}=3\epsilon_0\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right)\boldsymbol{E}_0 \qquad [4.57]$$

Es constante en todo el volumen de la esfera y su integral de volumen viene dada por [4.56]. La densidad superficial de carga de polarización es, de acuerdo con [4.46], $\sigma_{\text{pol}}=(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})/r$:

$$\sigma_{\text{pol}}=3\epsilon_0\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right)E_0\cos\theta \qquad [4.58]$$

Esta puede interpretarse como productora de un campo interno dirigido en sentido contrario al campo aplicado de modo que en el interior de la esfera el campo se reduzca a su valor [4.55], como se indica en la figura 4.7.

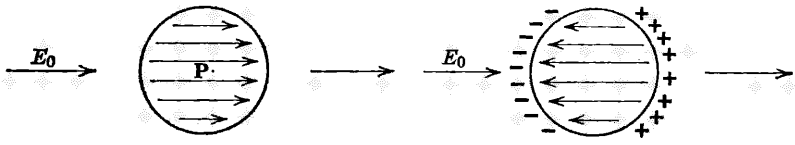


FIG. 4.7. Esfera dieléctrica en un campo uniforme E_0. A la izquierda se representa la polarización, y a la derecha, la carga de polarización con su campo eléctrico asociado, que se opone a E_0.

El problema de una cavidad esférica de radio a en un medio dieléctrico con constante dieléctrica ϵ y con un campo eléctrico E_0 aplicado paralelamente al eje z, tal como se indica en la figura 4.8, puede tratarse exactamente de la misma forma que la esfera dieléctrica. De hecho, la inspección de las condiciones de contorno [4.50] nos muestra que los resultados para la cavidad pue-

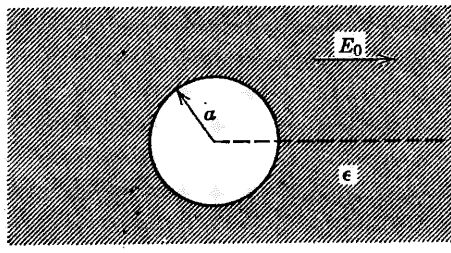


FIG. 4.8. Cavidad esférica en el seno de un dieléctrico. El campo eléctrico aplicado es uniforme.

den obtenerse a partir de los correspondientes a la esfera dieléctrica reemplazando ϵ/ϵ_0 por ϵ_0/ϵ. Así, por ejemplo, el campo en el interior de la cavidad es uniforme, paralelo a $\boldsymbol{E}_0$ y de valor:

$$E_{\text{int}} = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + \epsilon_0} E_0 > E_0 \qquad [4.59]$$

Análogamente, el campo exterior es el aplicado más el de un dipolo en el origen *orientado en oposición* al campo aplicado y cuyo momento dipolar es:

$$p = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon + \epsilon_0} \right) a^3 E_0 \qquad [4.60]$$

4.5. POLARIZABILIDAD MOLECULAR Y SUSCEPTIBILIDAD ELECTRICA

En esta sección y la próxima vamos a considerar la relación entre las propiedades moleculares y el parámetro definido macroscópicamente, la susceptibilidad eléctrica χ_e. Nuestra discusión recurre a modelos clásicos sencillos de las propiedades moleculares, a pesar de que un tratamiento adecuado tendría necesariamente que hacer uso de consideraciones mecanocuánticas. Afortunadamente, las propiedades más sencillas de los dieléctricos son asequibles a un análisis clásico.

Antes de examinar cómo están relacionadas con la susceptibilidad las propiedades de las moléculas en detalle, debemos hacer una distinción entre los campos que actúan sobre las moléculas en el medio y el campo aplicado. Definimos la susceptibilidad por la relación $\boldsymbol{P}=\epsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}$, siendo $\boldsymbol{E}$ el campo eléctrico macroscópico. En los medios enrarecidos, en que las moléculas están muy separadas, hay poca diferencia entre el campo macroscópico y el campo que actúa sobre una molécula o grupo de moléculas. Pero en los medios densos con las moléculas muy próximas entre sí, la polarización de las moléculas vecinas da lugar a un campo eléctrico interno $\boldsymbol{E}_i$ que actúa sobre una molécula dada además del campo medio macroscópico $\boldsymbol{E}$, de modo que el campo total sobre la molécula es $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_i$. Podemos expresar el campo interno como la diferencia de dos términos:

$$\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{E}_{\text{próx}}-\boldsymbol{E}_P \qquad [4.61]$$

donde $\boldsymbol{E}_{\text{próx}}$ es la contribución real de las moléculas próximas a la dada y $\boldsymbol{E}_P$ es la contribución de aquellas moléculas que se tratan mediante la aproximación de considerarlas un continuo promediado descrito por la polarización $\boldsymbol{P}$. Lo que estamos haciendo aquí es decir que en las proximidades de la molécula en cuestión hemos de tomar en cuenta la configuración atómica específica y las posiciones de las moléculas vecinas. Dentro de un cierto volumen V macroscópicamente pequeño, pero microscópicamente grande, podemos sustituir el promedio macroscópico equivalente a las contribuciones de las moléculas vecinas ($\boldsymbol{E}_P$) por una contribución ($\boldsymbol{E}_{\text{próx}}$) evaluada correctamente. Esta diferencia es el campo interno adicional $\boldsymbol{E}_i$.

Para calcular $\boldsymbol{E}_P$ puede utilizarse el resultado [4.18] que da la integral del campo eléctrico en el interior de un volumen esférico de radio R que contiene una distribución de carga. Si se escoge el volumen V como una esfera de radio R que contiene muchas moléculas, el momento dipolar total en su interior es:

$$\boldsymbol{p}=\frac{4\pi R^3}{3}\boldsymbol{P}$$

supuesto que V es lo bastante pequeño para que $\boldsymbol{P}$ sea esencialmente constante en todo el volumen. Entonces, según [4.18], el valor del campo eléctrico medio dentro de la esfera (justo lo que deseábamos para $\boldsymbol{E}_P$) es

$$\boldsymbol{E}_p=\frac{3}{4\pi R^3}\int_{r<R}\boldsymbol{E}\,d^3x=-\frac{\boldsymbol{P}}{3\epsilon_0} \qquad [4.62]$$

Por consiguiente, el campo interno puede escribirse

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\boldsymbol{P}}{3\epsilon_0} + \boldsymbol{E}_{\text{próx}} \qquad [4.63]$$

El campo debido a las moléculas cercanas es más difícil de determinar. LORENTZ (pág. 138) demostró que para átomos en una red cúbica simple $\boldsymbol{E}_{\text{próx}}$ se anula en cualquier punto del retículo. El argumento utilizado se basa en la simetría del problema, y puede verse a continuación: supóngase que en el interior de la esfera tenemos una ordenación cúbica de dipolos, tales como los dibujados en la figura 4.9, con todos sus momentos de valor constante y orientados según la misma dirección (recuérdese que la esfera es macroscópicamente

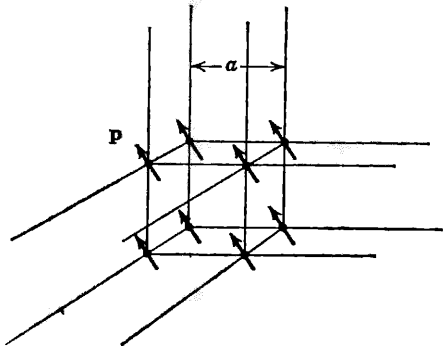


FIG. 4.9. Cálculo de la contribución de las moléculas cercanas al campo interno en el caso de una red cúbica simple.

pequeña, aunque contiene muchísimas moléculas). Las posiciones de los dipolos vienen dadas por las coordenadas $\boldsymbol{x}_{ijk}$ con componente a lo largo de los tres ejes (ia, ja, ka); siendo a el espaciado del retículo cúbico y los índices i, j, k toman cada uno valores enteros positivos o negativos. El campo debido a todos los dipolos en el origen es, según [4.13]:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j,k} \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}_{ijk})\boldsymbol{x}_{ijk} - x_{ijk}^2\boldsymbol{p}}{x_{ijk}^5} \qquad [4.64]$$

La componente x podemos escribirla en la forma:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{ijk} \frac{3(i^2p_1 + ijp_2 + ikp_3) - (i^2+j^2+k^2)p_1}{a^3(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} \qquad [4.65]$$

Como los índices recorren los mismos valores positivos y negativos, los términos cruzados que contienen $(ijp_2 + ikp_3)$ se anulan. Por razones de simetría, las tres sumas:

$$\sum_{ijk} \frac{i^2}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{j^2}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{k^2}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}}$$

son iguales, y, por consiguiente, tenemos:

$$E_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{ijk}\frac{[3i^2-(i^2+j^2+k^2)]p_1}{a^3(i^2+j^2+k^2)^{5/2}}=0 \qquad [4.66]$$

Por el mismo procedimiento se demuestra que también se anulan las componentes en y en z. Luego $\boldsymbol{E}_{\text{próx}}=0$ para una red cúbica simple.

Si $\boldsymbol{E}_{\text{prox}}=0$ para una situación altamente simétrica, es de esperar que sea también cero para situaciones completamente desordenadas al azar. Por tanto, esperamos que las sustancias amorfas tampoco tengan campo interno debido a moléculas próximas. Para otras redes distintas de la cúbica simple, las componentes de $\boldsymbol{E}_{\text{próx}}$ están relacionadas con las componentes de $\boldsymbol{P}$ por intermedio del tensor de traza nula $s_{\alpha\beta}$ que tiene las propiedades de simetría de la red. No obstante, para la mayoría de los materiales tomar $\boldsymbol{E}_{\text{próx}}=0$ es una buena hipótesis de trabajo.

El vector polarización $\boldsymbol{P}$ se definía en [4.28] como

$$\boldsymbol{P}=N\langle\boldsymbol{p}_{\text{mol}}\rangle$$

donde $\langle\boldsymbol{p}_{\text{mol}}\rangle$ es el momento dipolar medio de las moléculas. Este momento dipolar es aproximadamente proporcional al campo eléctrico que actúa sobre la molécula. Para expresar esta dependencia definiremos la *polarizabilidad molecular* γ_{mol} como la razón del momento dipolar medio de las moléculas al campo aplicado sobre la molécula. Teniendo en cuenta el campo interno [4.63], obtenemos:

$$\langle\boldsymbol{p}_{\text{mol}}\rangle=\gamma_{\text{mol}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_i) \qquad [4.67]$$

γ_{mol} es, en principio, una función del campo eléctrico, pero para un amplio margen de intensidades del campo es una constante que caracteriza la respuesta de las moléculas al campo aplicado. La ecuación [4.67] puede combinarse con [4.28] y [4.63] para dar:

$$\boldsymbol{P}=N\gamma_{\text{mol}}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{3\epsilon_0}\boldsymbol{P}\right) \qquad [4.68]$$

donde hemos supuesto $\boldsymbol{E}_{\text{próx}}=0$. Despejando $\boldsymbol{P}$ en función de $\boldsymbol{E}$ y recordando que $\boldsymbol{P}=\epsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}$ define la susceptibilidad de una sustancia, hallamos:

$$\epsilon_0\chi_e=\frac{N\gamma_{\text{mol}}}{1-\frac{1}{3\epsilon_0}N\gamma_{\text{mol}}} \qquad [4.69]$$

como la relación entre la susceptibilidad (parámetro macroscópico) y la polarizabilidad (parámetro microscópico). Recordando que $\epsilon/\epsilon_0=(1+\chi_e)$, la constante dieléctrica puede expresarse en función de γ_{mol}, o alternativamente la polarizabilidad molecular expresarse en función de la constante dieléctrica:

$$\gamma_{\text{mol}}=\frac{3\epsilon_0}{4\pi N}\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right) \qquad [4.70]$$

Esta se conoce como *ecuación de Clausius-Mossotti*, ya que MOSSOTTI (en 1850)

e independientemente CLAUSIUS (en 1879) establecieron que para cualquier sustancia $(\epsilon-\epsilon_0)/(\epsilon+2\epsilon_0)$ debía ser proporcional a la densidad de la misma *. Esta relación se cumple mejor en las sustancias diluidas (enrarecidas) tales como gases. Para líquidos y sólidos, la ecuación [4.70] sólo es válida como aproximación, especialmente si la constante dieléctrica es grande. El lector interesado en más detalles puede consultar los libros de BOTTCHER, DEBYE y FROHLICH.

4.6. MODELOS PARA LA POLARIZABILIDAD MOLECULAR

La polarización de una colectividad de átomos o moléculas puede tener lugar por dos mecanismos diferentes:

a) El campo aplicado distorsiona la distribución de carga y provoca en cada molécula la aparición de un dipolo inducido.

b) El campo tiende a alinear los dipolos permanentes de las moléculas que inicialmente estaban orientados al azar.

Para estimar los momentos inducidos consideraremos un modelo sencillo de cargas (electrones e iones) unidos mediante una fuerza recuperadora de tipo armónico:

$$\boldsymbol{F} = -m\omega_0^2 \boldsymbol{x} \qquad [4.71]$$

donde m es la masa de la carga y ω_0 la frecuencia de oscilación alrededor del punto de equilibrio. Por la acción del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, la carga se desplaza en una distancia $\boldsymbol{x}$ dada por

$$m\omega_0^2 \boldsymbol{x} = e\boldsymbol{E}$$

Por consiguiente, el momento dipolar es:

$$\boldsymbol{p}_{\text{mol}} = e\boldsymbol{x} = \frac{e^2}{m\omega_0^2}\boldsymbol{E} \qquad [4.72]$$

Esto significa que la polarizabilidad es $\gamma = e^2/m\omega_0^2$. Si hay un conjunto de cargas e_i con masas m_i y frecuencias de oscilación ω_i en cada molécula la polarizabilidad molecular es

$$\gamma_{\text{mol}} = \sum_i \frac{e_i^2}{m_i\omega_i^2} \qquad [4.73]$$

Para hacernos una idea del orden de magnitud de γ podemos hacer dos estimaciones diferentes. Como γ es proporcional al volumen, $\epsilon_0 v$, debe estar determinado por las dimensiones moleculares, es decir, $\gamma < 10^{-39}$ MKSA. Por otro lado, las frecuencias de vibración de los electrones en los átomos son del orden de las frecuencias ópticas. Tomando como longitud de onda típica unos 3 000 Å resulta $\omega \simeq 6 \times 10^{15}$ seg^{-1}. Por tanto, la contribución electrónica a la

* Para las frecuencias ópticas $\epsilon_r = n^2$, siendo n el índice de refracción. Si reemplazamos ϵ_r por n^2 en [4.70], la ecuación es la llamada algunas veces *ecuación de Lorentz-Lorenz* (1880).

polarizabilidad es $\gamma \sim e^2/m\omega^2 \sim 6 \times 10^{-40}$ MKSA, que concuerda con la estimación a partir del volumen molecular. Para los gases en condiciones normales de presión y temperatura, el número de moléculas por metro cúbico es $N = 2{,}7 \times 10^{25}$, de modo que sus susceptibilidades serán del orden de $\chi_e < 10^{-4}$. Esto quiere decir que las constantes dieléctricas difieren muy poco de la del vacío, unas partes en 10^3 o menos. Valores experimentales típicos de la constante dieléctrica son 1,00054 para el aire, 1,0072 para el vapor de amoniaco, 1,0057 para el alcohol metílico, 1,000068 para el helio. Para dieléctricos sólidos o líquidos, $N \sim 10^{28} - 10^{29}$ moléculas/cm^3. Por tanto, la suceptibilidad puede ser del orden de la unidad (dentro de un factor de $10^{\pm 1}$), como se ha observado experimentalmente *.

Necesitamos considerar la posibilidad de que la agitación térmica de las moléculas pueda modificar el resultado [4.73]. En mecánica estadística, la distribución de probabilidad de las partículas en el espacio de las fases (espacio $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$) es una cierta función del hamiltoniano $f(H)$, que para sistemas clásicos es el factor de Boltzmann.

$$f(H) = e^{-H/kT} \tag{4.74}$$

En el caso del problema sencillo de la carga enlazada armónicamente con campo aplicado en la dirección z, el hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 \boldsymbol{x}^2 - eEz \tag{4.75}$$

siendo $\boldsymbol{p}$ aquí el ímpetu de la partícula cargada. El valor medio del momento dipolar en la dirección z es:

$$\langle p_{\text{mol}} \rangle = \frac{\int d^3p \int d^3x (ez) f(H)}{\int d^3p \int d^3x f(H)} \tag{4.76}$$

Si introducimos el cambio de coordenadas $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - eE\boldsymbol{k}/m_0$, será

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}(\boldsymbol{x}')^2 - \frac{e^2E^2}{2m\omega_0^2} \tag{4.77}$$

y

$$\langle p_{\text{mol}} \rangle = \frac{\int d^3p \int d^3x' \left(ez' + \dfrac{e^2E^2}{m\omega_0^2} \right) f(H)}{\int d^3p \int d^3x' f(H)} \tag{4.78}$$

La primera integral se anula por ser H par en z'. Por tanto, cualquiera que sea la forma de $f(H)$, obtenemos:

$$\langle p_{\text{mol}} \rangle = \frac{e^2}{m\omega_0^2} E$$

* Véase el *Handbook of Chemistry and Physics*, Chemical Rubber Publishing Co., o el *American Institute of Physics Handbook*, editado por D. E. Gray, 3.ª edición, McGraw-Hill, Nueva York (1972), para encontrar tablas de constantes dieléctricas de diversas sustancias.

exactamente lo mismo que se obtuvo en [4.72] sin tener en cuenta la agitación térmica.

El segundo tipo de polarizabilidad es el causado por la orientación parcial de dipolos permanentes que inicialmente están orientados al azar. La polarización por orientación es importante en sustancias «polares» tales como HCl y H_2O y fue estudiada por primera vez en 1912 por Debye. Se supone que todas las moléculas poseen un momento dipolar permanente $\boldsymbol{p}_0$, que puede estar orientado en cualquier dirección en el espacio. En ausencia de campo la agitación térmica mantiene orientadas al azar a las moléculas de modo que no hay momento dipolar neto. Cuando se aplica un campo, tienen una tendencia a orientarse en la dirección del campo, configuración en la que la energía es mínima. Como consecuencia, habrá un momento dipolar medio. Para calcularlo, notemos que el hamiltoniano de la molécula viene dado por:

$$H = H_0 - \boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E} \qquad [4.79]$$

siendo H_0 función solamente de las coordenadas «internas» de la molécula. Por medio del factor de Botzmann [4.74], podemos escribir el momento dipolar medio como:

$$\langle p_{\text{mol}} \rangle = \frac{\int d\Omega \, p_0 \cos\theta \exp\left(\dfrac{p_0 E \cos\theta}{kT}\right)}{\int d\Omega \exp\left(\dfrac{p_0 E \cos\theta}{kT}\right)} \qquad [4.80]$$

donde hemos elegido $\boldsymbol{E}$ en la dirección del eje z. Hemos suprimido todas las variables que se anulan por la integración y hemos tenido además en cuenta que solamente influye la componente de $\boldsymbol{p}_0$ paralela al campo. Por lo general, (p_0E/kT) es mucho menor que la unidad (excepto a bajas temperaturas), y, por tanto, podemos desarrollar las exponenciales obteniendo el siguiente resultado:

$$\langle p_{\text{mol}} \rangle \simeq \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT} E \qquad [4.81]$$

La polarización por orientación es inversamente proporcional a la temperatura, como podría esperarse de un efecto en el que el campo aplicado debe superar la oposición debida a la agitación térmica.

En general, están presentes ambos tipos de polarización, inducida (electrónica e iónica) y de orientación; por tanto, la forma general de la polarización molecular es:

$$\gamma_{\text{mol}} \simeq \gamma_1 + \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT} \qquad [4.82]$$

La polarización presenta, pues, una dependencia con la temperatura de la forma $(a + b/T)$ lo que conduce a que los dos tipos de polarización pueden separarse experimentalmente, como se indica en la figura 4.10. Los momentos dipolares permanentes observados en moléculas «polares», tales como las de HCl y H_2O, son del orden del producto de la carga del electrón por 10^{-10}metros, en acuerdo con las dimensiones moleculares.

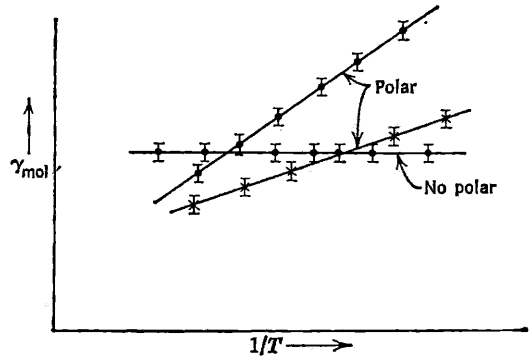


FIG. 4.10. Variación de la polarizabilidad molecular γ_{mol} con la temperatura para sustancias polares y no polares. Se representa frente a T^{-1}.

4.7. ENERGIA ELECTROSTATICA EN MEDIOS DIELECTRICOS

En la sección 1.11 discutimos el tema de la energía de un sistema de cargas en el vacío. El resultado allí obtenido para la energía debida a una densidad de carga $\rho(\boldsymbol{x})$ y un potencial $\Phi(\boldsymbol{x})$

$$W=\frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})\, d^3x \qquad [4.83]$$

no puede, en general, incorporarse sin más consideraciones a nuestra descripción macroscópica de los medios dieléctricos. La razón aparece claramente si recordamos cómo se obtuvo [4.83].

Imaginábamos la configuración final de carga como obtenida añadiendo poco a poco las cargas elementales, de modo que cada una era traída desde un punto infinitamente alejado contra la acción del campo eléctrico ya existente. La fórmula [4.86] nos da así el trabajo total realizado. Sin embargo, cuando hay medio dieléctrico presente no sólo se realiza trabajo en el proceso de llevar las cargas reales a su posición, sino que además se produce cierto estado de polarización en el medio. Si ρ y Φ representan variables macroscópicas, no es, desde luego, evidente que [4.83] represente el trabajo total, incluido el efectuado sobre el dieléctrico.

Con el fin de que nuestra descripción de los dieléctricos sea lo más general posible, no haremos inicialmente hipótesis alguna sobre linearidad, uniformidad, etcétera, de la respuesta del dieléctrico al campo aplicado. En vez de ello, consideremos el pequeño cambio en la energía δW asociado a un cierto cambio $\delta\rho$ en la densidad de carga macroscópica existente en todo el espacio. El trabajo necesario para efectuar este cambio es:

$$\delta W=\int \delta\rho(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})\, d^3x \qquad [4.84]$$

donde $\Phi(\boldsymbol{x})$ es el potencial creado por la densidad $\rho(\boldsymbol{x})$ ya presente. Puesto que $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$, podemos relacionar la variación $\delta\rho$ con una variación del vector des-

plazamiento $\delta \boldsymbol{D}$:

$$\delta\rho = \nabla \cdot (\delta \boldsymbol{D}) \qquad [4.85]$$

El cambio energético δW puede, pues, expresarse en la forma:

$$\delta W = \int \boldsymbol{E} \cdot \delta \boldsymbol{D}\, d^3x \qquad [4.86]$$

en donde hemos tenido en cuenta que $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ y hemos considerado que $\rho(\boldsymbol{x})$ es una distribución de carga localizada. La energía total electrostática puede ya, al menos formalmente, expresarse haciendo que $\boldsymbol{D}$ crezca desde un valor inicial $\boldsymbol{D}=0$ hasta su valor final $\boldsymbol{D}$:

$$W = \int d^3x \int_0^{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{E} \cdot \delta \boldsymbol{D} \qquad [4.87]$$

Si el medio es *lineal*

$$\boldsymbol{E} \cdot \delta \boldsymbol{D} = \tfrac{1}{2}\delta(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) \qquad [4.88]$$

y la energía electrostática total es:

$$W = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}\, d^3x \qquad [4.89]$$

Este último resultado puede transformarse en [4.83], utilizando $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ y $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$, o volviendo atrás a [4.84] y suponiendo que ρ y Φ están relacionados de forma lineal. Así, pues, [4.83] es válida macroscópicamente hablando sólo en el caso de un comportamiento lineal del dieléctrico. En caso contrario debemos calcular la energía de una configuración mediante [4.87]. Además, la energía puede depender posiblemente de la historia del sistema (efectos de histéresis).

Un problema de interés considerable es el del cambio de energía que tiene lugar cuando se coloca un objeto dieléctrico, de respuesta lineal en un campo eléctrico cuyas fuentes permanecen invariables. Supongamos que inicialmente existe en un medio de constante dieléctrica ϵ_1, que puede ser función de las coordenadas, un campo eléctrico $\boldsymbol{E}_0$ debido a una cierta distribución de cargas $\rho_0(\boldsymbol{x})$. La energía electrostática inicial es:

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{D}_0\, d^3x$$

siendo $\boldsymbol{D}_0 = \epsilon_1 \boldsymbol{E}_0$. Entonces, manteniendo las fuentes en posiciones fijas, se introduce un cuerpo dieléctrico de volumen V_1 en el campo, con lo que el campo cambiará de $\boldsymbol{E}_0$ a $\boldsymbol{E}$. La presencia del cuerpo puede describirse mediante una función $\epsilon(\boldsymbol{x})$ que tome el valor ϵ_2 dentro de V_1 y el valor ϵ_1 fuera de V_1. Para evitar dificultades matemáticas podemos imaginar que $\epsilon(\boldsymbol{x})$ es una función que varía suavemente con la posición y que cae en forma rápida, pero continua desde ϵ_2 a ϵ_1 en la superficie del volumen V_1. Ahora la energía tiene el valor:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}\, d^3x$$

siendo $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$. La diferencia de energía puede escribirse:

$$W=\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{D}_0)\,d^3x=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}_0-\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_0)\,d^3x+\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_0)\cdot(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}_0)\,d^3x \quad [4.90]$$

Puede demostrarse que la segunda integral se anula mediante el argumento siguiente. Como $\nabla\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_0)=0$, tenemos:

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_0=-\nabla\Phi$$

Y la segunda integral se convierte en:

$$I=-\frac{1}{2}\int\nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)\,d^3x$$

Como $\nabla\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)=0$, puesto que se supone que la densidad de carga de las fuentes $\rho_0(x)$ permanece inalterada al introducir el cuerpo dieléctrico, una integración por partes transforma esta expresión en:

$$I=\frac{1}{2}\int\Phi\nabla\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)\,d^3x=0$$

En consecuencia, el cambio de energía vale:

$$W=\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}_0-\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_0)\,d^3x$$

Aparentemente, la integración abarca todo el espacio. No obstante, en realidad sólo se extiende al volumen V_1 del cuerpo, puesto que fuera de V_1 es $\boldsymbol{D}=\epsilon_1\boldsymbol{E}$.

Podemos, pues, escribir:

$$W=-\frac{1}{2}\int_{V_1}(\epsilon_2-\epsilon_1)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0\,d^3x \quad [4.92]$$

Si el medio que rodea al dieléctrico fuese el vacío, $\epsilon_1=\epsilon_0$, y utilizando la definición de polarización $\boldsymbol{P}$, podemos expresar [4.92] en la forma:

$$W=-\frac{1}{2}\int_{V_1}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_0\,d^3x \quad [4.93]$$

donde $\boldsymbol{P}$ es la polarización del dieléctrico. Esto nos dice que la energía por unidad de volumen (densidad de energía) en un dieléctrico colocado en un campo $\boldsymbol{E}_0$ de fuentes fijas es:

$$w=-\frac{1}{2}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_0 \quad [4.94]$$

Este resultado es análogo al término dipolar de la expresión [4.24] de la energía

de una distribución de carga en un campo externo. El factor $\frac{1}{2}$ se debe al hecho de que [4.94] representa la densidad energética de un dieléctrico polarizable en un campo externo, y no la de un dipolo permanente. Es el mismo factor $\frac{1}{2}$ que aparece en [4.88].

Las ecuaciones [4.92] y [4.93] nos revelan que el cuerpo dieléctrico tiende a moverse hacia las regiones de campo eléctrico $\boldsymbol{E}_0$ creciente (siempre que $\epsilon_2 > \epsilon_1$). Para calcular la fuerza a que está sometido, imaginaremos un pequeño desplazamiento generalizado del cuerpo $\delta\xi$. De este modo habrá habido un cambio en la energía δW. Puesto que las cargas se mantienen fijas, no hay fuentes externas de energía y el cambio de la energía del campo puede interpretarse como un cambio de la energía potencial del cuerpo. Esto significa que está actuando sobre el cuerpo una fuerza:

$$F_\xi = -\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_Q \qquad [4.95]$$

en la que se ha colocado el subíndice Q en la derivada parcial para indicar que *las fuentes del campo se han mantenido fijas.*

En los casos prácticos en que aparece movimiento de dieléctricos, frecuentemente los campos eléctricos están producidos por una configuración de electrodos mantenidos a *potenciales fijos* por estar conectados a una fuente externa: por ejemplo, una batería. Al variar la situación del dieléctrico, pasarán cargas entre la batería y los electrodos (en uno u otro sentido) para que los potenciales permanezcan constantes. Esto significa que la fuente externa está suministrando energía, y resulta de interés comparar la energía suministrada de este modo con el cambio de energía anteriormente hallado cuando era debido a *fuentes invariables.* Como trataremos únicamente medios lineales, la expresión [4.83] resulta válida. Es suficiente considerar cambios pequeños a partir de una configuración ya existente. Resulta evidente de [4.83] que el cambio de energía que acompaña a cambios $\delta\rho(\boldsymbol{x})$ en la densidad de carga y $\delta\Phi(\boldsymbol{x})$ en el potencial es:

$$\delta W = \frac{1}{2}\int [\rho\delta\Phi + \Phi\delta\rho]\, d^3x \qquad [4.96]$$

Por comparación con [4.84] vemos que los dos términos de [4.96] son iguales si las propiedades del dieléctrico no se alteran. Pero si éstas cambian:

$$\epsilon(\boldsymbol{x}) \rightarrow \epsilon(\boldsymbol{x}) + \delta\epsilon(\boldsymbol{x}) \qquad [4.97]$$

las dos contribuciones en [4.96] ya no tienen por qué ser iguales. De hecho, acabamos de calcular el cambio de energía asociado a la introducción de un cuerpo dieléctrico en un campo eléctrico cuyas fuentes eran fijas ($\delta\rho = 0$). Si las contribuciones a [4.96] fueran iguales, implicaría que $\delta W = 0$; sin embargo, [4.91] o [4.92], en general, no son cero.

La razón de esta diferencia estriba en la existencia de la carga de polarización. El cambio experimentado por las propiedades del dieléctrico [4.97] implica un cambio en la densidad de carga de polarización. Si se interpreta [4.96] como una integral extendida a todas las densidades de carga, libre y de polarización (es decir, como una ecuación microscópica) las dos contribuciones son siempre iguales. No obstante, es a veces preferible operar con magnitudes macroscópicas, y en tal caso la igualdad solamente es válida en el caso de que las propiedades del dieléctrico permanezcan inalteradas.

Podemos considerar que el proceso por el cual se alteran las propiedades del dieléctrico (por movimiento de cuerpos dieléctricos, por cambio de sus susceptibilidades, etc.) en presencia de electrodos a potenciales fijos, tiene lugar en dos etapas. En la primera desconectamos los electrodos de las baterías y fijamos las cargas sobre ellos ($\delta\rho = 0$). Al tener lugar el cambio [4.97] en las propiedades del dieléctrico, el cambio energético será:

$$\delta W_1 = \frac{1}{2}\int \rho \delta\Phi_1 \, d^3x \qquad [4.98]$$

donde $\delta\Phi_1$ es el cambio producido en el potencial. Puede demostrarse que esto nos lleva al resultado [4.92]. En la segunda etapa conectamos de nuevo las baterías a los electrodos para volver sus potenciales a los valores originales. Habrá así una afluencia de carga $\delta\rho_2$ desde las baterías acompañada del correspondiente cambio en el potencial * $\delta\Phi_2 = -\Phi\delta_1$. Por tanto, el cambio energético en la segunda etapa es:

$$\delta W_2 = \frac{1}{2}\int (\rho\delta\Phi_2 + \Phi\delta\rho_2)\, d^3x = -2\delta W_1 \qquad [4.99]$$

ya que ambas contribuciones son iguales. En la segunda etapa vemos que el cambio energético producido por las fuentes externas es de signo contrario y doble cuantía al que tuvo lugar en la primera etapa. Por tanto, el cambio neto es:

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int \rho\delta\Phi_1 \, d^3x \qquad [4.100]$$

Y simbólicamente:

$$\delta W_V = -\delta W_Q \qquad [4.101]$$

donde el subíndice nos dice la magnitud que permanece constante. Si se mueve un dieléctrico de constante eléctrica $\epsilon > \epsilon_0$ hacia una región en que el campo eléctrico es más intenso, la energía aumenta en lugar de disminuir. Para un desplazamiento generalizado $d\xi$ la fuerza mecánica que actúa es:

$$F_\xi = +\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_V \qquad [4.102]$$

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

La deducción de las ecuaciones macroscópicas de la electrostática promediando sobre los agregados de átomos se presenta en el capítulo 6 y en:

ROSENFELD, cap. 2.
MASON y WEAVER, cap. I, parte III.
VAN VLECK, cap. 1.

* Solamente es necesario que $\delta\Phi_2 = -\delta\Phi_1$ en los electrodos, ya que es el único lugar en que existen cargas libres.

ROSENFELD trata además la teoría electrónica clásica de los dieléctricos. El libro de VAN VLECK se dedica a las susceptibilidades eléctrica y magnética. Libros específicos sobre fenómenos de polarización eléctrica son los de:

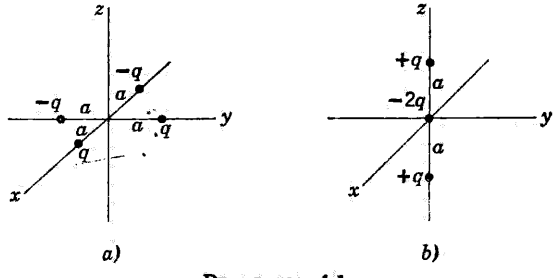
BÖTTCHER.
DEBYE.
FRÖHLICH.

Los problemas de contorno con dieléctricos se tratan en todas las referencias de electrostática de los capítulos 2 y 3. Nuestro estudio sobre fuerzas y energía en medios dieléctricos es más bien breve. Para hallar discusiones más extensas, que incluyen fuerzas sobre dieléctricos líquidos y sólidos, el tensor de esfuerzos eléctrico, la electrostricción y los efectos termodinámicos pueden encontrarse en:

ABRAHAM y BECKER, tomo I, cap. 5.
DURAND, caps. 6 y 7.
LANDAU y LIFSHITZ, *Electrodynamics of Continuous Media.*
MAXWELL, vol. I, cap. 5.
PANOFSKY y PHILLIPS, cap. 6.
STRATTON, cap. 2.

PROBLEMAS

4.1. Calcúlense los momentos multipolares q_{lm} de las distribuciones de carga que a continuación se presentan. Trátese de obtener resultados de los momentos no nulos que sean válidos para cualquier l, pero en cada caso hállense al menos los *dos primeros* conjuntos de momentos no nulos.



PROBLEMA 4.1.

c) Exprésese el desarrollo en multipolos del potencial correspondiente a la distribución de carga *b)*. Conservando en el desarrollo solamente el término de menor orden, represéntese el potencial en el plano $x-y$ como función de la distancia al origen, para distancias mayores que a.

d) Calcúlese directamente de la ley de Coulomb el potencial exacto de la distribución *b)* en el plano $x-y$. Represéntese en función de la distancia y compárese con el resultado hallado en *c)*.

Sepárese la forma asintótica en los apartados *c)* y *d)* a fin de poder ver con mayor claridad el comportamiento a distancias grandes.

4.2. Un dipolo puntual con momento dipolar $\boldsymbol{p}$ está colocado en el punto $\boldsymbol{x}_0$. Demuéstrese a partir de las propiedades de la derivada de la función delta de Dirac que, para el cálculo del potencial o la energía de un dipolo en un campo exterior, el dipolo puede describirse mediante una densidad de carga efectiva:

$$\rho_{ef}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{p}\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

4.3. El l-ésimo término del desarrollo multipolar [4.1] del potencial queda especificado por los $(2l+1)$ momentos multipolares q_{lm}. Por otra parte, los momentos multipolares cartesianos:

$$Q_{\alpha\beta\gamma}=\int \rho(x)x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}d^3x$$

siendo α, β y γ enteros no negativos sujetos a la restricción $\alpha+\beta+\gamma=l$, resultan ser $(l+1)(l+2)/2$ en total. Por consiguiente, para $l>1$ existen más momentos multipolares cartesianos de los que parecen necesarios para describir el término del potencial cuya dependencia radial es de la forma r^{-l-1}.

Demuéstrese que, mientras q_{lm} se transforman en las rotaciones como tensores esféricos de orden l, los momentos multipolares cartesianos corresponden a tensores esféricos de órdenes l, $l-2$, $l-4$, ..., $l_{\text{mín}}$, siendo $l_{\text{mín}}=0$ o 1, según l sea par o impar, respectivamente. Compruébese que el número total de componentes tensoriales diferentes es igual al número total de tensores cartesianos. ¿Por qué en el desarrollo [4.1] solamente son necesarios los q_{lm}?

4.4. *a)* Demuéstrese el teorema siguiente:

Los valores de los $(2l+1)$ momentos del primer multipolo no nulo para una distribución arbitraria de carga $\rho(x)$ son independientes del origen de los ejes de coordenadas, en tanto que los valores de todos los multipolos superiores dependen en general de la elección de origen. (Los diferentes momentos q_{lm} para l dado dependen naturalmente de la orientación de los ejes.)

b) Una distribución de carga tiene los momentos multipolares q, $\boldsymbol{p}$, Q_{ij}, ... con respecto a un sistema de ejes coordenados, y los momentos q', $\boldsymbol{p}'$, Q'_{ij}, ... con respecto a otro sistema cuyos ejes son paralelos a los primeros, pero cuyo origen está situado en el punto $\boldsymbol{R}=(X, Y, Z)$ relativo al primer origen. Determínese explícitamente las relaciones entre los momentos monopolar, dipolar y cuadrupolar en los dos sistemas de coordenadas.

c) Si $q\neq 0$, ¿puede encontrarse $\boldsymbol{R}$ con la condición de que $\boldsymbol{p}'=0$? Si tanto q como $\boldsymbol{p}$ son distintos de cero, al menos si $\boldsymbol{p}\neq 0$, ¿puede encontrarse $\boldsymbol{R}$ con la condición de que $Q'_{ij}=0$?

4.5. Una densidad de carga localizada $\rho(x, y, z)$ se coloca en un campo electrostático externo descrito por el potencial $\Phi^{(0)}(x, y, z)$. El potencial externo varía suavemente con la posición en la región en que la densidad de carga es diferente de cero.

a) Calcúlese a partir de principios básicos la *fuerza* total que actúa sobre la distribución de carga en forma de desarrollo en momentos multipolares multiplicados por derivadas del campo eléctrico, hasta los momentos cuadrupolares incluidos. Demuéstrese que la fuerza es:

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}^{(0)}(0)+\{\nabla[\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}^{(0)}(x)]\}_0+\left\{\nabla\left[\frac{1}{6}\sum_{j,k}Q_{jk}\frac{\partial E_j^{(0)}}{\partial x_k}(x)\right]\right\}_0+\ldots$$

Compárese esta expresión con el desarrollo [4.24] para la *energía* W. Nótese que [4.24] es un número, ¡no una función de x que pueda ser derivada! ¿Cuál es su relación con $\boldsymbol{F}$?

b) Repítase el cálculo de *a)* para el *par mecánico de fuerzas* total. Por simplicidad, evalúese solamente una de las componentes cartesianas del par; por ejemplo, la N_1. Demuéstrese que esta componente vale:

$$N_1=[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}^{(0)}(0)]_1+\frac{1}{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_j Q_{2j}E_j^{(0)}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_j Q_{3j}E_j^{(0)}\right)\right]_0+\ldots$$

4.6. Un núcleo de momento cuadripolar Q se encuentra en un campo eléctrico de simetría cilíndrica con un gradiente $(\partial E_z/\partial z)_0$ en dirección del eje z en la posición ocupada por el núcleo.

a) Demuéstrese que la energía de interacción cuadripolar es:

$$W=-\frac{e}{4}Q\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_0$$

b) Si se sabe que $Q=2\times10^{-24}$ cm^2 y que W/h es 10 Mc/seg, siendo h la constante de Planck, calcúlese $(\partial E_z/\partial z)_0$ en unidades e/a_0^3, en donde $a_0=\epsilon_0 h^2/\pi me^2=$ $=0{,}529\times10^{-10}$ m es el radio de Bohr del hidrógeno.

c) Las distribuciones de carga nuclear pueden aproximarse mediante una densidad de carga constante que ocupa un volumen esferoidal de semieje mayor a y semieje menor b. Calcúlese el momento cuadripolar de dicho núcleo suponiendo que la carga total es Ze. Sabiendo que el Eu^{153} $(Z=63)$ tiene un momento cuadripolar $Q=2{,}5\times10^{-24}$ cm^2 y un radio medio

$$R=(a+b)/2=7\times10^{-13}\text{ cm}$$

calcúlese la diferencia relativa entre los radios $(a-b)/R$.

4.7. Se tiene una distribución localizada de carga cuya densidad es

$$\rho(r)=\frac{1}{64\pi}r^2e^{-r}\operatorname{sen}^2\theta$$

a) Obténgase un desarrollo en multipolos del potencial debido a esta densidad de carga y determínense todos los momentos multipolares no nulos. Exprésese el potencial a distancias grandes como un desarrollo finito en polinomios de Legendre.

b) Determínese explícitamente el potencial en un punto cualquiera del espacio y demuéstrese que cerca del origen se tiene:

$$\Phi(r)\simeq\frac{1}{4}-\frac{r^2}{120}P_2(\cos\theta)$$

expresión correcta hasta r^2 inclusive.

c) Si en el origen existe un núcleo de momento cuadripolar

$$Q=10^{-28}\text{ m}^2$$

determínese la magnitud de la energía de interacción suponiendo que la unidad de carga en $\rho(r)$ es la carga electrónica, y que la unidad de longitud es el radio de Bohr para el hidrógeno, $a_0=4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2=0{,}529\times10^{-10}$ m. Exprésese el resultado como una frecuencia, dividiendo por la constante de Planck h.

En este problema, la densidad de carga es la que corresponde a los estados $m=\pm1$ del nivel $2p$ del hidrógeno, mientras que la interacción cuadripolar es del mismo orden que la hallada en moléculas.

4.8. Se coloca una capa cilíndrica circular recta de gran longitud, de constante dieléctrica ϵ y de radio interior y exterior a y b, respectivamente, en un campo E_0 inicialmente uniforme, siendo el eje del cilindro perpendicular al campo. Dentro y fuera del cilindro se tiene un medio de constante dieléctrica ϵ_0.

a) Determínense el potencial y el campo eléctrico en las tres regiones, despreciando el efecto debido a los extremos.

b) Represéntense las líneas de fuerza para $b\simeq2a$.

c) Discútanse las formas límite de la solución obtenida que corresponden a un cilindro dieléctrico en un campo uniforme, y una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

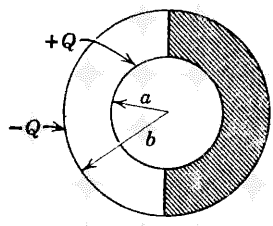
4.9. Se coloca una carga puntual q en el vacío a una distancia d del centro de una esfera dieléctrica de radio a ($a < d$) y constante dieléctrica ϵ.

a) Calcúlese el potencial en todos los puntos del espacio mediante un desarrollo en armónicos esféricos.

b) Calcúlense las componentes cartesianas del campo eléctrico *en las proximidades* del centro de la esfera.

c) Compruébese que en el límite $\epsilon \to \infty$ el resultado coincide con el de una esfera conductora.

4.10. Dos esferas concéntricas de radios interior y exterior a y b, respectivamente, están provistas de cargas $\pm Q$. El espacio entre las dos esferas se encuentra medio lleno por una capa semiesférica de dieléctrico (de constante dieléctrica ϵ), tal como indica la figura.



PROBLEMA 4.10.

a) Calcúlese el campo eléctrico entre las dos esferas.

b) Calcúlese la distribución superficial de carga en la esfera interior.

c) Calcúlese la densidad de carga de polarización inducida sobre la superficie del dieléctrico en $r=a$.

4.11. Los datos que aparecen a continuación sobre variación de la constante dieléctrica con la presión están tomados de las *Smithsonian Physical Tables*, 9.ª ed., página 424:

Aire a 292 °K

Presión (atm)	ϵ/ϵ_0	
20	1,0108	La densidad relativa del
40	1,0218	aire en función de la pre-
60	1,0333	sión viene dada en *AIP*
80	1,0439	*Handbook*, 3.ª ed., 1972,
100	1,0548	págs. 4-165.

Pentano (C_5H_{12}) a 303 °K

Presión (atm)	Densidad (g/cm³)	ϵ/ϵ_0
1	0,613	1,82
10^3	0,701	1,96
4×10^3	0,796	2,12
8×10^3	0,865	2,24
12×10^3	0,907	2,33

Sométase a prueba la relación de Clausius-Mossotti entre la constante dieléctrica y la densidad para el aire y el pentano en los intervalos tabulados. ¿Se cumple con exactitud? ¿Aproximadamente? Si lo es aproximadamente, discútanse las variaciones relativas de densidad y $(\epsilon - \epsilon_0)$. Para el caso del pentano, compárese la relación Clausius-Mossotti con la más grosera $(\epsilon - \epsilon_0) \propto$ densidad.

4.12. El vapor de agua es un gas polar cuya constante dieléctrica varía apreciablemente con la temperatura. A continuación, en las tablas, presentamos datos experimentales sobre el particular. Suponiendo que el vapor de agua cumple la ley de los gases ideales, calcúlese la polarizabilidad molecular en función de $1/T$ y represéntese gráficamente. De la pendiente de la curva, dedúzcase un valor del momento dipolar permanente de la molécula de agua (exprésese el momento dipolar en coulomb × metro).

T (°K)	Presión (cm Hg)	$\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0} \times 10^5$
393	56,49	400,2
423	60,93	371,7
453	65,34	348,8
483	69,75	328,7

4.13. Dos superficies cilíndricas coaxiales de gran longitud y radios a y b se sumergen verticalmente en un líquido dieléctrico. Si el líquido entre los electrodos sube una altura h, al establecer una diferencia de potencial V, demuéstrese que la susceptibilidad del líquido es

$$\chi_e = \frac{(b^2 - a^2)\rho g h \ln (b/a)}{V^2}$$

en donde ρ es la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad; despréciese la susceptibilidad del aire.

MAGNETOSTATICA

5.1. INTRODUCCION Y DEFINICIONES

En los capítulos precedentes se han estudiado varios aspectos de la electrostática (esto es, los campos e interacciones con cargas y superficies límite en reposo). Ahora, en cambio, estudiaremos los fenómenos magnéticos en régimen estacionario. Desde un punto de vista histórico, los fenómenos magnéticos han sido conocidos y estudiados durante tanto tiempo al menos como los fenómenos eléctricos.

La piedra imán se conoce desde tiempos remotos, y la brújula es un invento muy antiguo; los estudios de GILBERT sobre la Tierra considerándola como un gran imán datan de antes de 1600. En contraste con la electrostática, los primeros contactos del hombre con los materiales magnéticos no llevaron de un modo directo a dar con las leyes fundamentales de los campos magnéticos. Las razones son varias, pero todas ellas surgen de la diferencia radical existente entre la magnetostática y la electrostática: *No existen cargas magnéticas libres.* Esto significa que los fenómenos magnéticos son muy diferentes de los eléctricos y que durante largo tiempo no se estableció conexión alguna entre ellos. La entidad básica en los estudios magnéticos era lo que ahora conocemos como dipolo magnético. En presencia de materiales magnéticos un dipolo tiende a alinearse en una cierta dirección. Tal dirección es, por definición, la del vector densidad de flujo magnético, que se representa por $\boldsymbol{B}$, supuesto que el dipolo sea lo suficientemente pequeño y débil para que no perturbe el campo existente. El módulo de la densidad de flujo puede definirse en función del par de fuerzas mecánico $\boldsymbol{N}$ ejercido sobre el dipolo magnético:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} \qquad [5.1]$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ es el momento magnético del dipolo, definido en un sistema adecuado de unidades.

Ya al definir la densidad del flujo magnético $\boldsymbol{B}$ (llamada también *inducción magnética)* nos hallamos en una situación más complicada de la que teníamos en el caso del campo eléctrico. Aún más, no se llegó a conclusiones cuantitativas de los fenómenos magnéticos hasta que se hubo establecido la conexión entre corrientes y campos magnéticos. Una corriente no es sino cargas en movimiento y viene descrita por el vector densidad de corriente $\boldsymbol{J}$; su dirección y sentido es el del movimiento de las cargas positivas, y su módulo viene dado por la carga que atraviesa la unidad de área en la unidad de tiempo.

En unidades electrostáticas, la densidad de corriente se mide en statculombios por centímetro cuadrado-segundo y recibe a veces el nombre de statam-

perio por centímetro cuadrado; en unidades M.K.S.A. se mide en culombios por segundo y metro cuadrado, o amperios por metro cuadrado. Si la densidad de corriente se halla confinada a hilos conductores de sección transversal pequeña, usualmente integramos al área de la sección transversal y hablamos de una corriente de tantos amperios fluyendo a lo largo del hilo.

La conservación de la carga exige que la densidad de carga en cada punto del espacio esté relacionada con la densidad de corriente en su proximidad por una ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \qquad [5.2]$$

Esta ecuación expresa el hecho físico de que una disminución de la carga en el interior de un volumen pequeño debe ir acompañado de un flujo de carga a través de la superficie que limita el volumen, ya que la cantidad total de carga debe conservarse. Los fenómenos magnéticos estacionarios se caracterizan por no haber variaciones de la densidad de carga en ningún punto del espacio. Tenemos, pues, en magnetostática:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \qquad [5.3]$$

Pasaremos a continuación a considerar la relación experimental entre corriente y campo magnético para establecer las leyes básicas de la magnetostática.

5.2. LEY DE BIOT Y SAVART

OERSTED en 1819 observó que los hilos que conducen corrientes eléctricas producían desviaciones en dipolos magnéticos permanentes colocados en su proximidad. Así, pues, las corrientes eran fuentes de la densidad de flujo magnético.

Primeramente BIOT y SAVART (1820) y más tarde AMPÈRE (1920-25), mediante experiencias mucho más elaboradas, establecieron las leyes experimentales básicas que relacionan la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ con las corrientes, y establecieron la ley de la fuerza ejercida entre una corriente y otra. Aunque de forma distinta de la deducida por AMPÈRE, la relación fundamental es como sigue: si circula una corriente I por un conductor filiforme, $d\boldsymbol{l}$ es un elemento de longitud (dirigido en el sentido en que circula la corriente), y $\boldsymbol{x}$, el vector distancia desde el elemento de longitud a un punto de observación P, tal como se indica en la figura 5.1, la densidad de flujo elemental $d\boldsymbol{B}$ en el punto P viene dada en módulo y dirección por

$$d\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{I}\frac{(d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^3} \qquad [5.4]$$

Nótese que [5.4] es una ley inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, exactamente como ocurría con la ley de Coulomb en la electrostática. No obstante, el carácter vectorial es muy distinto.

Un aviso de precaución acerca de [5.4]. Puede existir la tentación de pensar que [5.4] es el equivalente magnético del campo eléctrico [1.3] de una carga puntual y de identificar $I\,d\boldsymbol{l}$ como magnitud análoga de q. Estrictamente hablando, esto es incorrecto. La ecuación [5.4] sólo tiene sentido como un ele-

mento de una suma realizada sobre un conjunto continuo; tal suma representa la inducción magnética de una espira o circuito eléctrico. Es obvio que la ecuación de continuidad [5.3] no se satisface por un elemento de corriente aislado $I\,dl$, ¡la corriente saldría de la nada y se esfumaría después de recorrer la

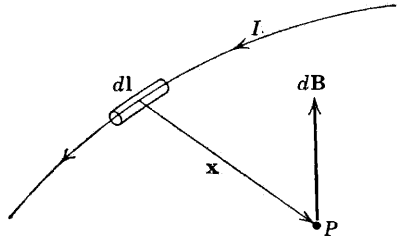


FIG. 5.1. Inducción magnética elemental dB debida al elemento de corriente Idl.

longitud dl! Una salida aparente de esta dificultad es darse cuenta de que la corriente en realidad es carga en movimiento y reemplazar $I\,dl$ por qv, siendo q la carga y v su velocidad. La densidad de flujo para tal carga en movimiento sería:

$$\boldsymbol{B} = kq\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} \qquad [5.5]$$

en estrecha correspondencia con [5.4]. Pero esta expresión depende del tiempo y además es válida únicamente para cargas cuyas velocidades son pequeñas comparadas con la de la luz y cuyas aceleraciones pueden despreciarse. Como en este capítulo estamos considerando campos magnéticos estacionarios nos quedaremos con [5.4] e integraremos a lo largo de los circuitos para obtener los resultados físicos *.

La constante k de [5.4] y [5.5] depende del sistema de unidades que se utilice; en el apéndice se discute este aspecto ampliamente. Si se mide la corriente en unidades e.s.u., pero la densidad de flujo se mide en unidades e.m.u., la constante es $k=\dfrac{1}{c}$, siendo c una constante que experimentalmente se encuentra que es igual a la velocidad de la luz en el *vacío* ($c=2{,}998\times10^8$ m/seg). Este sistema de unidades se llama sistema de Gauss.

Si la corriente se mide en amperios y la densidad de flujo en tesla, la constante es $k=10^{-7}$, y suele escribirse $k=\mu_0/4\pi$, siendo μ_0 la *permeabilidad del vacío*. Este sistema se llama MKSA, o Sistema Internacional de unidades (S.I.). Para el vacío, el producto $\epsilon_0\mu_0=1/c^2$, siendo de nuevo c la velocidad de la luz. Que aparezca la velocidad de la luz en nuestras ecuaciones en este momento puede parecer algo artificial, pero no lo es si se considera el electromagnetismo

* Aquí hay una inconsistencia aparente. Después de todo, las corrientes no son sino cargas en movimiento. ¿Cómo es posible que al integrar [5.4] conduzca a resultados exactos aunque [5.5] sea sólo aproximada? La respuesta es que [5.5] se aplica a una sola carga. Si un sistema de muchas cargas se mueve de modo que en el límite en que la unidad de carga tiende a cero y el número de cargas tiende a infinito da lugar a un flujo de corriente estacionario; entonces la suma de los campos relativistas exactos, *incluyendo los efectos de aceleraciones,* da un campo magnetostático igual al campo obtenido integrando [5.4] a lo largo del circuito. Este resultado, bastante sutil, se discute en los problemas 14.12 y 14.13 en ciertas situaciones especiales.

desde el punto de vista de la relatividad especial. Como se discute con detalle en el capítulo 11, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ deben considerarse como elementos diferentes del tensor intensidad del campo $F_{\alpha\beta}$. Una carga en reposo en un sistema tiene sólo campo electrostático en dicho sistema, pero en un sistema en movimiento lleva asociada una densidad de flujo magnético dada por [5.5], con $k=\mu_0/4\pi$. La elección tiene la ventaja adicional de que al medir la carga y la corriente en unidades coherentes la ecuación de continuidad mantiene su forma simple, sin factores de c.

Por integración podemos superponer linealmente las contribuciones elementales [5.4] para determinar la densidad de flujo magnético debida a diferentes configuraciones de hilos que conducen corrientes. Por ejemplo, la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ del conductor rectilíneo largo, indicado en la figura 5.2, y que lleva una corriente I, puede verse que está dirigida según la normal al plano

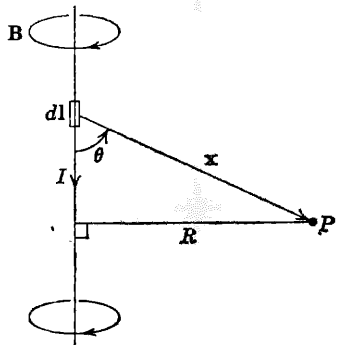


FIG. 5.2.

que contiene el hilo y el punto de observación, de modo que las líneas de inducción magnética son circunferencias concéntricas alrededor del hilo. El módulo de $\boldsymbol{B}$ viene dado por:

$$|\boldsymbol{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(R^2+l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad [5.6]$$

donde R es la distancia del punto de observación al conductor. Este es el resultado experimental encontrado por primera vez por BIOT y SAVART; se conoce como *ley de Biot-Savart*. Observemos que el módulo de $\boldsymbol{B}$ varía con R del mismo modo que el campo eléctrico debido a una línea de carga larga con densidad lineal de carga uniforme.

Esta analogía nos muestra que en ciertas circunstancias puede haber una correspondencia entre problemas electrostáticos y magnetostáticos, a pesar de que el carácter vectorial de ambos campos sea distinto. Veremos algo más de esto en secciones posteriores.

Los experimentos de AMPÈRE no trataban directamente de determinar la relación entre corrientes e inducción magnética, sino que se ocupaban más bien de la fuerza a que está sometido un conductor por el que pasa una corriente en presencia de otro. Como ya hemos introducido la idea de que un elemento de corriente crea inducción magnética, enunciaremos la ley de fuerzas como la

fuerza que actúa sobre un elemento de corriente $I_1\,d\boldsymbol{l}_1$ en presencia de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$. La fuerza elemental es:

$$d\boldsymbol{F}=\frac{\mu_0}{4\pi}I_1\,(d\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{B}) \qquad [5.7]$$

I_1 es la intensidad de corriente (medida en amperios) y $\boldsymbol{B}$ es la densidad de flujo magnético (en tesla). Si el campo externo $\boldsymbol{B}$ se debe a una espira cerrada #2, con una corriente I_2, la fuerza total a que está sometida una espira #1 recorrida por una corriente I_1 es (según [5.4] y [5.7]):

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\oint\oint\frac{d\boldsymbol{l}_1\times(d\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{x}_{12})}{|\boldsymbol{x}_{12}|^3} \qquad [5.8]$$

Las integrales curvilíneas se extienden a cada una de las espiras; $\boldsymbol{x}_{12}$ es el vector distancia del elemento $d\boldsymbol{l}_2$ al elemento $d\boldsymbol{l}_1$, como se muestra en la figura 5.3. Este es el enunciado matemático de las observaciones de AMPÈRE sobre fuerzas

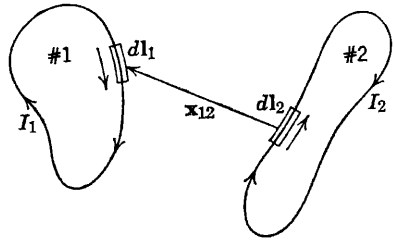


FIG. 5.3. Dos espiras de corriente de Ampère.

entre espiras de corriente. Transformando el integrando puede ponerse esta expresión en forma que es simétrica en $d\boldsymbol{l}_1$ y $d\boldsymbol{l}_2$, y satisface de modo explícito la tercera ley de Newton. En efecto:

$$\frac{d\boldsymbol{l}_1\times(d\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{x}_{12})}{|\boldsymbol{x}_{12}|^3}=-(d\boldsymbol{l}_1\cdot d\boldsymbol{l}_2)\frac{\boldsymbol{x}_{12}}{|\boldsymbol{x}_{12}|^3}+d\boldsymbol{l}_2\left(\frac{d\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{x}_{12}}{|\boldsymbol{x}_{12}|^3}\right) \qquad [5.9]$$

El segundo miembro contiene una diferencial exacta en $d\boldsymbol{l}_1$ y, por tanto, no contribuye a la integral [5.8], con tal que los caminos de integración sean cerrados o se extiendan hasta el infinito. De este modo, la ley de fuerzas de Ampère entre espiras de corriente toma la forma:

$$\boldsymbol{F}_{12}=-\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\oint\oint\frac{(d\boldsymbol{l}_1\cdot d\boldsymbol{l}_2)\boldsymbol{x}_{12}}{|\boldsymbol{x}_{12}|^3} \qquad [5.10]$$

que muestra la simetría en las variables de integración, además de la necesaria dependencia vectorial con $\boldsymbol{x}_{12}$.

Cuando dos hilos rectilíneos paralelos y muy largos, situados a una distancia d, llevan corrientes que valen respectivamente I_1 e I_2, cada uno de ellos experimenta una fuerza por unidad de longitud que está dirigida perpendicular-

mente hacia el otro hilo y vale:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \qquad [5.11]$$

La fuerza es atractiva (o repulsiva) si las corrientes circulan en el mismo sentido (en sentido contrario). Las fuerzas que aparecen entre hilos que conducen corrientes pueden utilizarse para definir la densidad de flujo magnético de un modo que es independiente de los dipolos magnéticos permanentes *. Más adelante veremos que las expresiones para el par de fuerzas [5.1] y para la fuerza [5.7] están íntimamente ligadas.

Si una corriente distribuida con densidad $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ se halla en un campo externo de densidad de flujo $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$, la ley de la fuerza elemental implica que la fuerza total sobre la distribución es:

$$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\, d^3x \qquad [5.12]$$

De modo análogo, el par total es:

$$\boldsymbol{N} = \int \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B})\, d^3x \qquad [5.13]$$

En la sección 5.7 se aplicarán estos resultados a distribuciones de corriente localizadas.

5.3. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA MAGNETOSTATICA Y LA LEY DE AMPERE

Podemos escribir la ley [5.4] de un modo más general para una densidad de corriente $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}\, d^3x' \qquad [5.14]$$

Esta expresión de $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ es análoga a la que da el campo eléctrico en función de la densidad de carga:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\boldsymbol{x}') \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}\, d^3x' \qquad [5.15]$$

Así como para ciertas situaciones no era esta forma de $\boldsymbol{E}$ tan adecuada como las ecuaciones diferenciales, tampoco [5.14] es la forma más útil en magnetostática, aunque contenga en principio una descripción de todos los fenómenos.

Para obtener las ecuaciones diferenciales equivalentes a la [5.14], utilizaremos la igualdad que precede a la [1.15] para transformar la ecuación [5.14] en:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, d^3x' \qquad [5.16]$$

* De hecho, la ecuación [5.11] es la base del patrón de intensidad de corriente aceptado internacionalmente. Véase el Apéndice.

lo que nos dice de modo inmediato que la divergencia de $\boldsymbol{B}$ es nula:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad [5.17]$$

Esta es la primera ecuación de la magnetostática que se corresponde con $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ en la electrostática. Análogamente vamos ahora a calcular el rotacional de $\boldsymbol{B}$:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' \qquad [5.18]$$

Con la ayuda de la identidad $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ válida para cualquier campo vectorial $\boldsymbol{A}$, podemos transformar la expresión [5.18] en:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) d^3x' \qquad [5.19]$$

Y puesto que:

$$\nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) = - \nabla' \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right)$$

y

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) = -4\pi \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

las integrales en [5.19] pueden escribirse así:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) d^3x' + \mu_0 \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \qquad [5.20]$$

Integrando por partes:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' \qquad [5.21]$$

Pero para los fenómenos magnéticos en régimen estacionario $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$, y, de este modo, tenemos:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \qquad [5.22]$$

Esta es la segunda ecuación de la magnetostática que se corresponde con $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$ en electrostática.

En electrostática, la ley de Gauss [1.11] es la forma integral de la ecuación $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$. La forma integral equivalente a [5.22] se llama *ley de Ampère*. Se obtiene aplicando el teorema de Stokes a la integral de la componente normal de [5.22] sobre una superficie abierta S limitada por una curva cerrada C, como se ve en la figura 5.4. Así,

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \, da = \mu_0 \int_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} \, da \qquad [5.23]$$

se transforma en

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, da \qquad [5.24]$$

Como la integral de superficie de la densidad de corriente es la corriente to-

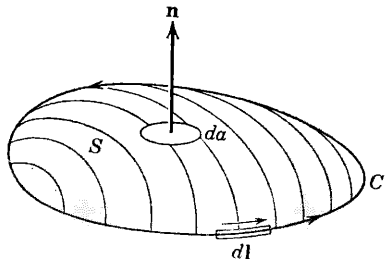


FIG. 5.4.

tal I que pasa por dentro de la curva cerrada C, podemos expresar la ley de Ampère de la forma:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I \qquad [5.25]$$

Así como la ley de Gauss podía emplearse para calcular el campo eléctrico en situaciones altamente simétricas, también puede emplearse la ley de Ampère en situaciones análogas.

5.4. POTENCIAL VECTOR

Las ecuaciones diferenciales fundamentales de la magnetostática son:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [5.26]$$

Se nos presenta el problema de su resolución. Si en la región de interés fuese nula la densidad de corriente, la condición $\nabla \times \boldsymbol{B} = 0$ nos permitirá expresar el vector inducción magnética como gradiente de un potencial escalar $\boldsymbol{B} = -\nabla \Phi_M$. En tal caso, [5.26] se reduce a la ecuación de Laplace para Φ_M y todas las técnicas utilizadas para tratar problemas en electrostática podrían aplicarse aquí. Hay muchos problemas que pueden ser tratados de este modo, pero aplazaremos su discusión hasta más adelante en este capítulo. La razón fundamental es que las condiciones de contorno difieren de las que hemos encontrado en electrostática y los problemas incluyen en general medios macroscópicos con propiedades magnéticas diferentes de las del vacío con cargas y corrientes.

Un método general de abordar el problema es aprovechar la segunda ecuación de [5.26]. Si $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ en cualquier punto, $\boldsymbol{B}$ es el rotacional de un campo

vectorial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ llamado *potencial vector*:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \qquad [5.27]$$

De hecho, ya hemos escrito $\boldsymbol{B}$ de esta forma en [5.16]. La forma general de $\boldsymbol{A}$ es, como se desprende de [5.16]:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' + \nabla\Psi(\boldsymbol{x}) \qquad [5.28]$$

La presencia adicional del gradiente de una función escalar arbitraria demuestra que, para una inducción magnética dada $\boldsymbol{B}$, el potencial vector puede transformarse libremente de acuerdo con

$$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A} + \nabla\Psi \qquad [5.29]$$

Esta transformación se conoce con el nombre de transformación de *contraste* *. Resulta posible realizar tales transformaciones con $\boldsymbol{A}$, porque la ecuación [5.27] especifica solamente el rotacional de $\boldsymbol{A}$. La libertad que proporcionan las transformaciones de contraste nos permite hacer que $\boldsymbol{A}$ tenga la forma funcional conveniente que deseemos.

Si sustituimos [5.27] en la primera ecuación de [5.26], tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= \mu_0 \boldsymbol{J} \\ \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} &= \mu_0 \boldsymbol{J} \end{aligned}\right\} \qquad [5.30]$$

Si aprovechamos ahora la libertad que nos da [5.29], podemos hacer una elección de contraste ** conveniente, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$. En este caso, cada componente rectangular del potencial vector satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \qquad [5.31]$$

Por lo que ya discutimos en electrostática, está claro que la solución para $\boldsymbol{A}$ en un espacio ilimitado es [5.28] con Ψ = constante:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' \qquad [5.32]$$

La condición Ψ = constante puede entenderse en la forma siguiente. Nuestra elección del contraste $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ se reduce a $\nabla^2\Psi = 0$, puesto que el primer término de [5.28] tiene divergencia nula debido a que $\nabla' \cdot \boldsymbol{J} = 0$. Si $\nabla^2\Psi = 0$ en todo el espacio, debe ser al menos constante, suponiendo que no existen fuentes en el infinito.

---

* Al plantearnos la traducción o no del término «gauge», nos hemos inclinado por hacerlo utilizando a título de propuesta la palabra «contraste», que expresa aceptablemente a nuestro juicio la idea original. *(N. del T.)*

** Por razones que quedarán aclaradas en la sección 6.5, esta elección recibe el nombre de *contraste de Coulomb*.

5.5. POTENCIAL VECTOR E INDUCCION MAGNETICA DE UNA ESPIRA CIRCULAR

Como ilustración del cálculo de campos magnéticos a partir de distribuciones de corrientes dadas, consideraremos el problema de una espira circular de radio a, situada en el plano x-y, con centro en el origen y por la que pasa una corriente I, tal como se indica en la figura 5.5. La densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ sólo tiene una componente en la dirección ϕ:

$$J_\phi = I\delta(\cos\theta')\frac{\delta(r'-a)}{a} \qquad [5.33]$$

Las funciones delta restringen el paso de la corriente a un anillo de radio a. El vector densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ puede escribirse:

$$\boldsymbol{J} = -J_\phi \operatorname{sen}\phi'\boldsymbol{i} + J_\phi \cos\phi'\boldsymbol{j} \qquad [5.34]$$

Como el problema presenta simetría cilíndrica, podemos escoger el punto de observación en el plano x-z ($\phi = 0$) a efectos de cálculo. Al ser la integración aci-

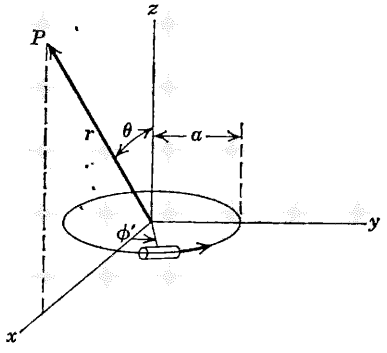


FIG. 5.5.

mutal de [5.32] simétrica alrededor de $\phi' = 0$, la componente x de la corriente no contribuirá. Esto deja únicamente la componente y, que es A_ϕ. Por tanto,

$$A_\phi(r,\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int r'^2\,dr'\,d\Omega'\,\frac{\cos\phi'\delta(\cos\theta')\,\delta(r'-a)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \qquad [5.35]$$

donde $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\phi']^{1/2}$.

Consideraremos primeramente la integración directa de [5.35]. La integración sobre las funciones delta nos da el resultado:

$$A_\phi(r,\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} Ia\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi'\,d\phi'}{(a^2+r^2-2ar\operatorname{sen}\theta\cos\phi')^{1/2}} \qquad [5.36]$$

Podemos expresar esta integral mediante las integrales elípticas completas K

y E:

$$A_\phi(r,\theta)=\frac{\mu_0 Ia}{\pi\sqrt{a^2+r^2+2ar\,\text{sen}\,\theta}}\left[\frac{(2-k^2)K(k)-2E(k)}{k^2}\right] \qquad [5.37]$$

donde el argumento de las integrales elípticas es:

$$k^2=\frac{4ar\,\text{sen}\,\theta}{a^2+r^2+2ar\,\text{sen}\,\theta}$$

Las componentes de la inducción magnética:

$$\left.\begin{aligned} B_r&=\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\text{sen}\,\theta A_\phi)\\ B_\theta&=-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\\ B_\phi&=0\end{aligned}\right\} \qquad [5.38]$$

pueden expresarse también mediante las integrales elípticas.

Sin embargo, los resultados no son particularmente interesantes (salvo para cálculo numérico).

Cuando el argumento k^2 es pequeño, lo que corresponde a $a\gg r$, $a\ll r$ o $\theta\ll 1$ el corchete de [5.37] se reduce a $(\pi k^2/16)$. Entonces el potencial vector se convierte aproximadamente en:

$$A_\phi(r,\theta)=\frac{\mu_0 Ia^2}{4\pi}\,\frac{r\,\text{sen}\,\theta}{(a^2+r^2+2ar\,\text{sen}\,\theta)^{3/2}} \qquad [5.39]$$

Los campos que corresponden son:

$$\left.\begin{aligned} B_r&\simeq\frac{\mu_0 Ia^2}{4}\cos\theta\,\frac{(2a^2+2r^2+ar\,\text{sen}\,\theta)}{(a^2+r^2+2ar\,\text{sen}\,\theta)^{5/2}}\\ B_\theta&\simeq-\frac{\mu_0 Ia^2}{4}\,\text{sen}\,\theta\,\frac{(2a^2+r^2+ar\,\text{sen}\,\theta)}{(a^2+r^2+2ar\,\text{sen}\,\theta)^{5/2}}\end{aligned}\right\} \qquad [5.40]$$

Estas expresiones pueden particularizarse fácilmente en tres zonas, cerca del eje ($\theta\ll 1$), cerca del centro de la espira ($r\ll a$) y lejos de la espira ($r\gg a$).

De particular interés son los campos alejados de la espira:

$$\left.\begin{aligned} B_r&=2\,\frac{\mu_0}{4\pi}(I\pi a^2)\,\frac{\cos\theta}{r^3}\\ B_\theta&=\frac{\mu_0}{4\pi}(I\pi a^2)\,\frac{\text{sen}\,\theta}{r^3}\end{aligned}\right\} \qquad [5.41]$$

Por comparación con los campos debidos a dipolos eléctricos [4.12], vemos que los campos magnéticos a distancias muy grandes de la espira de corriente presentan carácter dipolar. Por analogía con la electrostática definiremos el

momento dipolar magnético de la espira como:

$$m = \pi I a^2 \tag{5.42}$$

En la sección siguiente veremos que éste no es sino un caso particular de un resultado general; las distribuciones localizadas de corriente dan campos dipolares a distancias grandes. El momento dipolar de una espira plana recorrida por una corriente es igual al área de la espira multiplicada por la intensidad de la corriente.

Aunque ya hemos obtenido una solución completa al problema mediante las integrales elípticas, vamos a obtener ahora el desarrollo en armónicos esféricos para poner de manifiesto las semejanzas y diferencias entre los problemas magnetostáticos y los electrostáticos. Para ello, volvamos a [5.35] y sustituyamos $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-1}$ por su desarrollo en armónicos esféricos [3.70]:

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I}{a} \operatorname{Re} \sum_{l,m} \frac{Y_{lm}(\theta, 0)}{2l+1} \times$$

$$\times \int r'^2\, dr'\, d\Omega'\, \delta(\cos\theta')\delta(r'-a) e^{i'\phi} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') \tag{5.43}$$

La presencia de $e^{i\phi'}$ nos dice que solamente contribuirán a la suma los términos con $m = +1$. Por tanto:

$$A_\phi = 2\mu_0 \pi I a \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Y_{l1}(\theta, 0)}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \left[Y_{l,1}^* \left(\theta' = \frac{\pi}{2}, \phi' \right) e^{i\phi'} \right] \tag{5.44}$$

donde ahora $r_<$ ($r_>$) es el menor (mayor) entre a y r. La expresión contenida en el corchete es un número que depende del índice l.

$$\left[\ \right] = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} P_l^1(0) = \begin{cases} 0, & \text{para } l \text{ par} \\ \sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} \left[\dfrac{(-1)^{n+1}\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{3}{2})} \right], & \text{para } l = 2n+1 \end{cases} \tag{5.45}$$

Y así podemos expresar A_ϕ:

$$A_\phi = -\frac{\mu_0 I a}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (n+1)!} \frac{r_<^{2n+1}}{r_>^{2n+2}} P_{2n+1}^1(\cos\theta) \tag{5.46}$$

donde $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1$, y el coeficiente correspondiente a $n=0$ es por definición la unidad. Para hallar la componente radial de $\boldsymbol{B}$ a partir de [5.38], necesitamos:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2} P_l^1(x)\right] = l(l+1) P_l(x) \tag{5.47}$$

Y así tenemos:

$$B_r = \frac{2\mu_0 I a}{4r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2^n n!} \frac{r_<^{2n+1}}{r_>^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos\theta) \tag{5.48}$$

La componente de $\boldsymbol{B}$ según θ es de modo análogo:

$$B_\theta = -\frac{\mu_0 I a^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^n(n+1)!}\begin{cases} -\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)\dfrac{1}{a^3}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{2n} \\ \dfrac{1}{r^3}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2n} \end{cases} P_{2n+1}^1(\cos\theta) \qquad [5.49]$$

La línea superior es válida para $r < a$, y la inferior para $r > a$. Para $r \gg a$, el único término importante de la serie es el $n=0$. Así, puesto que $P_1^1(\cos\theta) = \operatorname{sen}\theta$, [5.48] y [5.49] se reducen a [5.41]. Para $r \ll a$, otra vez el término importante es el $n=0$. El resultado es una inducción magnética $\mu_0 I/2a$ en la dirección z, resultado que se puede obtener por procedimientos elementales.

Nótese una diferencia característica entre este problema y el correspondiente electrostático con simetría cilíndrica. Aquí aparecen polinomios asociados de Legendre, además de polinomios ordinarios. La causa de esto debe buscarse en el carácter vectorial de la corriente y del potencial vector, mientras que la carga y el potencial electrostático tenían carácter escalar.

Otra forma de abordar el problema de la espira plana es empleando un desarrollo en ondas cilíndricas. Podemos utilizar para representar $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-1}$ la forma cilíndrica [3.148] o [3.149] en lugar de [3.70], o la expresión del problema 3.14, *b)*. La aplicación de esta técnica a la espira circular la dejaremos para los problemas.

5.6. CAMPO MAGNETICO DE UNA DISTRIBUCION LOCALIZADA DE CORRIENTE; MOMENTO MAGNETICO

Consideraremos ahora las propiedades de una distribución cualquiera de corriente situada en una región pequeña del espacio; el término «pequeña» es relativo a la escala de longitudes de interés para el observador.

Un tratamiento completo de este problema, en analogía con el desarrollo multipolar electrostático, puede hacerse utilizando los armónicos esféricos *vectoriales* *. Estos se presentan en el capítulo 16 en relación con la radiación multipolar. Aquí nos conformaremos con la aproximación de menor orden. Partiendo de [5.32], desarrollamos el denominador en potencias de $\boldsymbol{x}'$ medidas respecto de un origen elegido dentro del dominio donde se halla la distribución de corriente, como se indica esquemáticamente en la figura 5.6:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}|^3} + \ldots \qquad [5.50]$$

Entonces, como desarrollo de una componente dada del potencial vector tenemos:

$$A_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\int J_i(\boldsymbol{x}')\,d^3x' + \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\cdot\int J_i(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\,d^3x' + \ldots\right\} \qquad [5.51]$$

* Este no es el único camino. Pueden emplearse potenciales escalares. Véase J. B. BRONZAN, *Am. J. Phys.*, **39**, 1357 (1971).

El hecho de que $\boldsymbol{J}$ es una distribución de corriente localizada, de divergencia nula, permite simplificar y transformar el desarrollo [5.51]. Supongamos que

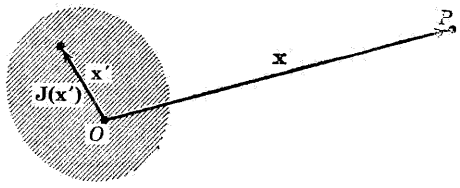


FIG. 5.6. La densidad localizada de corriente $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$ da lugar a una inducción magnética en el punto P de posición $\boldsymbol{x}$.

$f(\boldsymbol{x}')$ y $g(\boldsymbol{x}')$ son funciones de $\boldsymbol{x}'$ bien comportadas a elegir posteriormente. Entonces, si $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$ es localizada y tiene divergencia nula, tenemos:

$$\int (f\boldsymbol{J}\cdot\nabla' g + g\boldsymbol{J}\cdot\nabla' f)\, d^3x' = 0 \qquad [5.52]$$

Esto puede demostrarse mediante integración por partes del segundo término, seguido del desarrollo de $f\nabla'\cdot(g\boldsymbol{J})$. Si $f=1$ y $g=x_i'$, la igualdad [5.52] determina que:

$$\int J_i(\boldsymbol{x}')\, d^3x' = 0$$

Por consiguiente, el primer término de [5.51], que corresponde al término monopolar del desarrollo electrostático, está ausente. Si $f=x_i'$ y $g=x_j'$ la igualdad [5.52] conduce a:

$$\int (x_i' J_j + x_j' J_i)\, d^3x = 0$$

Por tanto, la integral del segundo término de [5.51] puede escribirse:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\cdot\int \boldsymbol{x}' J_i\, d^3x &= \sum_i x_i \int x_i' J_i\, d^3x' = \\
&= -\frac{1}{2}\sum_i x_i \int (x_i' J_j - x_j' I_i)\, d^3x' = \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \int (\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J})_k\, d^3x' = \\
&= -\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{x}\times\int (\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J})\, d^3x'\right]
\end{aligned}$$

Se acostumbra a definir *la densidad de momento magnético o imanación* como

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})] \qquad [5.53]$$

y su integral, el *momento magnético* $\boldsymbol{m}$:

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\int \boldsymbol{x}'\times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,d^3x' \qquad [5.54]$$

Luego el vector potencial correspondiente al segundo término de [5.51] es el vector potencial del dipolo magnético:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\right] \qquad [5.55]$$

Es éste el término de menor orden que no se anula en el desarrollo de $\boldsymbol{A}$ para una distribución de corriente en régimen estacionario. Podemos calcular directamente la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ tomando el rotacional de [5.55]:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})-\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{x}|^3}\right\} \qquad [5.56]$$

Donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en la dirección $\boldsymbol{x}$. La inducción magnética [5.56] tiene exactamente la forma [4.13] del campo creado por un dipolo. Es ésta la generalización del resultado hallado en la sección anterior para la espira circular. Lejos de una distribución cualquiera, pero localizada, de corrientes, la inducción magnética es la de un dipolo magnético de momento dipolar dado por [5.54].

Si la corriente circula por una espira plana de forma arbitraria, el momento magnético puede expresarse de forma sencilla. Si la corriente I fluye por un circuito cerrado en el que el elemento de longitud es $\boldsymbol{dl}$, la expresión [5.54] se transforma en:

$$\boldsymbol{m}=\frac{I}{2}\oint \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{dl}$$

Para una espira plana tal como la de la figura 5.7, el momento magnético es perpendicular al plano de la espira. Por ser $\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{dl})=\boldsymbol{da}$, siendo da el área elemental del triángulo determinado por los dos extremos de $\boldsymbol{dl}$ y el origen, la integral cerrada nos da el área total de la espira. Por tanto, el momento mag-

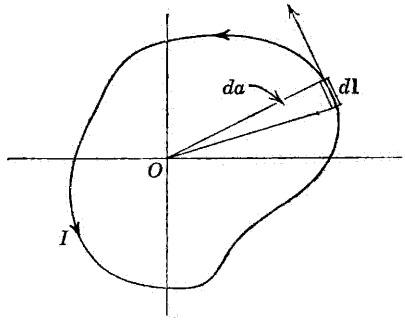


FIG. 5.7.

nético tiene el valor:

$$|\boldsymbol{m}| = I \times (\text{Area}) \qquad [5.57]$$

independientemente de la forma del circuito.

Si la distribución de corriente se debe a varias partículas cargadas de carga q_i y masa M_i cuyas velocidades son $\boldsymbol{v}_i$, podemos expresar el momento magnético en función del momento cinético orbital de las partículas. La densidad de corriente es:

$$\boldsymbol{J} = \sum_i q_i \boldsymbol{v}_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)$$

donde $\boldsymbol{x}_i$ es la posición de la partícula i. Así, el momento magnético [5.54] se transforma en:

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{v}_i)$$

El producto vectorial $(\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{v}_i)$ es proporcional al momento cinético orbital $\boldsymbol{L}_i = M_i(\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{v}_i)$ de la partícula i. Así, tenemos que:

$$\boldsymbol{m} = \sum_i \frac{q_i}{2M_i} \boldsymbol{L}_i \qquad [5.58]$$

Si todas las partículas en movimiento tienen la misma razón entre la carga y la masa $(q_i/M_i = e/M)$, podemos expresar el momento magnético en función del momento cinético orbital total $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{m} = \frac{e}{2M} \sum_i \boldsymbol{L}_i = \frac{e}{2M} \boldsymbol{L} \qquad [5.59]$$

Esta es la conocida relación clásica entre el momento cinético y el momento magnético, válida para el movimiento orbital, incluso a la escala atómica. No obstante, esta conexión clásica deja de ser válida para el momento intrínseco de los electrones y otras partículas elementales. Para los electrones, el momento magnético intrínseco es ligeramente superior al doble de lo que sería de esperar por [5:59], sustituyendo $\boldsymbol{L}$ por el momento de *spin* $\boldsymbol{S}$. Así, decimos que el electrón tiene un factor g de 2(1,00116). El origen de esta desviación del momento magnético de su valor clásico se debe a efectos relativistas y mecanocuánticos que no trataremos aquí.

Antes de abandonar el tema de los campos de una distribución localizada de corrientes, consideremos la integración de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ en un volumen esférico. Exactamente igual que en el caso electrostático discutido al final de la sección 4.1, hay dos situaciones límite de interés; una es aquélla en la que la esfera de radio R contiene toda la corriente, y la otra, cuando la corriente es completamente exterior al volumen esférico. La integral de volumen de $\boldsymbol{B}$ es:

$$\int_{r<R} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\, d^3x = \int_{r<R} \nabla \times \boldsymbol{A}\, d^3x \qquad [5.60]$$

La integral de volumen del rotacional de $\boldsymbol{A}$ puede transformarse en una integral de superficie. Así, pues:

$$\int_{r<R} \boldsymbol{B}\, d^3x = R^2 \int d\Omega\, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}$$

siendo $\boldsymbol{n}$ la normal dirigida hacia afuera. Sustituyendo $\boldsymbol{A}$ por su expresión [5.32] y cambiando el orden para realizar las integraciones puede escribirse:

$$\int_{r<R} \boldsymbol{B}\, d^3x = -\frac{\mu_0 R^2}{4\pi} \int d^3x'\, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \int d\Omega\, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

La integral angular es la misma que se presentaba en el caso electrostático. Por consiguiente, utilizando [4.16'] encontramos que la integral de $\boldsymbol{B}$ en el volumen esférico es:

$$\int_{r<R} \boldsymbol{B}\, d^3x = \frac{\mu_0}{3} \int \left(\frac{R^2 r_<}{r' r_>^2} \right) \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\, d^3x' \qquad [5.61]$$

siendo $(r_<, r_>)$ el menor y el mayor, respectivamente, entre r' y R. Si toda la corriente se halla encerrada en la esfera, $r_< = r'$ y $r_> = R$. Luego:

$$\int_{r<R} \boldsymbol{B}\, d^3x = \frac{2}{3} \mu_0 \boldsymbol{m} \qquad [5.62]$$

siendo $\boldsymbol{m}$ el momento magnético total [5.54]. En el caso opuesto, de que la corriente sea toda exterior a la esfera, en virtud de [5.14], tenemos:

$$\int_{r<R} \boldsymbol{B}\, d^3x = \frac{4\pi R^3}{3} \boldsymbol{B}(0) \qquad [5.63]$$

Estos resultados [5.62] y [5.63] pueden compararse con sus equivalentes en electrostática [4.18] y [4.19]. La diferencia entre [5.62] y [4.18] es atribuible a los diferentes orígenes de los campos, uno debido a cargas y el otro debido a corrientes. Si deseamos incluir la información contenida en [5.62] en el campo dipolar magnético [5.56] debemos añadir la contribución de una función delta:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{x}|^3} + \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{x}) \right\} \qquad [5.64]$$

El término en función delta interviene en la expresión de la estructura hiperfina de los estados atómicos s (véase la sección siguiente).

5.7. FUERZA Y PAR SOBRE, Y ENERGIA DE, UNA DISTRIBUCION LOCALIZADA DE CORRIENTE EN UN CAMPO MAGNETICO EXTERNO

Si colocamos una distribución localizada de corriente en una inducción magnética externa $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$, se hallará sometida a fuerzas y pares de fuerza de acuerdo con las leyes de Ampère. Las expresiones generales de la fuerza total y del par total vienen dadas por [5.12] y [5.13].

Si el campo externo varía suavemente en la región recorrida por las corrientes, podemos utilizar un desarrollo en serie de Taylor con el fin de hallar los términos dominantes de la fuerza y del par. Eligiendo un origen adecuado podemos expresar las componentes de $\boldsymbol{B}$:

$$B_k(\boldsymbol{x}) = B_k(0) + \boldsymbol{x} \cdot \nabla B_k(0) + \dots \qquad [5.65]$$

Entonces, la i-ésima componente de la fuerza [5.12] toma la forma:

$$F_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left[B_k(0) \int J_j(\boldsymbol{x}')\, d^3x' + \int J_j(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{x} \cdot \nabla B_k(0)\, d^3x' + \dots \right] \qquad [5.66]$$

En esta expresión ϵ_{ijk} es el tensor unitario completamente antisimétrico ($\epsilon_{ijk} = 1$ para $i=1$, $j=2$, $k=3$, y cualquier permutación cíclica de los índices; $\epsilon_{ijk} = -1$ para cualquier otra permutación, y $\epsilon_{ijk} = 0$ si hay dos o más índices iguales). La integral de volumen de $\boldsymbol{J}$ se anula para corrientes estacionarias; la contribución de menor orden a la fuerza proviene del segundo término de [5.66]. El resultado anterior [5.53] puede utilizarse (con $B_k(0)$ en lugar de $\boldsymbol{x}$) para dar:

$$F_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} (\boldsymbol{m} \times \nabla)_j B_k(\boldsymbol{x}) \qquad [5.67]$$

Después de derivar $B_k(\boldsymbol{x})$, hay que hacer $\boldsymbol{x} = 0$. Esta expresión puede escribirse en forma vectorial:

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m} \times \nabla) \times \boldsymbol{B} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{m}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) \qquad [5.68]$$

Como en todo caso $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, el término de menor orden de la fuerza sobre una distribución localizada de corrientes en un campo magnético externo $\boldsymbol{B}$ es:

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}) \qquad [5.69]$$

Este resultado es válido incluso para campos externos variables con el tiempo. Para campos estacionarios, además, $\nabla \times \boldsymbol{B} = 0$, y entonces la fuerza puede expresarse alternativamente por $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$.

Una distribución localizada de corriente en un campo magnético no uniforme está sometida a una fuerza proporcional a su momento magnético $\boldsymbol{m}$, que viene dada por [5.69]. Una aplicación sencilla de este resultado es el cálculo de la fuerza media temporal sobre una partícula cargada que describe órbitas cerradas en un campo magnético no uniforme. Como ya se sabe, una partícula cargada en un campo magnético *uniforme* se mueve a lo largo de circunferencias perpendiculares al campo magnético y paralelamente al campo con velocidad constante, de modo que resulta una trayectoria helicoidal. El movimiento

circular es equivalente, por término medio, a una espira circular de corriente de momento magnético dado por [5.57]. Si el campo no es uniforme, pero su gradiente es pequeño (de modo que en una vuelta de la hélice no se vea la partícula sometida a campos de intensidades muy diferentes) podemos describir el movimiento de la misma mediante la fuerza que actúa sobre el momento magnético equivalente. Si consideramos los signos del momento y de las fuerzas, vemos que las partículas cargadas tienden a ser expulsadas de las regiones de alta densidad de flujo, independientemente del signo de su carga. Este es el fundamento de los llamados «espejos magnéticos» que se tratan en la sección 12.6 desde otro punto de vista.

El par total sobre la distribución de corriente puede calcularse análogamente sustituyendo [5.65] en [5.13]. Aquí contribuye el término de orden cero. Conservando solamente este término dominante tenemos:

$$\boldsymbol{N} = \int x' \times [\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}(0)]\, d^3x' \qquad [5.70]$$

Desarrollando el triple producto vectorial, tenemos:

$$\boldsymbol{N} = \int [(\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{J} - (\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{J})\boldsymbol{B}]\, d^3x'$$

La primera integral es de la misma forma que la considerada en [5.66], y podemos expresar su valor de modo inmediato. La segunda es nula para una distribución localizada de corriente en estado estacionario, tal como puede deducirse de la [5.52] si se hace $f = g = r'$. El término dominante del par es, pues:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}(0) \qquad [5.71]$$

Esta es la expresión familiar del par sobre un dipolo, que se discutió en la sección 5.1 precisamente para definir la magnitud y dirección de la inducción magnética.

La energía potencial de un momento magnético permanente (o dipolo) en un campo magnético externo puede obtenerse a partir de una cualquiera de las dos expresiones [5.69] (fuerza) o [5.72] (par). Si consideramos la fuerza como el gradiente negativo de una energía potencial U, tenemos:

$$U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B} \qquad [5.72]$$

Para un momento magnético en un campo uniforme, podemos interpretar el par [5.71] como la derivada negativa de U respecto del ángulo entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{m}$. Este resultado, ya conocido, para la energía de un dipolo nos dice que éste tiende a orientarse paralelamente al campo en la posición de energía potencial mínima.

Insistimos de paso en que [5.72] *no* es la energía total del momento magnético en el campo externo. Para llevar el dipolo $\boldsymbol{m}$ a su posición final en el campo, hay que efectuar trabajo para mantener constante la corriente $\boldsymbol{J}$ productora del momento $\boldsymbol{m}$. Incluso aunque sea estacionario el estado final, hay un periodo de transición inicial en el que los campos son dependientes del tiempo. Esto se sale por ahora de nuestras consideraciones, y, por tanto, aplazaremos la discusión de la energía de los campos magnéticos hasta la sección 6.2, en que ya habremos visto las leyes de inducción de Faraday.

La expresión [5.72] de la energía puede emplearse en el estudio de los efectos magnéticos sobre los niveles energéticos del átomo, como el efecto Zeeman o la estructura fina e hiperfina. La estructura fina puede considerarse como debida a diferencias de energía del momento magnético intrínseco de un electrón en el campo magnético visto en su sistema propio. En el capítulo 11 se discute brevemente la estructura fina, con la sutil complicación de la precesión de Thomas. La interacción hiperfina es la del momento magnético $\boldsymbol{\mu}_N$ del núcleo con el campo magnético producido por el electrón. El hamiltoniano de interacción es la expresión [5.72] con $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{\mu}_N$ y siendo $\boldsymbol{B}$ el campo magnético del electrón, calculado en la posición ocupada por el núcleo ($\boldsymbol{x}=0$). Este campo tiene dos partes; una es el campo dipolar [5.64] y la otra es el campo magnético producido por el movimiento orbital de la carga electrónica. El último viene dado en forma no relativista por [5.5] y puede expresarse como $\boldsymbol{B}_{\text{orbital}}(0)=-\mu_0 e\boldsymbol{L}/4\pi m r^3$, siendo $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times m\boldsymbol{v}$ el momento cinético orbital del electrón respecto al núcleo. El hamiltoniano hiperfino es, pues:

$$\mathcal{H}_{HFS}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\mu}_e\cdot\boldsymbol{\mu}_N\,\delta(\boldsymbol{x})+\frac{1}{r^3}\left[\boldsymbol{\mu}_e\cdot\boldsymbol{\mu}_N-3\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\mu}_e)(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\mu}_N)}{r^2}-\frac{e}{m}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\mu}_N\right]\right\} \tag{5.73}$$

Los valores esperados de este hamiltoniano en los diferentes estados atómicos (y de *spin* nuclear) conducen a las desviaciones de energía hiperfinas. Para los estados s con simetría esférica, el segundo término de [5.73] da un valor esperado cero. La energía hiperfina procede solamente del primer término:

$$\Delta E=-\frac{2\mu_0}{3}|\psi_e(0)|^2\langle\boldsymbol{\mu}_e\cdot\boldsymbol{\mu}_N\rangle \tag{5.74}$$

Para $l\neq 0$, la energía hiperfina viene completamente del segundo término de [5.73], debido a que las funciones de onda para $l\neq 0$ se anulan en el origen. Estas expresiones se deben a FERMI, que las obtuvo de la ecuación de Dirac en 1930. Al aplicar [5.73] y [5.74] debe recordarse que la carga e es negativa y que $\boldsymbol{\mu}_e$ apunta en sentido opuesto al del *spin* del electrón. La diferencia de energía entre los estados singlete y triplete del estado $1s$ del átomo de hidrógeno constituye la fuente de la línea de 21 cm famosa en Astrofísica.

5.8. ECUACIONES MACROSCOPICAS. CONDICIONES DE CONTORNO PARA $\boldsymbol{B}$ Y $\boldsymbol{H}$

Hasta ahora hemos tratado las ecuaciones básicas de los campos magnéticos en régimen estacionario [5.26] como ecuaciones microscópicas en el sentido de la Introducción y del capítulo 4. Hemos supuesto que la densidad de corriente era una función de la posición completamente conocida. En los problemas macroscópicos esto con frecuencia no es cierto. Los átomos en la materia poseen electrones que dan lugar a corrientes atómicas efectivas cuya densidad de corriente es una magnitud que fluctúa muy rápidamente. Sólo su promedio en un volumen macroscópico resulta conocido y pertinente. Además, los electrones atómicos poseen momentos magnéticos intrínsecos que no pueden ser expresados en función de una densidad de corriente clásica. Estos momentos

pueden dar lugar a campos dipolares que varían apreciablemente a la escala de las dimensiones atómicas.

El proceso de hallar las medias de las ecuaciones microscópicas para obtener la descripción macroscópica de los campos magnéticos en los medios materiales se discute con detalle en el capítulo 6. Aquí, al igual que hicimos en el capítulo 4, daremos únicamente un esquema de la deducción elemental. El primer paso consiste en darse cuenta de que al promediar la ecuación, $\nabla \cdot \boldsymbol{B}_{\text{micro}} = 0$, se obtiene para la inducción magnética macroscópica la misma ecuación:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad [5.75]$$

Así, pues, aún podemos utilizar el concepto de un potencial vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, cuyo rotacional da $\boldsymbol{B}$. El gran número de moléculas o átomos por unidad de volumen, cada uno con su momento magnético molecular $\boldsymbol{m}_i$, da lugar a una *imanación*, media macroscópica, o densidad de momento magnético:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) = \sum_i N_i \langle \boldsymbol{m}_i \rangle \qquad [5.76]$$

siendo N_i el número medio de moléculas del tipo i por unidad de volumen y $\langle \boldsymbol{m}_i \rangle$ el momento molecular medio en un volumen pequeño alrededor del punto $\boldsymbol{x}$. Además de la imanación de volumen, suponemos que existe una densidad de corriente macroscópica $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ debida al flujo de cargas libres en el medio. Así, el potencial vector, debido a un pequeño volumen ΔV, en el punto $\boldsymbol{x}'$ será:

$$\Delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\Delta V}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \Delta V \right]$$

Esta expresión es la análoga magnética de la [4.30]. El segundo término es el potencial vector dipolar [5.55]. Haciendo que ΔV sea el elemento de volumen d^3x' macroscópicamente infinitesimal, el potencial vector total en $\boldsymbol{x}$ puede escribirse como una integral extendida a todo el espacio:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \right] d^3x' \qquad [5.77]$$

El término debido a la imanación puede reescribirse en la forma siguiente:

$$\int \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d^3x' = \int \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) d^3x'$$

A continuación, integrando por partes, se consigue pasar el operador nabla delante de la imanación y la integral puede convertirse en una de superficie. Si $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')$ es localizada y continua, la integral de superficie se anula. El potencial vector [5.77] se convierte en tal caso en:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') + \nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')]}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' \qquad [5.78]$$

Se ve que la imanación contribuye con una *densidad de corriente efectiva*:

$$\boldsymbol{J}_M = \nabla \times \boldsymbol{M} \qquad [5.79]$$

El equivalente macroscópico de la ecuación microscópica, $\nabla \times \boldsymbol{B}_{\text{micro}} = \mu_0 \boldsymbol{J}_{\text{micro}}$ puede extraerse de [5.78]. Si las ecuaciones [5.26] tienen como solución la [5.32], entonces [5.78] implica que $\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_M$ cumple el papel de la corriente en la ecuación macroscópica equivalente; esto es:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \nabla \times \boldsymbol{M} \qquad [5.80]$$

El término $\nabla \times \boldsymbol{M}$ puede combinarse con $\boldsymbol{B}$ para definir un nuevo campo macroscópico $\boldsymbol{H}$, llamado *campo magnético*:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{M} \qquad [5.81]$$

Y en lugar de [5.26] utilizaremos las ecuaciones macroscópicas:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [5.82]$$

La introducción de $\boldsymbol{H}$ como un campo macroscópico es completamente análoga a la introducción de $\boldsymbol{D}$ en el campo electrostático. Las ecuaciones macroscópicas [5.84] se corresponden con las electrostáticas:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [5.83]$$

Damos por supuesto que los campos fundamentales son $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Son los que satisfacen las ecuaciones homogéneas en [5.82] y [5.83]. Los campos $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ se introducen por conveniencia para considerar las contribuciones medias a ρ y a $\boldsymbol{J}$ de las cargas y corrientes atómicas.

Para completar la descripción de la magnetostática macroscópica debe existir una relación constitutiva entre $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$. Como se discutía en la Introducción, para las sustancias isotropas diamagnéticas y paramagnéticas se cumple la relación lineal simple:

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \qquad [5.84]$$

donde μ es una constante característica del medio llamada *permeabilidad magnética*. Típicamente μ difiere de μ_0 en sólo unas pocas partes en 10^5 ($\mu > \mu_0$ para las sustancias paramagnéticas y $\mu < \mu_0$ para las diamagnéticas). Para las sustancias ferromagnéticas, [5.84] debe reemplazarse por otra relación funcional no lineal:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}) \qquad [5.85]$$

El fenómeno de histéresis, que se muestra esquemáticamente en la figura 5.8, implica que $\boldsymbol{B}$ no sea una función unívoca de $\boldsymbol{H}$. De hecho, la función $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{H})$ depende de la historia de la preparación del material. La permeabilidad incremental de $\mu(\boldsymbol{H})$ se define como la derivada de $\boldsymbol{B}$ respecto de $\boldsymbol{H}$, supuesto que $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ sean paralelos. En sustancias de alta permeabilidad puede $\mu(\boldsymbol{H})$ alcanzar valores tan altos como $10^6\ \mu_0$. La mayor parte de los materiales magnéticos que

no hayan sido tratados anteriormente presentan una relación de tipo lineal entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ para los campos muy pequeños de la forma de [5.84]. Los valores de la permeabilidad inicial suelen oscilar entre 10 y 10^4 μ_0.

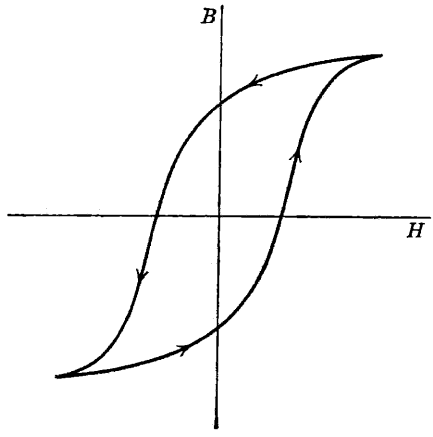


FIG. 5.8. Ciclo de histéresis que nos da $\boldsymbol{B}$ como función de $\boldsymbol{H}$ en un material ferromagnético.

Lo complicada que es la relación entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ para los materiales ferromagnéticos hace que el análisis de los problemas magnéticos con condiciones de contorno sea, por tanto, más difícil que el de los problemas electrostáticos análogos. No obstante, en muchos casos, los valores muy grandes de la permeabilidad nos permiten hacer hipótesis simplificadoras sobre las condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno para $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ en la superficie de separación entre dos medios se han deducido en la sección 0.5. Allí se demuestra que las componentes normales de $\boldsymbol{B}$ y las componentes tangenciales de $\boldsymbol{H}$ en cada lado de la superficie de separación están relacionadas según:

$$(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)\cdot\boldsymbol{n}=0 \qquad [5.86]$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{K} \qquad [5.87]$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el vector normal unitario dirigido desde la región 1 hacia la región 2 y $\boldsymbol{K}$ la densidad superficial de corriente idealizada. Para medios que satisfacen relaciones lineales de la forma [5.84] las condicones de contorno pueden expresarse alternativamente en la forma:

$$\boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{B}_2\times\boldsymbol{n}=\frac{\mu_2}{\mu_1}\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{n} \qquad [5.88]$$

o

$$\boldsymbol{H}_2\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\mu_1}{\mu_2}\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{H}_2\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{n} \qquad [5.89]$$

Si $\mu_1 \gg \mu_2$, la componente normal de $\boldsymbol{H}_2$ es mucho mayor que la de $\boldsymbol{H}_1$ (Fig. 5.9). En el límite $(\mu_1/\mu_2)\rightarrow\infty$, el campo magnético $\boldsymbol{H}_2$ es normal a la superficie

límite cualquiera que sea la dirección de $\boldsymbol{H}_1$ (excepto en el caso excepcional en que $\boldsymbol{H}_1$ sea exactamente paralelo a la superficie). La condición de contorno para $\boldsymbol{H}$ en la superficie de un material de gran permeabilidad es, pues, la misma que para el campo eléctrico en la superficie de un conductor. Por consiguiente, podemos utilizar la teoría de potencial electrostática para el campo magnético.

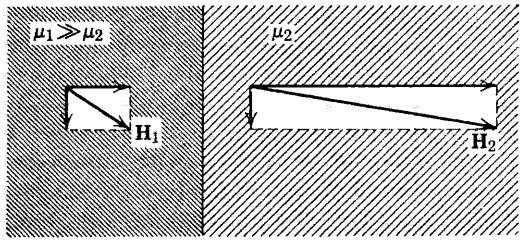


FIG. 5.9.

Las superficies de tales materiales son aproximadamente «equipotenciales» y las líneas de $\boldsymbol{H}$ son normales a estas equipotenciales.

Esta analogía se aprovecha en muchos problemas de diseño de electroimanes. Según el tipo de campo que se desee, así se da la forma a las piezas polares para que sean equipotenciales.

5.9. METODOS DE SOLUCION PARA LOS PROBLEMAS DE CONDICIONES DE CONTORNO EN MAGNETOSTATICA

Las ecuaciones básicas de la magnetostática son:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{5.90}$$

con cierta relación constitutiva entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$. La variedad de situaciones que pueden presentarse en la práctica es tal que resulta ventajoso hacer una revisión de las diferentes técnicas para resolver problemas de condiciones de contorno en magnetostática.

A. *El método generalmente aplicable del potencial vector*

Según la primera de las ecuaciones [5.90] siempre podemos introducir un potencial vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ tal que:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Si tenemos una relación constitutiva, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{B})$, entonces la segunda ecuación de las [5.90] puede escribirse:

$$\nabla \times \boldsymbol{H}[\nabla \times \boldsymbol{A}] = \boldsymbol{J}$$

En general, ésta es una ecuación diferencial muy complicada, aun si la distribución de corriente es sencilla, a menos que $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$ estén relacionadas en forma

simple. Para medios lineales con $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$, la ecuación se convierte en:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{J} \qquad [5.91]$$

Si μ es constante en una región finita del espacio, entonces en dicha región [5.91] puede escribirse

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{J} \qquad [5.92]$$

Si se elige la condición de contraste de Coulomb ($\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0$) esta ecuación se convierte en [5.31] con una densidad de corriente modificada, $\mu\boldsymbol{J}$. La situación es exactamente paralela al tratamiento de un medio dieléctrico uniforme e isotropo en el que la densidad de carga efectiva para la ecuación de Poisson es ρ/ϵ. Las soluciones de [5.92] en medios lineales diferentes deben acoplarse al atravesar las superficies de separación utilizando las condiciones de contorno [5.88] o [5.89].

B. $\boldsymbol{J}=0$; *potencial escalar magnético*

Si la densidad de corriente se anula en una cierta región finita del espacio, la segunda ecuación de [5.90] se convierte en $\nabla \times \boldsymbol{H}=0$. Esto implica que podemos introducir un *potencial escalar magnético* Φ_M tal que

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\Phi_M \qquad [5.93]$$

lo mismo que en electrostática $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$. Con una relación constitutiva explícita, esta vez en la forma $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{H}]$, la ecuación $\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$ puede escribirse:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}[-\nabla\Phi_M] = 0$$

De nuevo, ésta es una ecuación diferencial muy complicada, a menos que el medio sea *lineal*, en cuyo caso la ecuación se convierte en:

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \Phi_M) = 0 \qquad [5.94]$$

Si μ es al menos *constante a tramos*, en cada una de las regiones el potencial escalar magnético satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi_M = 0$$

Las soluciones para las diferentes regiones se conectan a través de las condiciones de contorno [5.89]. Nótese que en este último caso de constancia a tramos de μ, podemos escribir también $\boldsymbol{B}=-\nabla\Psi_M$, siendo $\nabla^2\Psi_M=0$. Con esta alternativa para el potencial escalar resultan apropiadas las condiciones de contorno [5.88].

El concepto de potencial escalar magnético puede emplearse de modo fructífero con espiras de corriente. Puede demostrarse que Φ_M es proporcional al ángulo sólido con que el borde de la espira se ve desde el punto de observación. Véase el problema 5.1. Tal potencial evidentemente es multívoco.

C. *Imanes permanentes* ($\boldsymbol{M}$ *dado y* $\boldsymbol{J}=0$)

Una situación práctica común es la referente a sustancias magnéticamente «duras», que presentan una imanación que es esencialmente independiente de los campos aplicados para intensidades de campo moderadas. Tales materiales pueden tratarse como si tuvieran una imanación $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$ fija y especificada.

a) *Potencial escalar*

Como $\boldsymbol{J}=0$, puede emplearse el potencial escalar magnético Φ_M. La primera ecuación de las [5.90] se escribe en la forma:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \cdot \nabla \cdot (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = 0$$

que, con [5.93] se convierte en una ecuación de Poisson magnetostática:

$$\nabla^2 \Phi_M = -\rho_M \qquad [5.95]$$

con una *densidad de carga magnética efectiva*:

$$\rho_M = -\nabla \cdot \boldsymbol{M} \qquad [5.96]$$

La solución para el potencial Φ_M si no hay superficies límite es:

$$\Phi_M = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' \qquad [5.97]$$

Si $\boldsymbol{M}$ está localizada y se mantiene finita puede realizarse una integración por partes para obtener:

$$\Phi_M = \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) d^3x'$$

Entonces puede utilizarse

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right)$$

para dar:

$$\Phi_M(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \int \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' \qquad [5.98]$$

Observemos de pasada que lejos de la región en que existe imanación el potencial puede aproximarse mediante:

$$\Phi_M(\boldsymbol{x}) \simeq -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \int \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')\, d^3x' = \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x}}{r^3}$$

siendo $\boldsymbol{m} = \int \boldsymbol{M}\, d^3x$ el momento magnético total. Como puede verse en electrostática [4.10], éste es el potencial escalar de un dipolo. Por consiguiente, una distribución localizada arbitrariamente de imanación presenta asintóticamente

un campo dipolar cuya intensidad está dada por el momento magnético total de la distribución.

Aunque las distribuciones físicas de imanación se comportan bien matemáticamente y no tienen discontinuidades, algunas veces es conveniente idealizar la realidad y tratar $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$ como si fuera discontinua. Así, pues, si un imán permanente tiene un volumen V y una superficie S, especificaremos $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$ en el interior y supondremos que cae bruscamente a cero en la superficie S. La aplicación del teorema de la divergencia a ρ_M [5.96] con una superficie de Gauss en forma de caja de píldoras montada sobre la superficie demuestra que existe una *densidad efectiva de carga magnética superficial*:

$$\sigma_M = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{M} \qquad [5.99]$$

siendo $\boldsymbol{n}$ la normal dirigida hacia afuera. En lugar de [5.97] el potencial viene dado por:

$$\Phi_M(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\left[-\int \frac{\nabla^2 \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\, d^3x' + \oint \frac{\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')\, da'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \right] \qquad [5.100]$$

Un caso particular importante es el de imanación uniforme en todo el volumen V. Entonces, el primer término se anula; sólo hay contribución de la integral de superficie.

Es importante señalar que, en general, [5.98] es aplicable aun en el caso límite de distribuciones discontinuas de $\boldsymbol{M}$, debido a que podemos introducir un procedimiento de paso al límite *después* de transformar [5.97] en [5.98] para discutir las discontinuidades de $\boldsymbol{M}$. *¡Nunca debe combinarse la integral de superficie de* σ_M *con [5.98]!*

b) *Potencial vector*

Si decidimos escribir $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ con el fin de satisfacer $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ de modo automático, entonces podemos escribir la segunda ecuación de [5.90] en la forma:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times (\boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{M}) = 0$$

Esto conduce, con la condición de contraste de Coulomb, a la ecuación de Poisson para el potencial vector $\boldsymbol{A}$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}_M \qquad [5.101]$$

siendo $\boldsymbol{J}_M$ la densidad de corriente magnética efectiva [5.79]. La solución para el potencial vector en ausencia de superficies límite es:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\, d^3x' \qquad [5.102]$$

como ya se demostró en [5.78]. Una forma alternativa está dada por el término que contiene la imanación en [5.77].

Si la distribución de imanación es discontinua, es necesario añadir a [5.102] una integral de superficie. Partiendo de [5.77], puede demostrarse que, cuando $\boldsymbol{M}$ cae a cero discontinuamente en la superficie S que limita el volumen V, la

generalización de [5.102] es:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V \frac{\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,d^3x'+\oint_S \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{n}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,da'\right] \qquad [5.103]$$

La corriente superficial efectiva ($\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}$) puede también interpretarse expresando la condición de contorno [5.87] para la componente tangencial de $\boldsymbol{H}$ en función de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{M}$. De nuevo, si $\boldsymbol{M}$ es constante en todo el volumen sólo permanece la integral de superficie.

5.10. LA ESFERA IMANADA UNIFORMEMENTE

Para ilustrar los diferentes métodos posibles para la solución de un problema de condiciones de contorno en magnetostática, presentamos en la figura 5.10 el problema sencillo de una esfera de radio a, con una imanación uniforme $\boldsymbol{M}$, de módulo M_0 y paralela al eje z, que está situada en un medio no permeable.

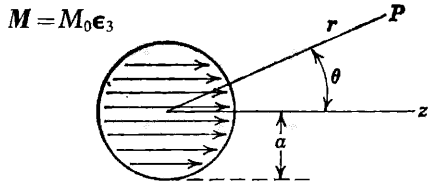


FIG. 5.10.

El método más sencillo de solución es el de la parte $C(a)$ de la sección anterior, por medio del potencial escalar magnético en coordenadas esféricas y una densidad de carga magnética superficial $\sigma_M(\theta)$. Escribiendo $\boldsymbol{M}=M_0\boldsymbol{\epsilon}_3$, y $\sigma_M=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M}=M_0\cos\theta$, la solución [5.100] para el potencial es

$$\Phi_M(r,\theta)=\frac{M_0a^2}{4\pi}\int d\Omega'\,\frac{\cos\theta'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

Con los desarrollos [3.38] o [3.70] para el inverso de la distancia sólo queda el término $l=1$. El potencial es:

$$\Phi_M(r,\theta)=\frac{1}{3}M_0a^2\frac{r_<}{r_>^2}\cos\theta \qquad [5.104]$$

siendo $(r_<, r_>)$ el mayor o menor entre r y a. Dentro de la esfera $r_<=a$ y $r_>=a$. Entonces, $\Phi_M=(1/3)M_0r\cos\theta=(1/3)M_0z$. El campo y la inducción magnéticos dentro de la esfera son, pues:

$$\boldsymbol{H}_{\text{int}}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{M};\qquad \boldsymbol{B}_{\text{int}}=\frac{2}{3}\mu_0\boldsymbol{M} \qquad [5.105]$$

Notemos que $\boldsymbol{B}_{\text{in}}$ es paralelo a $\boldsymbol{M}$, en tanto que $\boldsymbol{H}_{\text{in}}$ es antiparalelo. Fuera de la esfera, $r_< = a$ y $r_> = r$. El potencial es, pues:

$$\Phi_M = \frac{1}{3} M_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^2} \qquad [5.106]$$

Este es el potencial de un dipolo con momento dipolar:

$$\boldsymbol{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \boldsymbol{M} \qquad [5.107]$$

Para la *esfera* con imanación uniforme los campos son dipolares no sólo de modo asintótico, sino también cerca de la esfera. Para esta geometría particular (y sólo para ella) no hay multipolos superiores.

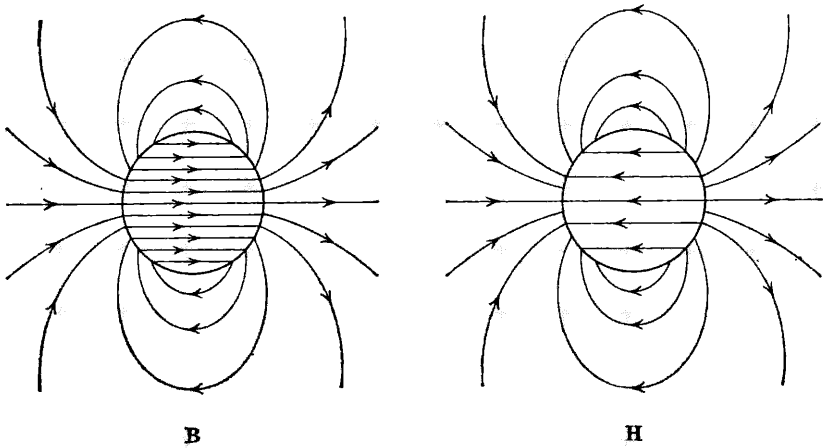


FIG. 5.11 Líneas de $\boldsymbol{B}$ y de $\boldsymbol{H}$ para una esfera uniformemente imanada. Las líneas de $\boldsymbol{B}$ se cierran sobre sí mismas, pero las de $\boldsymbol{H}$ nacen y mueren en la superficie de la esfera donde se halla la «carga» magnética superficial equivalente σ_M.

Las líneas de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ se han dibujado en la figura 5.11. Las líneas de $\boldsymbol{B}$ son continuas y cerradas sobre sí mismas, pero las de $\boldsymbol{H}$ terminan en la superficie debido a que allí hay una densidad de carga superficial efectiva σ_M.

Debe hacerse una breve mención sobre el empleo de [5.98] en lugar de [5.100]. Cuando $\boldsymbol{M} = M_0 \boldsymbol{\epsilon}_3$, dentro de la esfera, la ecuación [5.98] da:

$$\Phi_M(r, \theta) = -\frac{M_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^a r'^2 \, dr' \int d\Omega' \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \qquad [5.108]$$

Ahora sólo sobrevive en la integración angular el término $l = 0$ del desarrollo del inverso de la distancia y la integral es función únicamente de r. Con $\partial r/\partial z = \cos\theta$, el potencial es:

$$\Phi_M(r, \theta) = -M_0 \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \int_0^a \frac{r'^2 \, dr'}{r_>}$$

Integrando sobre r' se obtiene directamente la expresión [5.104] para Φ_M.

Por medio del potencial vector y [5.103] se puede conseguir una solución alternativa. Como $\boldsymbol{M}$ es uniforme dentro de la esfera la densidad de corriente en volumen $\boldsymbol{J}_M$ se anula, pero existe una contribución superficial. Escribiendo $\boldsymbol{M}=M_0\boldsymbol{\epsilon}_3$, tenemos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}' &= M_0 \operatorname{sen}\phi'\boldsymbol{\epsilon}_\phi \\ &= M_0 \operatorname{sen}\theta'(-\operatorname{sen}\phi'\boldsymbol{\epsilon}_1+\cos\phi'\boldsymbol{\epsilon}_2)\end{aligned}$$

Debido a la simetría acimutal del problema podemos escoger el punto de observación en el plano x-z ($\phi=0$), igual que se hizo en la sección 5.5. Entonces, después de la integración en el acimut, sólo queda la componente y del producto $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}$, dando para la componente acimutal del potencial vector:

$$A_\phi(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}M_0a^2\int d\Omega'\,\frac{\operatorname{sen}\theta'\cos\phi'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \qquad [5.109]$$

siendo (a,θ',ϕ') las coordenadas de $\boldsymbol{x}'$. El factor angular puede escribirse:

$$\operatorname{sen}\theta'\cos\phi'=-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,\mathrm{Re}\,[Y_{1,1}(\theta',\phi')] \qquad [5.110]$$

Así, pues, sustituyendo el desarrollo [3.70] para $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ sólo quedará el término $l=1$, $m=1$. Como consecuencia,

$$A_\phi(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{3}M_0a^2\left(\frac{r_<}{r_>^2}\right)\operatorname{sen}\theta \qquad [5.111]$$

siendo $r_<$ ($r_>$) el menor (mayor) entre r y a. Como $\boldsymbol{A}$ sólo tiene componente según ϕ, las componentes de la inducción $\boldsymbol{B}$ vienen dadas por [5.38]. La ecuación [5.111] evidentemente conduce a un $\boldsymbol{B}$ uniforme dentro y al campo dipolar fuera, como se encontró anteriormente.

5.11. ESFERA IMANADA EN UN CAMPO EXTERNO; IMANES PERMANENTES

En la sección 5.10 discutimos los campos debidos a una esfera imanada uniformemente. Basándonos en la linealidad de las ecuaciones del campo, podemos superponer una inducción magnética $\boldsymbol{B}_0=\mu_0\boldsymbol{H}_0$ en todo el espacio, y de este modo tendremos el problema de una esfera uniformemente imanada en un campo externo. De [5.105], vemos que la inducción magnética y el campo en el interior de la esfera son ahora:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{B}_{\text{in}}&=\boldsymbol{B}_0+\frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{H}_{\text{in}}&=\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}-\frac{1}{3}\boldsymbol{M}\end{aligned}\right\} \qquad [5.112]$$

Imaginemos ahora que la esfera no es un objeto uniformemente imanado, sino más bien una sustancia para- o diamagnética de permeabilidad μ; en este

caso, la imanación $\boldsymbol{M}$ resulta por efecto de la aplicación del campo externo. Para hallar $\boldsymbol{M}$ utilizaremos [5.84]:

$$\boldsymbol{B}_{\text{in}}=\mu\boldsymbol{H}_{\text{in}} \qquad [5.113]$$

Así:

$$\boldsymbol{B}_0+\frac{2}{3}\mu_0\boldsymbol{M}=\mu\left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}-\frac{1}{3}\boldsymbol{M}\right) \qquad [5.114]$$

Esto da lugar a una imanación:

$$\boldsymbol{M}=\frac{3}{\mu_0}\left(\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\right)\boldsymbol{B}_0 \qquad [5.115]$$

Observemos que el resultado es completamente análogo al de la polarización $\boldsymbol{P}$ de una esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme [4.57].

Para las sustancias ferromagnéticas no son válidos los razonamientos efectuados. La ecuación [5.115] implica que la imanación es nula cuando se anula el campo externo. La existencia de imanes permanentes va en contra de esta proposición. El hecho de que la relación [5.85] no sea lineal, junto con los fenómenos de histéresis, hace posible la existencia de imanes permanentes. Podemos eliminar $\boldsymbol{M}$ entre las ecuaciones [5.112] y obtener una relación entre $\boldsymbol{H}_{\text{in}}$ y $\boldsymbol{B}_{\text{in}}$:

$$\boldsymbol{B}_{\text{in}}+2\mu_0\boldsymbol{H}_{\text{in}}=3\boldsymbol{B}_0 \qquad [5.116]$$

La otra relación entre $\boldsymbol{B}_{\text{in}}$ y $\boldsymbol{H}_{\text{in}}$ nos la proporciona la curva de histéresis, de modo que podemos hallar los valores correspondientes a cualquier campo externo. La ecuación [5.116] representa una recta de pendiente $-2\mu_0$ sobre el diagrama del ciclo de histéresis, que corta al eje y en $3\boldsymbol{B}_0$, como se indica en la figura 5.12. Supongamos, por ejemplo, que aumentamos el campo externo hasta que la esfera ferromagnética se haya saturado, y luego lo hacemos decrecer hasta cero. Los campos internos B y H vendrán dados por el punto P indicado en la figura 5.12. La imanación puede hallarse mediante [5.112] haciendo $\boldsymbol{B}_0=0$.

La relación [5.116] entre $\boldsymbol{B}_{\text{in}}$ y $\boldsymbol{H}_{\text{in}}$ es propia de la esfera. En el caso de tener otras formas geométricas, las relaciones serían distintas. El problema para el elipsoide puede resolverse exactamente, y se encuentra que la pendiente

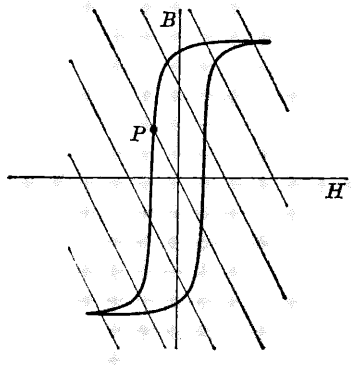


FIG. 5.12.

de las líneas [5.116] varía desde cero para un disco plano hasta $-\infty$ para un objeto alargado en forma de aguja. Por tanto, podemos obtener una inducción magnética interna más grande con una geometría alargada (en forma de barra) que con formas esféricas o esferoidales achatadas.

5.12. APANTALLAMIENTO MAGNETICO; CAPA ESFERICA DE MATERIAL DE GRAN PERMEABILIDAD

Supongamos que tenemos una inducción magnética $\boldsymbol{B}_0$ en una región del espacio (inicialmente vacío) y a continuación colocamos un cuerpo de gran permeabilidad; con esto las líneas de inducción magnética se modificarán. Por lo que vimos al final de la sección 5.8, relativa a los medios de permeabilidad muy alta, podríamos esperar que las líneas de campo tiendan a hacerse normales en la superficie del cuerpo. Siguiendo adelante con nuestra analogía con los conductores, si el cuerpo fuera hueco cabría esperar que el campo en la cavidad fuera menor que en el exterior, siendo nulo para el caso límite $\mu \to \infty$. Se dice que esta disminución del campo se debe al *apantallamiento magnético* producido por el material permeable. Este es de importancia práctica considerable, pues frecuentemente resulta necesario o deseable disponer de regiones en las que no existan campos, bien para la realización de experimentos, bien para asegurar el funcionamiento apropiado de algunos dispositivos electrónicos.

Como ejemplo del fenómeno del apantallamiento magnético consideremos una capa esférica de radios interior y exterior, a y b, respectivamente, construida con un material de permeabilidad μ, y situada en una inducción magnética inicialmente uniforme $\boldsymbol{B}_0$, tal como se indica en la figura 5.13.

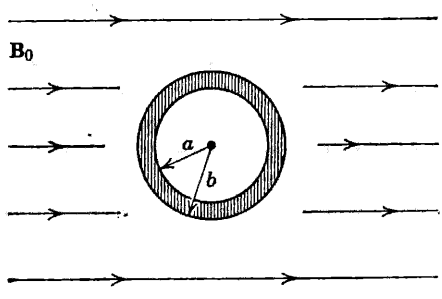


FIG. 5.13.

Deseamos hallar los campos $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ en un punto cualquiera del espacio, pero en especial en la cavidad ($r < a$). Como no hay corrientes, el campo magnético $\boldsymbol{H}$ es derivable de un potencial escalar $\boldsymbol{H} = -\nabla\Phi_M$. Más aún, como $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, la ecuación $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ nos dice que $\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$ en las diferentes regiones. Así, pues, el potencial Φ_M satisface la ecuación de Laplace en todo el espacio, y el problema se reduce al cálculo de las soluciones apropiadas en las diferentes regiones de modo que se satisfagan las condiciones de contorno [5.89] para $r = a$ y $r = b$.

Para $r > b$, el potencial será de la forma:

$$\Phi_M = -\frac{B_0 r}{\mu_0}\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) \qquad [5.117]$$

para que a grandes distancias dé el campo uniforme $\mu_0 \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0$. En las otras dos regiones tenemos:

$$\left.\begin{array}{ll} a < r < b & \Phi_M = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\beta_l r^l + \gamma_l \frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \\ r < a & \Phi_M = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\delta_l r^l P_l(\cos\theta) \end{array}\right\} \qquad [5.118]$$

Para $r=a$ y $r=b$, las condiciones de contorno son que H_θ y B_r sean continuas. En función del potencial Φ_M estas condiciones se expresan así:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\Phi_M}{\partial\theta}(b_+) = \dfrac{\partial\Phi_M}{\partial\theta}(b_-) & \dfrac{\partial\Phi_M}{\partial\theta}(a_+) = \dfrac{\partial\Phi_M}{\partial\theta}(a_-) \\ \mu_0\dfrac{\partial\Phi_M}{\partial r}(b_+) = \mu\dfrac{\partial\Phi_M}{\partial r}(b_-) & \mu\dfrac{\partial\Phi_M}{\partial r}(a_+) = \mu_0\dfrac{\partial\Phi_M}{\partial r}(a_-) \end{array}\right\} \qquad [5.119]$$

La notación $b_\pm$ significa que r tiende a b respectivamente por uno u otro lado, $r \to b$, siendo $r \lesseqgtr b$, y lo mismo significa $a_\pm$. Estas cuatro condiciones, válidas para cualquier valor de θ, bastan para calcular las constantes indeterminadas en [5.117] y [5.118]. Todos los coeficientes para $l \neq 1$ se anulan, y los coeficientes para $l=1$ satisfacen las cuatro ecuaciones simultáneas:

$$\left.\begin{array}{rl} \mu_0\alpha_1 - \mu_0 b^3\beta_1 - \mu_0\gamma_1 & = b_3 B_0 \\ 2\mu_0\alpha_1 + \mu b^3\beta_1 - 2\mu\gamma_1 & = -b^3 B_0 \\ a^3\beta_1 + \gamma_1 - a^3\delta_1 & = 0 \\ \mu a^3\beta_1 + 2\mu\gamma_1 - \mu_0 a^3\delta_1 & = 0 \end{array}\right\} \qquad [5.120]$$

Las soluciones para α_1 y δ_1 son:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \left[\dfrac{(2\mu+\mu_0)(\mu-\mu_0)}{(2\mu+\mu_0)(\mu+2\mu_0) - 2\dfrac{a^3}{b^3}(\mu-\mu_0)^2}\right](b^3-a^3)B_0 \\ \delta_1 = -\left[\dfrac{9\mu}{(2\mu+\mu_0)(\mu+2\mu_0) - 2\dfrac{a^3}{b^3}(\mu-\mu_0)^2}\right]B_0 \end{array}\right\} \qquad [5.121]$$

Fuera de la capa esférica el potencial es el correspondiente a $\boldsymbol{B}_0$ más el campo de un dipolo [5.41] de momento dipolar α_1 orientado paralelamente a $\boldsymbol{B}_0$. En el interior de la cavidad, el campo magnético es constante, paralelo a $\boldsymbol{B}_0$ y de valor $-\delta_1$. Para $\mu \gg \mu_0$, el momento dipolar α_1 y el campo interno $-\delta_1$ se ha-

cen, respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &\to \frac{b^3 B_0}{\mu_0} \\ -\delta_1 &\to \frac{9}{2\mu\left(1-\frac{a^3}{b^3}\right)} B_0 \end{aligned}\right\} \qquad [5.122]$$

Vemos que el campo interno es proporcional a μ^{-1}. Por tanto, un blindaje hecho de material de gran permeabilidad, $\mu/\mu_0 \sim 10^3$-10^6, proporciona una gran reducción del campo en el interior, incluso aunque la capa sea relativamente delgada. En la figura 5.14 vemos el comportamiento de las líneas de $\boldsymbol{B}$. Las líneas tienden a pasar por el medio permeable, en lo posible.

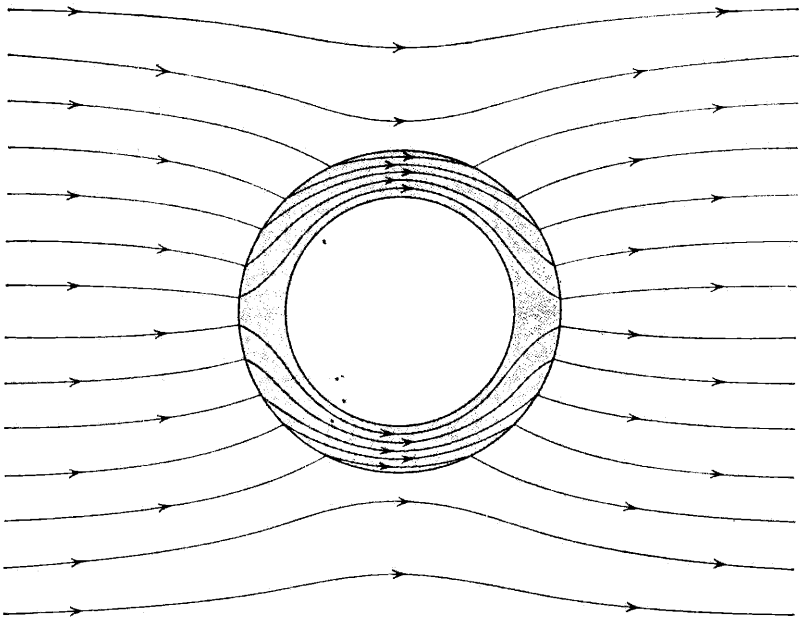


FIG. 5.14. Efecto de apantallamiento por una capa esférica de material muy permeable.

5.13. EFECTO DE UN ORIFICIO CIRCULAR EN UN PLANO PERFECTAMENTE CONDUCTOR CON UN CAMPO MAGNETICO EN UNO DE LOS LADOS TANGENCIAL Y ASINTOTICAMENTE UNIFORME

En la sección 3.13 se discutió el problema electrostático del orificio circular en un plano conductor con un campo eléctrico normal y asintóticamente uniforme. En el problema magnético correspondiente el campo magnético es tangencial y también uniforme a grandes distancias. Los dos ejemplos son útiles al

tratar orificios pequeños en guías de onda y cavidades resonantes (véase sección 9.5).

Antes de esbozar la solución del problema magnetostático de condiciones de contorno, debemos discutir lo que entendemos por un conductor perfecto. Los campos magnéticos estáticos penetran en los conductores, aun en los muy buenos. El conductor solamente modifica los campos debido a sus propiedades magnéticas, no a su conductividad, a menos, por supuesto, que en su interior circule corriente. Cuando los campos son variables con el tiempo ocurre algo diferente. En la sección 8.1 se demuestra que en la superficie de separación entre un no conductor y un conductor, campos que varíen con el tiempo armónicamente penetran en el conductor sólo una distancia del orden de $\delta=(2/\mu\omega\sigma)^{1/2}$, siendo ω la frecuencia y σ la conductividad. Por consiguiente, para cualquier ω distinta de cero, la profundidad de penetración $\delta\to 0$ a medida que $\sigma\to\infty$. Dentro de un conductor perfecto no existen campos eléctricos y magnéticos oscilantes. Consideraremos los problemas magnetostáticos con conductores perfectos, *por definición,* como el límite de problemas con campos variables armónicamente cuando $\omega\to 0$, supuesto que al mismo tiempo $\omega\sigma\to\infty$. En tal caso puede haber campo magnético fuera y hasta la superficie del conductor, pero no dentro. Las condiciones de contorno [5.86] y [5.87] demuestran que en la superficie $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}=0$ y $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{K}$. Estas condiciones de contorno son la contrapartida en magnetostática de las condiciones de contorno electrostáticas $\boldsymbol{E}_{\tan}=0$, $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}=\sigma$ en la superficie de un conductor. (Recuérdese que en esta última ecuación σ es la densidad superficial de carga y no la conductividad.)

Consideremos en $z=0$ un plano perfectamente conductor con un orificio de radio a centrado en el origen, como se indica en la figura 5.15. Para simplificar, supondremos que el medio que rodea dicho plano es uniforme, isótropo

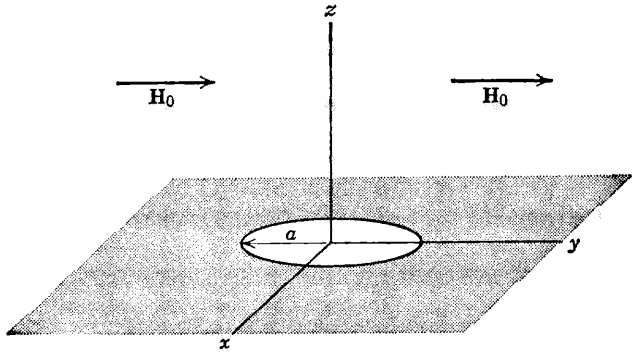


FIG. 5.15.

y lineal, y que hay un campo magnético tangencial uniforme $\boldsymbol{H}_0$ a grandes distancias del orificio en la región $z>0$, dirigido según el eje y, en tanto que para $z<0$ el campo tiende asintóticamente a cero al alejarnos. Por superposición lineal pueden obtenerse otras posibilidades. Como, salvo en la superficie $z=0$, no hay presentes corrientes, podemos emplear $\boldsymbol{H}=-\nabla\Phi_M$ de modo que el potencial escalar magnético satisfaga la ecuación de Laplace con condiciones de contorno mixtas apropiadas. Así podemos seguir de forma paralela la solución de la sección 3.13.

El potencial se escribe en la forma:

$$\Phi_M(x)=\begin{cases}-H_0 y+\Phi^{(1)} & \text{para } z>0\\ -\Phi^{(1)} & \text{para } z<0\end{cases} \qquad [5.123]$$

El cambio de signo para el potencial adicional $\Phi^{(1)}$ por debajo del plano es consecuencia de las propiedades de simetría de los campos adicionales ($H_x^{(1)}$ y $H_y^{(1)}$ son impares en z, en tanto que $H_z^{(1)}$ y $\Phi^{(1)}$ son pares en z). Esto puede deducirse de [5.14] al advertir que la corriente efectiva aparece únicamente sobre la superficie $z=0$, al igual que ocurre con la densidad de carga magnética efectiva que determina el potencial escalar $\Phi^{(1)}$.

Según [3.110] el potencial escalar puede escribirse en coordenadas cilíndricas en la forma:

$$\Phi^{(1)}(x)=\int_0^\infty dk\, A(k)e^{-k|z|}J_1(k\rho)\,\text{sen}\,\phi \qquad [5.124]$$

Sólo interviene $m=1$ porque el orificio posee simetría cilíndrica y el campo asintótico varía como $y=\rho\,\text{sen}\,\phi$. De las condiciones de contorno para la componente normal de $\boldsymbol{B}$ y la tangencial de $\boldsymbol{H}$ hallamos que las condiciones de contorno para el potencial total ϕ_M son:

a) Φ_M continuo al atravesar $z=0$ cuando $0\leqslant\rho<a$

b) $\dfrac{\partial\Phi_M}{\partial z}=0$ en $z=0$ cuando $a<\rho<\infty$

Estos requisitos implican las ecuaciones integrales duales:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty dk\, A(k)J_1(k\rho)=H_0\rho/2 && \text{para } 0\leqslant\rho<a\\ &\int_0^\infty dk\, kA(k)J_1(k\rho)=0 && \text{para } a<\rho<\infty\end{aligned} \qquad [5.125]$$

Este conjunto de ecuaciones está íntimamente relacionado con, pero es distinto de, el electrostático [3.178] o [3.179]. La pareja necesaria es, en este caso:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty dy\, g(y)J_n(yx)=x^n && \text{para } 0\leqslant x<1\\ &\int_0^\infty dy\, yg(y)J_n(yx)=0 && \text{para } 1<x<\infty\end{aligned} \qquad [5.126]$$

cuya solución es:

$$g(y)=\frac{2\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}j_n(y)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{2}{y}\right)^{1/2}J_{n+1/2}(y) \qquad [5.127]$$

En [5.125] tenemos que $g=2A(k)/H_0a^2$, $n=1$, $x=\rho/a$, e $y=ka$. Por tanto,

$$A(k)=\frac{2H_0a^2}{\pi}j_1(ka) \qquad [5.128]$$

El potencial adicional es, pues:

$$\Phi^{(1)}(x)=\frac{2H_0a^2}{\pi}\int_0^\infty dk\, j_1(ka)e^{-k|z|}J_1(k\rho)\,\text{sen}\,\phi \qquad [5.129]$$

Por métodos semejantes a los de la sección 3.13 puede demostrarse que lejos del orificio el potencial adicional tiene la forma asintótica

$$\Phi^{(1)}(x)\rightarrow\frac{2H_0a^3}{3\pi}\cdot\frac{y}{r^3} \qquad [5.130]$$

Que es el potencial de un dipolo orientado en la dirección del eje y, la del campo $\boldsymbol{H}_0$. Debido a los signos de [5.123], el orificio circular es equivalente a grandes distancias a un dipolo magnético de momento

$$\boldsymbol{m}=\pm\frac{8}{3}a^3\boldsymbol{H}_0 \quad \text{para } z\geqslant 0 \qquad [5.131]$$

siendo $\boldsymbol{H}_0$ el campo magnético tangencial en el lado $z=0^+$ del plano en ausencia del orificio. La figura 9.4 muestra cualitativamente cómo se distorsionan las líneas del campo magnético para dar lugar al campo dipolar. En la abertura misma ($z=0$, $0\leqslant\rho<a$) las componentes tangencial y normal del campo magnético son:

$$\boldsymbol{H}_{\text{tan}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}_0$$

$$H_2(\rho,0)=\frac{2H_0}{\pi}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\text{sen}\,\phi \qquad [5.132]$$

Al comparar con el correspondiente problema electrostático de la sección 3.13 se hallan semejanzas y diferencias. En términos generales, los papeles de las componentes tangencial y normal de los campos aparecen intercambiados. Los dipolos equivalentes apuntan en la dirección de los campos asintóticos, pero el momento magnético [5.131] es mayor, por un factor 2, que el momento electrostático [3.183] para intensidades del campo iguales. Cuando los orificios *son de forma arbitraria,* el campo remoto en el caso electrostático es aún el de un dipolo normal al plano, mientras que en el caso magnético el dipolo equivalente yace en el plano, pero la dirección del dipolo magnético depende tanto de la dirección del campo como de la orientación del orificio (el orificio presenta una susceptibilidad magnética anisotropa).

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

Los problemas de flujo de corrientes estacionarias en medios resistivos extensos son análogos a los problemas electrostáticos de potencial, en los que la densidad de corriente sustituye al vector desplazamiento y la conductividad a la constante dieléctrica. No obstante, las condiciones de contorno son por lo general distintas. Se trata este tipo de problemas en:

JEANS, caps. 9 y 10.
SMYTHE, cap. 6.

Los campos magnéticos debidos a distribuciones de corriente y problemas de contorno en magnetostática son discutidos en numerosos ejemplos por:

DURAND, caps. 14 y 15.
SMYTHE, caps. 7 y 12.

La teoría atómica de las propiedades magnéticas de la materia cae de lleno en el dominio de la mecánica cuántica. Vienen discusiones semiclásicas en:

ABRAHAM y BECKER, tomo II, secciones 29-34.
DURAND, págs. 551-573 y cap. 17.
LANDAU y LIFSHITZ, *Electrodynamics of Continuous Media.*
ROSENFELD, cap. 4.

Pueden encontrarse tratamientos más detallados del tema, que incluyen aspectos cristalográficos y el tema de los dominios ferromagnéticos, en

BATES,
BRAILSFORD,
KITTEL,
ZIMAN, cap. 10.

Constituye una referencia enciclopédica de las propiedades magnéticas de aleaciones, así como de la teoría y otras informaciones prácticas la obra de

BOZORTH, R. M., *Ferromagnetism,* Van Nostrand, Nueva York (1951).

PROBLEMAS

5.1. Partiendo de la expresión diferencial

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{x}}{x^3}$$

que da la inducción magnética en el punto P de vector posición $\boldsymbol{x}$, producida por un elemento de corriente $I\,d\boldsymbol{l}'$ situado en $\boldsymbol{x}'$, demuéstrese de forma explícita que si se tiene una espira cerrada por la que circula una corriente I, la inducción magnética en el punto de observación P es

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega$$

en donde Ω es el ángulo sólido bajo el cual se ve la espira desde P. Esto corresponde a un potencial escalar magnético, $\Phi_M=I\Omega/4\pi$. El convenio de signos para el ángulo sólido es que Ω es positivo si el punto P ve la cara «interna» de la superficie que se apoya en la espira, esto es, si se define mediante la regla del sacacorchos un vector unitario normal $\boldsymbol{n}$ a la superficie de acuerdo con el sentido de la corriente en la espira, Ω es positivo si $\boldsymbol{n}$ se dirige *alejándose* de P, y negativo en caso contrario. Este convenio es el mismo que el de la sección 1.6 para la capa dipolar eléctrica.

5.2. *a)* Demuéstrese que para un solenoide arrollado con N vueltas por unidad de longitud y por el que circula una corriente I, la densidad de flujo magnético en el eje viene dada aproximadamente por

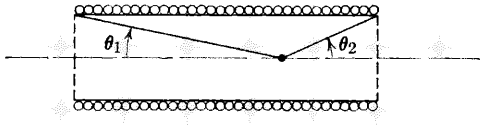
$$B_z=\frac{\mu_0 NI}{2}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$

en donde los ángulos se muestran en la figura.

b) Demuéstrese que si se tiene un solenoide largo de longitud L y radio a *en las proximidades del eje y del centro del solenoide,* la inducción magnética es fundamentalmente paralela al eje, pero presenta una pequeña componente radial

$$B_\rho \simeq 24\mu_0 NI\left(\frac{a^2 z\rho}{L^4}\right)$$

que es correcta en el orden de a^2/L^2 cuando $z \ll L$, $\rho \ll a$. La coordenada z se mide a partir del punto central del eje, con lo que los extremos del solenoide están en $z = \pm L/2$.



a)

PROBLEMA 5.2.

c) Demuéstrese que en el extremo de un solenoide largo, la inducción magnética en las proximidades del eje tiene por componentes

$$B_z \simeq \frac{\mu_0 NI}{2}, \qquad B_\rho \simeq \frac{\mu_0 NI}{4}\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

5.3. En un conductor cilíndrico de radio a se ha practicado un taladro de radio b paralelamente al eje del cilindro y centrado a una distancia d del mismo $(d+b<a)$. La densidad de corriente es uniforme en todo el resto metálico del cilindro y paralela a eje. Hágase uso de la ley de Ampère y del principio de superposición lineal para hallar la magnitud y dirección de la densidad de flujo magnético en el hueco.

5.4. Una espira de corriente circular de radio a, por la que circula una corriente I, se encuentra en el plano x-y con su centro en el origen.

a) Demuéstrese que la única componente no nula del potencial vector es

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_0}{\pi} Ia \int_0^\infty dk \cos kz\, I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>)$$

en donde $\rho_<$ ($\rho_>$) es el menor (mayor) entre a y ρ.

b) Demuéstrese que otra expresión alternativa para A_ϕ es

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_0 Ia}{2} \int_0^\infty dk\, e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho)$$

c) Dense a continuación expresiones integrales para las componentes de la inducción magnética haciendo uso de las expresiones de *a)* y *b).* Llevando a cabo las integraciones necesarias, calcúlense explícitamente las componentes de $\boldsymbol{B}$ en el eje z.

5.5. Una espira circular por la que circula una corriente I se halla situada con su centro en el origen de coordenadas, y orientada de modo que la normal a su plano forma los ángulos θ_0, ϕ_0 en un sistema de coordenadas esféricas. Hay aplicado un campo magnético, $B_x = B_0(1+\beta y)$, $B_y = B_0(1+\beta x)$.

a) Calcúlese la fuerza que actúa sobre la espira sin hacer aproximación alguna. Compárese el resultado obtenido con el resultado aproximado [5.69] y coméntese.

b) Calcúlese el par en la aproximación de menor orden. ¿Puede deducirse algo sobre las contribuciones de orden superior? ¿Se anulan éstas para la espira circular? ¿Qué ocurre para otras formas?

5.6. Dos espiras circulares concéntricas de radios a, b y corrientes I, I', respectivamente, $(b < a)$, forman un ángulo α entre sus planos. Demuéstrese que el par sobre una de las espiras yace sobre la línea de intersección de los dos planos en que están situadas las espiras y su magnitud es:

$$N=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{2\pi^2 II' b^2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(2n+1)}\left[\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+2)\Gamma(3/2)}\right]^2\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}P^1_{2n+1}(\cos\alpha)$$

en donde $P_l^1(\cos\alpha)$ es un polinomio asociado de Legendre. Determínese el sentido del par para el caso en que α sea agudo y las corrientes circulen en el mismo sentido (o en sentidos opuestos).

5.7. Una esfera de radio a posee sobre su superficie una distribución de carga uniforme. A continuación se hace girar dicha esfera sobre un diámetro como eje con velocidad angular constante ω. Hállense el potencial vector y la densidad de flujo magnético en el interior y en el exterior de la esfera.

5.8. Se coloca un cilindro largo, circular, recto y hueco de radio interior (exterior) a (b) y de permeabilidad μ en una región en que se tenía inicialmente una densidad de flujo magnético $\boldsymbol{B}_0$. El cilindro se coloca perpendicularmente al campo. Hállese la densidad de flujo en todos los puntos del espacio y represéntese el logaritmo de la razón entre los módulos de $\boldsymbol{B}$ en el centro del cilindro y $\boldsymbol{B}_0$ en función de $\log_{10}\mu$ para $a^2/b^2=0{,}5$, $0{,}1$. Despréciese el efecto de los extremos.

5.9. Se tiene un medio de permeabilidad μ_0 en el que hay una distribución de corriente $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$; dicho medio se halla junto a otro de permeabilidad μ que llena el semiespacio $z < 0$.

a) Demuéstrese que para $z > 0$ se puede calcular la inducción magnética reemplazando el medio de permeabilidad μ por una distribución de corriente imagen, $\boldsymbol{J}^*$, de componentes

$$\left(\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\right)J_x(x, y, -z),\qquad \left(\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\right)J_y(x, y, -z),\qquad -\left(\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\right)J_z(x, y, -z)$$

b) Demuéstrese que para $z < 0$ la inducción magnética es como si se debiera a una distribución de corriente $\left(\frac{2\mu}{\mu+\mu_0}\right)\boldsymbol{J}$ en un medio de permeabilidad μ_0.

5.10. Se tiene una espira circular de radio a con una corriente I colocada en el vacío estando su centro a una distancia d de la superficie plana de un medio semiinfinito de permeabilidad μ. Calcúlese la fuerza sobre la espira cuando:

a) El plano de la espira es paralelo a la cara del medio.
b) El plano de la espira es perpendicular al mismo.
c) Determínense las formas límite de los resultados *a)* y *b)* cuando $d \gg a$. ¿Pueden obtenerse estos valores límite de forma simple y directa?

5.11. Un material magnéticamente «duro» tiene forma de cilindro circular recto de longitud L y radio a. El cilindro posee imanación permanente M_0 uniforme en todo el volumen y paralela a su eje.

a) Determínese el campo magnético $\boldsymbol{H}$ y la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ en todos los puntos del eje del cilindro, tanto en el interior como en el exterior.

b) Represéntense gráficamente las razones $\boldsymbol{B}/\mu_0 M_0$ y $\boldsymbol{H}/M_0$ en el eje como funciones de z para $L/a=5$.

5.12. *a)* Partiendo de la ecuación de fuerzas [5.12] y del hecho de que una magnetización $\boldsymbol{M}$ es equivalente a una densidad de corriente en volumen

$$\boldsymbol{J}_M=(\nabla\times\boldsymbol{M}),$$

y a una densidad de corriente superficial $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}$, demuéstrese que en ausencia de corrientes macroscópicas de conducción, la fuerza magnética total sobre el cuerpo puede escribirse:

$$\boldsymbol{F}=-\int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{M})\boldsymbol{B}_e\, d^3x+\int_S (\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{B}_e\, da$$

siendo $\boldsymbol{B}_e$ la inducción magnética aplicada (que no incluye la debida al cuerpo en cuestión). A continuación, exprésese la fuerza en función de las densidades efectivas de carga ρ_M y σ_M. Si la distribución de imanación no es discontinua la superficie puede llevarse al infinito, y la fuerza queda dada precisamente por la integral de volumen.

b) Una esfera de radio R con imanación uniforme tiene su centro en el origen de coordenadas, y la dirección del vector imanación forma los ángulos θ_0, ϕ_0 respecto a un sistema de coordenadas esféricas. Utilícese la expresión de la parte *a)* para calcular las componentes de la fuerza que actúa sobre la esfera, si el campo magnético externo es el mismo que en el problema 5.5.

5.13. Un campo magnetostático se debe por entero a una distribución localizada de imanación permanente.

a) Demuéstrese que

$$\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\, d^3x=0$$

con tal que la integral se extienda a todo el espacio.

b) Partiendo de la energía potencial [5.72] de un dipolo en un campo externo, demuéstrese que para una distribución continua de imanación permanente se puede expresar la energía magnetostática así:

$$W=\frac{\mu_0}{2}\int \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\, d^3x=-\frac{\mu_0}{2}\int \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{H}\, d^3x$$

salvo una constante aditiva que es independiente de la orientación o posición de los distintos cuerpos imanados constituyentes.

5.14. Demuéstrese que en general una barra recta de sección transversal constante A con una imanación uniforme M en dirección longitudinal, al colocar su extremo plano contra una superficie plana de permeabilidad infinita, se adhiere con una fuerza dada aproximadamente por

$$F\simeq\frac{\mu_0}{2}AM^2$$

Relaciónese su tratamiento con las consideracones electrostáticas de la sección 1.11.

5.15. Un cilindro circular recto de longitud L y radio a posee una imanación uniforme M en dirección longitudinal.

a) Demuéstrese que al colocarlo con su extremo plano contra una superficie plana de permeabilidad finita se adhiere con una fuerza

$$F=2\mu_0 aLM^2\left[\frac{K(k)-E(k)}{k}-\frac{K(k_1)-E(k_1)}{k_1}\right]$$

en donde

$$k=\frac{2a}{\sqrt{4a^2+L^2}}, \qquad k_1=\frac{a}{\sqrt{a^2+L^2}}$$

b) Hállese la forma límite de la fuerza si $L \gg a$.

5.16. *a)* Para el plano perfectamente conductor con un orificio circular de la sección 5.13, cuando en uno de los lados existe un campo tangencial que asintóticamente es uniforme y vale $\boldsymbol{H}_0$, calcúlese el campo magnético tangencial adicional $\boldsymbol{H}^{(1)}$ en el lado del plano en el que hay $\boldsymbol{H}_0$. Demuéstrese que para $\rho > a$ las componentes son:

$$H_x^{(1)}=\frac{2H_0a^3}{\pi}\,\frac{xy}{\rho^4\sqrt{\rho^2-a^2}}$$

$$H_y^{(1)}=\frac{2H_0a^3}{\pi}\,\frac{y^2}{\rho^4\sqrt{\rho^2-a^2}}+\frac{N_0}{\pi}\left[\frac{a}{\rho}\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho^2}}-\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)\right]$$

b) Dibújense esquemáticamente las líneas de flujo de la corriente superficial en ambas caras del plano en la proximidad del orificio.

CAMPOS VARIABLES CON EL TIEMPO, ECUACIONES DE MAXWELL, LEYES DE CONSERVACION

En los capítulos anteriores nos hemos ocupado de los problemas de electricidad y magnetismo en estado estacionario. Aunque se utilizaron técnicas matemáticas análogas, los fenómenos eléctricos y magnéticos fueron tratados como si fueran independientes; el único enlace entre ellos era el hecho de que las corrientes que producen los campos magnéticos tienen un carácter esencialmente eléctrico, ya que son cargas en movimiento. Cuando consideramos problemas dependientes del tiempo, la aparente independencia entre fenómenos eléctricos y magnéticos desaparece. Los campos magnéticos que varían con el tiempo originan campos eléctricos y viceversa. Deberemos hablar, pues, en términos de *campos electromagnéticos* más que de campos eléctricos o campos magnéticos. El significado pleno de la interconexión entre los campos eléctricos y magnéticos y su identidad esencial solamente quedará aclarado dentro del marco de la relatividad especial (Cap. 11). De momento, nos contentaremos con examinar los fenómenos básicos y deducir el conjunto de ecuaciones conocido con el nombre de *ecuaciones de Maxwell,* que describen el comportamiento de los campos electromagnéticos. A continuación se tratan los potenciales vector y escalar, las transformaciones de contraste y las funciones de Green para la ecuación de ondas. Después se incluye una deducción apropiada de las ecuaciones macroscópicas del electromagnetismo. Se estudian las leyes de conservación para la energía y el ímpetu y las propiedades de transformación de las magnitudes electromagnéticas, así como el interesante tema de los monopolos magnéticos.

En nuestro deseo de pasar a otros temas, dejaremos sin tratar ciertos aspectos que, aun siendo de interés por sí mismos, pueden estudiarse en cualquier otro sitio. Entre ellos se encuentran los campos cuasi-estacionarios, la teoría de circuitos, salvo las definiciones de impedancia y admitancia a partir de los campos en la sección 6.10, el cálculo de inductancias, las corrientes de Foucault y el calentamiento por inducción. Ninguno de estos temas requiere conceptos nuevos además de los desarrollados en este capítulo y en los anteriores. El lector interesado puede consultar las referencias que se dan al final del capítulo.

6.1. LEY DE INDUCCION DE FARADAY

Las primeras observaciones cuantitativas que relacionan los campos eléctricos y magnéticos variables con el tiempo fueron hechas por FARADAY (1831) en sus experimentos sobre las corrientes en circuitos colocados en campos magnéticos variables con el tiempo. FARADAY observó que en un circuito se induce una corriente transitoria, *a)*, si se inicia o se detiene una corriente estacionaria en otro circuito cercano; *b)*, si este circuito por el que pasa una corriente estacionaria se mueve respecto del primero; *c)*, si introducimos o sacamos del circuito un imán. No hay flujo alguno de corriente a menos que cambie la corriente adyacente o exista movimiento relativo. FARADAY interpretó que el paso de la corriente transitoria era debido al flujo magnético cambiante que atraviesa el circuito. La variación de flujo induce un campo eléctrico a lo largo del circuito, cuya integral curvilínea se denomina *fuerza electromotriz* $\mathcal{E}$. La fuerza electromotriz, de acuerdo con la ley de Ohm, da lugar al paso de una corriente.

Expresaremos ahora las observaciones de FARADAY de forma cuantitativa. Sea C el circuito y S una superficie abierta cuyo contorno es C; $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario normal a la superficie (Fig. 6.1). En las proximidades del circuito te-

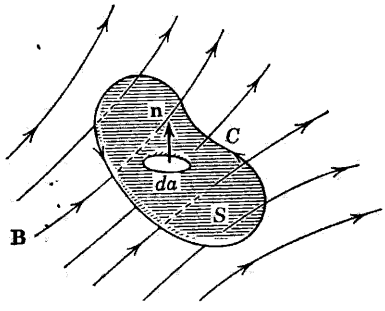


FIG. 6.1.

nemos una inducción magnética $\boldsymbol{B}$. Definimos el flujo magnético a través del circuito como:

$$F = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, da \qquad [6.1]$$

La fuerza electromotriz a lo largo del circuito es:

$$\mathcal{E} = \oint_C \boldsymbol{E}' \cdot d\boldsymbol{l} \qquad [6.2]$$

donde $\boldsymbol{E}'$ es el campo eléctrico en el elemento $d\boldsymbol{l}$ del circuito C. Las observaciones de Faraday se resumen en la expresión matemática:

$$\mathcal{E} = -k \frac{dF}{dt} \qquad [6.3]$$

La fuerza electromotriz inducida en el circuito es proporcional a la velocidad con que cambia el flujo magnético a través del mismo. El signo nos da la ley de Lenz, según la cual la corriente inducida (y el flujo magnético debido a ella) es de tal sentido que se opone a la variación de flujo que la originó.

La constante de proporcionalidad k depende de la elección de las unidades para las magnitudes eléctricas y magnéticas. No se trata, como podría suponerse a primera vista, de una constante empírica independiente a determinar experimentalmente. Como veremos de inmediato, una vez que se han elegido las unidades y dimensiones en la ley de Ampère, el valor y las dimensiones de k se deducen de la hipótesis de la invariancia de la ley de Faraday en las transformaciones de Galileo. En el sistema gaussiano de unidades $k=c^{-1}$, siendo c la velocidad de la luz. En el sistema MKSA se toma $k=1$.

Antes del desarrollo de la teoría de la relatividad especial (y aun después, cuando se trata de velocidades relativas pequeñas comparadas con la velocidad de la luz), se entendía por todos los físicos, aunque con frecuencia no se declaraba explícitamente, que las leyes físicas deberían ser invariantes respecto a las transformaciones de Galileo. Esto es, que los fenómenos físicos son idénticos al ser vistos por dos observadores que se mueven uno respecto del otro con una velocidad $\boldsymbol{v}$ constante, siempre que las coordenadas espaciales y temporales estén relacionadas por la transformación de Galileo, $x'=x+vt$, $t'=t$. Consideremos en particular las observaciones de FARADAY. Es de esperar, y así se verifica experimentalmente, que se induzca la misma corriente en un circuito secundario, tanto si *él se mueve* mientras el circuito primario a través del cual está pasando la corriente permanece estacionario, como si se mantiene *fijo* mientras se mueve el circuito primario, de modo que el movimiento relativo sea el mismo.

Ahora, consideremos la ley de Faraday para un circuito en movimiento y veamos las consecuencias de la invariancia de Galileo. Si expresamos [6.3] medante integrales extendidas a $\boldsymbol{E}'$ y a $\boldsymbol{B}$, tenemos:

$$\oint_C \boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{dl} = -k \frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, da \qquad [6.4]$$

La fuerza electromotriz inducida es proporcional a la derivada *total* del flujo respecto del tiempo. Podemos variar el flujo variando la inducción magnética o variando la forma, orientación o posición del circuito. En la forma [6.4] tenemos una generalización de gran alcance de la ley de Faraday. Podemos imaginar el circuito C como una trayectoria geométrica cerrada en el espacio sin que tenga necesariamente que coincidir con un circuito eléctrico. De este modo, la ecuación [6.4] aparece como una relación entre los campos mismos. Sin embargo, es importante señalar que el campo eléctrico, $\boldsymbol{E}'$, es el campo eléctrico en $\boldsymbol{dl}$ visto en el sistema de coordenadas, o medio, en el que $\boldsymbol{dl}$ está en reposo, puesto que es tal campo el que hace que circule corriente si en la realidad existe un circuito.

Si el circuito C se está moviendo con velocidad $\boldsymbol{v}$ en una cierta dirección, como se indica en la figura 6.2, en la derivada total de [6.4] deberemos tener en cuenta este movimiento. El flujo a través del circuito puede variar a causa de *a)*, que el flujo cambie en cada punto al transcurrir el tiempo; *b)*, que la traslación del circuito haga cambiar la posición del contorno. Es fácil de demostrar que el resultado para la derivada temporal total del flujo que atra-

viesa el circuito en movimiento es *:

$$\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,da=\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\,da+\oint_C (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})\cdot d\boldsymbol{l} \qquad [6.5]$$

Podemos así escribir la ecuación [6.4] de la forma:

$$\oint_C [\boldsymbol{E}'-k(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})]\cdot d\boldsymbol{l}=-k\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\,da \qquad [6.6]$$

Este es un enunciado equivalente de la ley de Faraday para un circuito C en movimiento. No obstante, es posible interpretarlo de modo diferente. Podemos

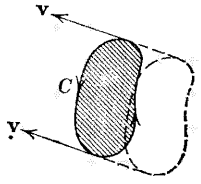


FIG. 6.2.

imaginar que el circuito C y la superficie S se hallan en un instante dado en una posición determinada del espacio vistos desde el sistema laboratorio. Al aplicar la ley de Faraday [6.4] a tal circuito fijo, obtenemos:

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-k\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\,da \qquad [6.7]$$

siendo ahora $\boldsymbol{E}$ el campo eléctrico medido en el laboratorio. La hipótesis de invariancia galileana implica que los primeros miembros de [6.6] y [6.7] deben ser iguales. Esto significa que el campo eléctrico $\boldsymbol{E}'$ en el sistema de coordenadas que se mueve con el circuito es:

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+k(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad [6.8]$$

Para determinar la constante k basta que analicemos el significado de $\boldsymbol{E}'$. Una

* Para un campo vectorial cualquiera, hay un término adicional $\int_S (\nabla\cdot\mathbf{B})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,da$, que expresa la contribución de las fuentes del campo vectorial que son barridas por el circuito en movimiento. El resultado general se deduce más fácilmente empleando la derivada convectiva

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla$$

Entonces,

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$$

en la que $\boldsymbol{v}$ se considera un vector constante para la derivación. El teorema de Stokes aplicado al segundo miembro conduce a [6.5].

partícula cargada (por ejemplo, uno de los electrones de conducción) prácticamente en reposo en el circuito móvil estará sometida a una fuerza $q\boldsymbol{E}'$. Vista desde el laboratorio esta carga equivale a una corriente $\boldsymbol{J}=q\boldsymbol{v}(x-x_0)$. Según la ley de fuerzas magnéticas [5.7] o [5.12] es evidente que esta corriente estará sometida a una fuerza que esté de acuerdo con [6.8] sólo si se admite que la constante k es igual a la unidad.

Así, pues, la ley de Faraday toma la forma:

$$\oint_C \boldsymbol{E}' \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\, da \qquad [6.9]$$

donde $\boldsymbol{E}'$ es el campo eléctrico en $d\boldsymbol{l}$ respecto de un sistema de coordenadas solidario con el circuito móvil. La derivada respecto del tiempo en el segundo miembro es una derivada *total,* dada por [6.5]. Como un subproducto de la demostración hemos encontrado que el campo eléctrico en un sistema de coordenadas que se mueve con una velocidad $\boldsymbol{v}$ respecto al laboratorio es:

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad [6.10]$$

Al haber considerado una transformación de Galileo, el resultado [6.10] es una aproximación válida únicamente para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz. (Las expresiones relativistas se deducen en la sección 11.10.) Sin embargo, la ley de Faraday no es una aproximación. La transformación de Galileo se ha empleado simplemente para calcular la constante k de [6.3], tarea para la cual resulta completamente adecuada.

Podemos expresar la ley de Faraday [6.9] en forma diferencial si hacemos uso del teorema de Stokes; supuesto que el circuito se mantiene fijo respecto del sistema de referencia elegido (precisamente para tener $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ referidos a un *mismo* sistema). Transformando la integral de la fuerza electromotriz en una integral de superficie tenemos:

$$\int_S \left(\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{n}\, da = 0$$

Por ser, tanto el circuito C como la superficie S, arbitrarios, es necesario que el integrando sea nulo en todos los puntos del espacio.

Así, pues, la ley de Faraday en forma diferencial es:

$$\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad [6.11]$$

Nótese que esto constituye la generalización para campos variables con el tiempo del enunciado $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ para los electrostáticos.

6.2. ENERGIA EN UN CAMPO MAGNETICO

Al tratar en el capítulo 5 los campos magnéticos estacionarios eludimos la cuestión de calcular la energía y la densidad de energía del campo. La razón para esto es que para crear una configuración de corrientes estacionarias con sus campos magnéticos asociados hay que considerar un periodo inicial transitorio durante el cual llevamos las corrientes y los campos desde cero hasta los valores finales. Para tales campos variables con el tiempo hay fuerzas electromotrices inducidas que determinan que los generadores que establecen las corrientes realicen trabajo. Como la energía en el campo es por definición el trabajo total efectuado para crearlo, es necesario considerar también estas contribuciones.

Por el momento supondremos que tenemos un único circuito por el que pasa una corriente constante I. Cualquier variación de flujo provoca una fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ inducida en el circuito. Las fuentes de corriente (generadores) deben realizar trabajo para que la intensidad se mantenga constante. Para determinar la potencia necesaria notemos que la velocidad de cambio de la energía de una partícula con velocidad $\boldsymbol{v}$ sometida a una fuerza $\boldsymbol{F}$ es $dE/dt = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}$. Cuando hay variación de flujo el campo adicional $\boldsymbol{E}'$ da lugar, sobre cada electrón de conducción de carga q y velocidad de deriva $\boldsymbol{v}$, a un cambio de la energía por unidad de tiempo de $q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}'$ por cada electrón. Sumando para todos los electrones en el circuito, hallamos que la potencia suministrada por los generadores para mantener la intensidad de la corriente es:

$$\frac{dW}{dt} = -I\mathcal{E} = I\frac{dE}{dt}$$

en la que el signo negativo procede de la ley de Lenz. Esta potencia es adicional a la correspondiente a las pérdidas óhmicas en el circuito que no han de ser incluidas en el cálculo de la energía magnética. Así, pues, si δF es la variación de flujo a través de un circuito por el que circula una corriente I, el trabajo realizado por los generadores es:

$$\delta W = I\,\delta F$$

Consideremos a continuación el problema del trabajo necesario para establecer una distribución arbitraria de campos y corrientes estacionarios. Podemos imaginar que el proceso de formación tiene lugar a una velocidad infinitesimal, de modo que con cualquier grado de exactitud deseado sea válida la ecuación $\nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0$. En estas condiciones descomponemos nuestra distribución de corriente en una red de corrientes elementales cerradas. Cada una de ellas es un tubo elemental de corriente de área transversal $\Delta\sigma$ que sigue un camino cerrado C, que constituye el contorno de una superficie S cuya normal es $\boldsymbol{n}$, tal como se indica en la figura 6.3.

El trabajo incremental realizado contra la fem inducida puede expresarse en función del cambio en la inducción magnética que atraviesa la espira:

$$\Delta(\delta W) = J\Delta\sigma\int_S \boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{B}\,da$$

en esta expresión el símbolo Δ adicional procede del hecho que estamos considerando solamente un circuito elemental. Si ponemos $\boldsymbol{B}$ en función del potencial vector $\boldsymbol{A}$, tenemos:

$$\Delta(\delta W) = J\,\Delta\sigma \int_S (\nabla \times \delta \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, da$$

Y aplicando el teorema de Stokes, puede escribirse:

$$\Delta\,(\delta W) = J\,\Delta\sigma \int_S \delta \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Pero, por definición, $J\,\Delta\sigma\, d\boldsymbol{l}$ es igual a $\boldsymbol{J}\, d^3x$, ya que $d\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{J}$ son paralelos. Se ve claramente que la suma extendida a todas las espiras elementales no es

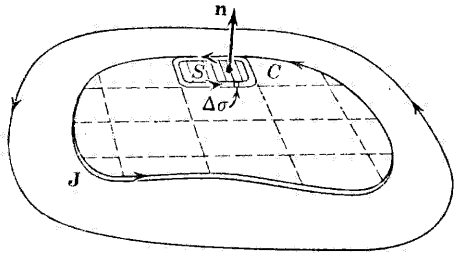


FIG. 6.3. Distribución de densidad de corriente descompuesta en corrientes elementales.

más que la integral de volumen. Por tanto, el trabajo incremental total que efectúan las fuentes externas para provocar un cambio $\delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ en el potencial vector es:

$$\delta W = \int \delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J}\, d^3x \qquad [6.12]$$

Haciendo uso de la ley de Ampère podemos obtener una expresión en la que intervengan los campos magnéticos en lugar de $\boldsymbol{J}$ y $\delta \boldsymbol{A}$. En efecto, sustituyendo

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

resulta:

$$\delta W = \int \delta \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})\, d^3x \qquad [6.13]$$

Para transformar [6.13] podemos recurrir a la identidad vectorial:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{P}) - \boldsymbol{P} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{Q})$$

y así obtenemos:

$$\delta W = \int [\boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \delta \boldsymbol{A}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \delta \boldsymbol{A})]\, d^3x \qquad [6.14]$$

Si se supone que la distribución de corriente es localizada, se anula la segunda integral. Teniendo en cuenta la definición de $\boldsymbol{B}$ en función de $\boldsymbol{A}$, el incremento de energía puede expresarse:

$$\delta W = \int \boldsymbol{H} \cdot \delta \boldsymbol{B}\, d^3x$$

Esta relación es la equivalente en magnetismo a la [4.86] de electrostática. En su forma presente es aplicable a todos los medios magnéticos, incluidas las sustancias ferromagnéticas. Si suponemos que el medio es para- o diamagnético, de modo que existe una relación lineal entre $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$, entonces:

$$\boldsymbol{H} \cdot \delta \boldsymbol{B} = \tfrac{1}{2}\delta(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B})$$

Y si llevamos los campos desde cero hasta sus valores finales, la energía magnética total es:

$$W = \tfrac{1}{2}\int \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}\, d^3x \qquad [6.16]$$

Esta expresión es análoga a [4.89].

En [4.83] se expresa la energía electrostática en función de la densidad de carga y el potencial. La análoga magnética puede obtenerse partiendo de [6.12] y admitiendo una relación lineal entre $\boldsymbol{J}$ y $\boldsymbol{A}$. Así obtenemos que la energía magnética es:

$$W = \tfrac{1}{2}\int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A}\, d^3x \qquad [6.17]$$

El problema de analizar el cambio de energía cuando se coloca en un campo magnético, cuyas fuentes de corriente permanecen invariables, un cuerpo de permeabilidad μ, puede tratarse en estrecha analogía con el problema electrostático discutido en la sección 4.7. El papel de $\boldsymbol{E}$ es asumido por $\boldsymbol{B}$, y el de $\boldsymbol{D}$ por $\boldsymbol{H}$. Sea μ_1 la permeabilidad del medio original y $\boldsymbol{B}_0$ la inducción magnética existente. Después de introducir el objeto, los campos son $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$. Se deja como ejercicio para el lector comprobar que, si las fuentes del campo no se alteran, el cambio de energía es:

$$W = \tfrac{1}{2}\int_{V_1} (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}_0)\, d^3x \qquad [6.18]$$

donde la integración se extiende al volumen del objeto. Esta expresión puede escribirse, alternativamente:

$$W = \frac{1}{2}\int_{V_1} (\mu - \mu_1)\, \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0\, d^3x = \frac{1}{2}\int_{V_1} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu}\right) \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}_0\, d^3x \qquad [6.19]$$

Tanto μ_1 como μ pueden ser funciones de la posición, pero se suponen independientes de la intensidad del campo.

Si tenemos el objeto en el vacío ($\mu_1 = \mu_0$), podemos expresar la energía mediante la imanación:

$$W = \tfrac{1}{2}\int_{V_1} \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B}_0\, d^3x \qquad [6.20]$$

Es interesante observar que [6.20] es equivalente al resultado electrostático [4.93], con la excepción del signo. Este cambio de signo procede de que la energía W corresponde al cambio total de energía que tiene lugar cuando se introduce el cuerpo permeable en el campo, incluido el trabajo realizado por los generadores contra las fuerzas electromotrices inducidas. En este aspecto el problema magnético con corrientes fijas es análogo al problema electrostático con potenciales fijos en las superficies de los electrodos que determinan el campo. Mediante un análisis equivalente al que se presenta al final de la sección 4.7, podemos probar que, para un pequeño desplazamiento, el trabajo efectuado contra las fuerzas electromotrices inducidas es doble y de signo contrario del cambio de energía potencial experimentado por el cuerpo. Así, para conocer la fuerza generalizada que actúa sobre un cuerpo, calcularemos la derivada *positiva* de W respecto del desplazamiento:

$$F_\xi = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_J \qquad [6.21]$$

El subíndice J indica corrientes fijas.

La diferencia entre [6.20] y la energía potencial [5.72] de un momento magnético permanente en un campo externo (haciendo abstracción del factor $\frac{1}{2}$, que se debe a la relación lineal entre $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{B}$) hay que buscarla en el hecho de que [6.20] representa la energía total necesaria para lograr la configuración, y [5.72] considera solamente el trabajo realizado para colocar el momento magnético en el campo; sin tener en cuenta el trabajo que se requiere para crearlo y mantenerlo constante.

6.3. CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO DE MAXWELL. ECUACIONES DE MAXWELL

Todo lo que hemos visto hasta el momento en electricidad y magnetismo puede resumirse en forma diferencial por medio de estas cuatro ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Ley de Coulomb:} && \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\ &\text{Ley de Ampère:} && \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \\ &\text{Ley de Faraday:} && \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \\ &\text{Ausencia de polos magnéticos libres:} && \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [6.22]$$

Estas ecuaciones se han escrito en forma macroscópica y en el sistema MKSA racionalizado. Recordemos que todas, salvo la ley de Faraday, se dedujeron a partir de observaciones estáticas o estacionarias. En consecuencia, desde un punto de vista lógico, no existe *a priori* razón alguna para esperar que las ecuaciones estáticas se mantengan sin cambio para campos dependientes del tiempo. De hecho, tal como están formuladas las ecuaciones [6.22] resultan incompatibles.

Fue necesario el genio de J. C. MAXWELL, estimulado por las observaciones de FARADAY, para descubrir la incompatibilidad entre las ecuaciones [6.22] y para evitarla modificándolas y formar un conjunto de ecuaciones que im-

plicaba fenómenos físicos nuevos, desconocidos en aquel tiempo, pero verificados experimentalmente en todos sus detalles con posterioridad. Por este brillante hecho, que tuvo lugar en 1865, el conjunto de ecuaciones modificadas se conoce con justicia como *ecuaciones de Maxwell.*

La ecuación que falla es la ley de Ampère. Se dedujo para los fenómenos debidos a corrientes estacionarias en los que $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$. En efecto, este requisito está implícito en la ley de Ampère, como puede observarse al tomar la divergencia de ambos miembros:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) \equiv 0 \qquad [6.23]$$

Mientras $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ es válida para los problemas en régimen estacionario, la relación completa es la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad [6.24]$$

De lo que MAXWELL se dio cuenta es de que la ecuación de continuidad podía convertirse en otra de divergencia nula haciendo uso de la ley de Coulomb [6.22]. Así:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) = 0 \qquad [6.25]$$

Entonces, MAXWELL reemplazó para el caso de campos variables con el tiempo el vector $\boldsymbol{J}$ de la ley de Ampère por su generalización:

$$\boldsymbol{J} \rightarrow \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad [6.26]$$

Así, la ley de Ampère se transforma en:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad [6.27]$$

que para fenómenos en régimen estacionario es aún la misma ley verificada experimentalmente, pero que ahora, para campos variables con el tiempo, es matemáticamente compatible con la ecuación de continuidad [6.24]. MAXWELL llamó *corriente de desplazamiento* al término adicional en [6.26]. Esta adición necesaria a la ley de Ampère es de importancia crucial para campos que fluctúan rápidamente. Sin ella no habría radiación electromagnética, y la mayor parte de lo que resta en este libro tendría que ser omitida. La predicción hecha por Maxwell de que la luz era un fenómeno ondulatorio electromagnético y que podrían producirse ondas electromagnéticas de todas las frecuencias fue lo que atrajo la atención de todos los físicos y estimuló tantas investigaciones teóricas y experimentales en electromagnetismo durante los últimos años del siglo XIX.

El conjunto formado por las cuatro ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho & \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 & \nabla \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \end{array}\right\} \qquad [6.28]$$

conocidas como ecuaciones de Maxwell, constituye la base de todos los fenómenos electromagnéticos clásicos. Si las combinamos con la ecuación de fuerza de Lorentz y con la segunda ley de movimiento de Newton, estas ecuaciones nos dan una descripción completa de las interacciones entre partículas cargadas y campos electromagnéticos (véanse la sección 6.8 y los capítulos 10, 12 y 17). El margen de validez de las ecuaciones de Maxwell se discute en la Introducción, así como la cuestión de las condiciones de contorno para las componentes tangencial y normal de los campos en las superficies de separación entre medios diferentes. Las relaciones constitutivas que conectan $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ con $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ se han comentado en la Introducción y para fenómenos estáticos se han tratado en los capítulos 4 y 5. Más adelante, en el presente capítulo y en el 7, se dirá algo más sobre esto.

Al expresar las ecuaciones de Maxwell [6.28] se han utilizado las mismas unidades que en capítulos anteriores. Para el lector más familiarizado con otros sistemas de unidades, como el gaussiano, la tabla 2 del apéndice resume las ecuaciones básicas en los sistemas más corrientes. La tabla 3 del apéndice permite la conversión de cualquier ecuación entre los sistemas MKSA y gaussiano, en tanto que la tabla 4 da los factores de conversión correspondientes para pasar las cantidades de cualquier magnitud.

6.4. POTENCIAL ESCALAR Y POTENCIAL VECTOR

Las ecuaciones de Maxwell constituyen un sistema de ecuaciones simultáneas en derivadas parciales de primer orden entre las componentes de los campos eléctrico y magnético. Tal como están pueden ser resueltas directamente en algunos casos sencillos. Pero a menudo nos conviene introducir los potenciales con objeto de obtener un número menor de ecuaciones de segundo orden que satisfagan idénticamente alguna de las ecuaciones de Maxwell. Estos conceptos ya nos son conocidos de electrostática y magnetostática, donde hemos empleado el potencial escalar Φ y el potencial vector $\boldsymbol{A}$.

Como $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ es aún válida, podemos definir $\boldsymbol{B}$ en función de un potencial vector $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad [6.29]$$

Entonces, la otra ecuación homogénea de las [6.28], esto es, la ley de Faraday, puede escribirse:

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \qquad [6.30]$$

Esto significa que la magnitud cuyo rotacional es nulo según [6.30] puede escribirse como el gradiente de una cierta función escalar, a saber, un potencial escalar Φ:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} &= -\nabla \Phi \\ \boldsymbol{E} &= -\nabla \Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad [6.31]$$

Las expresiones de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}$ en función de los potenciales $\boldsymbol{A}$ y Φ, esto es la [6.28]

y la [6.31], satisfacen idénticamente las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell. El comportamiento dinámico de $\boldsymbol{A}$ y Φ se determinará mediante las otras dos ecuaciones de [6.28] no homogéneas.

En esta etapa es conveniente que limitemos nuestras consideraciones a la forma microscópica de las ecuaciones de Maxwell. Así, pues, las ecuaciones no homogéneas de [6.28] pueden escribirse en función de los potenciales del siguiente modo:

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\rho/\epsilon_0 \qquad [6.32]$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\boldsymbol{J} \qquad [6.33]$$

Ahora hemos reducido el conjunto de cuatro ecuaciones de Maxwell a sólo dos ecuaciones. Pero son todavía ecuaciones simultáneas. Para desacoplar el sistema podemos aprovechar la arbitrariedad implicada en la definición de los potenciales. Como $\boldsymbol{B}$ se relaciona con $\boldsymbol{A}$ a través de [6.29], el potencial vector es arbitrario en el sentido de podérsele sumar el gradiente de una función escalar Λ cualquiera. $\boldsymbol{B}$ no se altera en la transformación:

$$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda \qquad [6.34]$$

Si queremos que también el campo eléctrico permanezca inalterado, debemos transformar simultáneamente el potencial escalar:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \qquad [6.35]$$

La libertad que nos dan [6.34] y [6.35] significa que podemos elegir un sistema de potenciales $(\boldsymbol{A}, \Phi)$ tales que:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \qquad [6.36]$$

con lo que el sistema de ecuaciones [6.32] y [6.33] queda desacoplado, dando dos ecuaciones de ondas no homogéneas, una para Φ y otra para $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0 \qquad [6.37]$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\boldsymbol{J} \qquad [6.38]$$

Las ecuaciones [6.37] y [6.38], además de la [6.36], constituyen un sistema de ecuaciones equivalente en todos los aspectos a las ecuaciones de Maxwell.

6.5. TRANSFORMACIONES DE CONTRASTE, CONDICION DE LORENTZ, CONDICION DE COULOMB

La transformación definida por [6.34] y [6.35] se denomina transformación de contraste *, y la invariancia de los campos en estas transformaciones, invariancia de contraste. La relación [6.36] entre $\boldsymbol{A}$ y Φ se conoce como *condición de Lorentz*. Para probar que siempre es posible hallar potenciales que satisfagan la condición de Lorentz, supongamos que los potenciales $\boldsymbol{A}$ y Φ, que satisfacen [6.32] y [6.33], no satisfacen [6.36]. Efectuemos una transformación de contraste que nos lleve a los potenciales $\boldsymbol{A}'$ y Φ', a los que exigiremos que satisfagan la condición de Lorentz:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \qquad [6.39]$$

Así, pues, basta hallar una función de contraste Λ que satisfaga:

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \qquad [6.40]$$

para que los nuevos potenciales $\boldsymbol{A}'$, Φ' satisfagan la condición de Lorentz y además las ecuaciones de onda [6.37] y [6.38].

Existe arbitrariedad incluso para potenciales que satisfacen la condición de Lorentz [6.36]. En efecto, la *transformación de contraste restringida*:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &\rightarrow \boldsymbol{A} + \nabla \Lambda \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad [6.41]$$

donde

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \qquad [6.42]$$

conserva la condición de Lorentz siempre que $\boldsymbol{A}$, Φ la satisfagan inicialmente. Se dice que todos los potenciales de esta clase restringida pertenecen al *contraste de Lorentz*. Normalmente se emplea el contraste de Lorentz, en primer lugar porque nos lleva a ecuaciones de onda [6.37] y [6.38], en que $\boldsymbol{A}$ y Φ desempeñan papeles análogos, y, en segundo lugar, porque se trata de un concepto independiente del sistema de coordenadas elegido y, de este modo, encaja en las consideraciones de la relatividad restringida (véase sección 11.9) de forma natural.

Otra elección de contraste interesante es el llamado de *Coulomb, de radiación o transversal*. Es aquel en el cual

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \qquad [6.43]$$

Según [6.32], vemos que el potencial escalar satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0 \qquad [6.44]$$

con la solución:

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}', t)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\, d^3x' \qquad [6.45]$$

* Véase nota al pie de la página 181. *(N. del T.)*

El potencial escalar es precisamente el potencial *instantáneo* de Coulomb debido a la densidad de carga $\rho(x, t)$. Este es el origen del nombre «contraste de Coulomb».

El potencial vector satisface la ecuación de ondas no homogénea:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad [6.46]$$

El término de «corriente» en que aparece el potencial puede calcularse, en principio, a partir de [6.45]. Como contiene el operador gradiente es un término que es *irrotacional,* es decir, su rotacional se anula. Esta propiedad sugiere que puede cancelar la parte correspondiente de la densidad de corriente. La densidad de corriente (o cualquier otro campo vectorial) puede escribirse como la suma de dos términos:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_l + \boldsymbol{J}_t \qquad [6.47]$$

siendo $\boldsymbol{J}_l$ la llamada corriente *longitudinal* o *irrotacional,* ya que satisface $\nabla \times \boldsymbol{J}_l = 0$, mientras que $\boldsymbol{J}_t$ se llama corriente *transversal* o *solenoidal,* porque $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_t = 0$. Partiendo de la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{J}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{J}) - \nabla^2 \boldsymbol{J}, \qquad [6.48]$$

junto con

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|x - x'|}\right) = -4\pi\,\delta(x - x').$$

se puede demostrar que $\boldsymbol{J}_l$ y $\boldsymbol{J}_t$ se pueden construir explícitamente a partir de $\boldsymbol{J}$ en la forma:

$$\boldsymbol{J}_l = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{J}}{|x - x'|}\, d^3x' \qquad [6.49]$$

$$\boldsymbol{J}_t = \frac{1}{4\pi}\nabla \times \nabla \times \int \frac{\boldsymbol{J}}{|x - x'|}\, d^3x' \qquad [6.50]$$

Con la ayuda de la ecuación de continuidad y [6.45] se ve que:

$$\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{J}_l \qquad [6.51]$$

Por consiguiente, podemos expresar las fuentes de $\boldsymbol{A}$ en la ecuación de ondas únicamente por medio de la corriente *transversal* [6.50]:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J}_t \qquad [6.52]$$

Es éste el motivo de la denominación «contraste transversal».

El nombre «contraste de radiación» surge del hecho de que los campos de radiación transversales son debidos únicamente al potencial vector, el potencial instantáneo coulombiano contribuye sólo a los campos próximos. Este contraste resulta particularmente útil en electrodinámica cuántica. La descripción mecanocuántica de los fotones necesita sólo la cuantificación del potencial vector.

Con frecuencia se usa el contraste de Coulomb cuando no hay fuentes presentes. En este caso, $\Phi=0$, y A satisface la ecuación de ondas homogénea. Los campos vienen dados por:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \end{aligned}\right\} \qquad [6.53]$$

Señalemos de paso una peculiaridad del contraste de Coulomb. Como se sabe, las perturbaciones electromagnéticas se propagan con velocidad finita. Aun así, [6.45] indica que el potencial escalar «se propaga» instantáneamente en todo el espacio. Por otra parte, el potencial vector satisface la ecuación de ondas [6.52], lo que implica una velocidad finita de propagación c. Resulta a primera vista desconcertante ver cómo puede evitarse este comportamiento, que obviamente no es físico. Una cuestión previa es que son los campos y no los potenciales lo que nos concierne. Además puede observarse que la corriente transversal [6.50] implica una integración a todo el espacio *.

6.6. FUNCION DE GREEN PARA LA ECUACION DE ONDAS

Las ecuaciones de ondas [6.37], [6.38] y [6.52] tienen todas ellas la estructura fundamental:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\boldsymbol{x}, t) \qquad [6.54]$$

donde $f(\boldsymbol{x}, t)$ es una distribución de fuentes conocida. El factor c es la velocidad de propagación de la luz en el medio, suponiendo que no presente dispersión.

Para resolver [6.54] es conveniente hallar una función de Green, del mismo modo que hacíamos en electrostática.

Consideraremos la situación simple de que no haya superficies límite y procederemos a eliminar la dependencia explícita con el tiempo introduciendo la transformada de Fourier con respecto a la frecuencia. Suponemos que $\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ y $f(\boldsymbol{x}, t)$ se representan mediante integrales de Fourier en la forma:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\boldsymbol{x}, \omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \\ f(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}, \omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \end{aligned}\right\} \qquad [6.55]$$

con las transformaciones inversas:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{x}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\boldsymbol{x}, t) e^{i\omega t}\, dt \\ f(\boldsymbol{x}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}, t) e^{i\omega t}\, dt \end{aligned}\right\} \qquad [6.56]$$

* Véase O. L. BRILL y B. GOODMAN, *Am. J. Phys.*, **35**, 832 (1967), para una discusión detallada sobre la causalidad en el contraste de Coulomb. Véase también el problema 6.19.

Cuando se sustituyen las representaciones [6.55] en [6.54] se encuentra que la transformada de Fourier $\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ satisface la *ecuación de ondas de Helmholtz no homogénea*:

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\boldsymbol{x}, \omega) = -4\pi f(\boldsymbol{x}, \omega) \qquad [6.57]$$

para cada valor de ω. En ella $k = \omega/c$ es el número de ondas asociado a la frecuencia ω. En esta forma, resulta innecesario establecer la restricción de que no haya dispersión. *A priori,* es posible cualquier relación entre k y ω; sin embargo, la causalidad impone ciertas restricciones (véase la sección 7.10).

La ecuación [6.57] es una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico semejante a la ecuación de Poisson, a la que se reduce en el caso $k = 0$. La función de Green $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ apropiada para [6.57] satisface la ecuación no homogénea:

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -4\pi\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \qquad [6.58]$$

Si no existen superficies límite, la función de Green puede depender únicamente de $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$, y de hecho debe poseer simetría esférica, esto es, depender sólo de $R = |\boldsymbol{R}|$. Resulta evidente de la forma del operador laplaciana en coordenadas esféricas (véase [3.1]), que $G_k(R)$ satisface:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG_k) + k^2 G_k = -4\pi\,\delta(\boldsymbol{R}) \qquad [6.59]$$

En todo el espacio, salvo el punto $R = 0$, $RG_k(R)$ satisface la ecuación homogénea:

$$\frac{d^2}{dR^2}(RG_k) + k^2(RG_k) = 0$$

cuya solución es:

$$RG_k(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR}$$

Además, la función delta de [6.59] sólo tiene influencia para $R \to 0$. En tal límite la ecuación se reduce a la de Poisson por ser $kR \ll 1$. Por consiguiente, sabemos, de la electrostática, que la normalización correcta es:

$$\lim_{kR \to 0} G_k(R) = \frac{1}{R} \qquad [6.60]$$

Por tanto, la solución general para la función de Green es:

$$G_k(R) = AG_k^{(+)}(R) + BG_k^{(-)}(R) \qquad [6.61]$$

con $A + B = 1$, siendo

$$G_k^{(\pm)} = \frac{e^{ikR}}{R} \qquad [6.62]$$

Con el convenio de [6.55] para la dependencia temporal, el primer término de [6.61] representa una onda esférica divergente que se propaga desde el origen, mientras que el segundo representa una onda esférica convergente.

La elección de A y B en [6.61] depende de las *condiciones de contorno para el tiempo* que especifican el problema físico. Intuitivamente resulta obvio que, si una fuente está en reposo hasta cierto instante $t=0$ y entonces empieza a funcionar, la función de Green apropiada es el primer término de [6.61], que corresponde a ondas radiadas hacia fuera desde la fuente a partir del momento en que empieza a actuar. Tal descripción es ciertamente correcta y también conveniente, pero no es única o necesaria. Dando en forma adecuada la amplitud de la onda en el instante inicial es posible emplear el segundo término de [6.61], no el primero, para describir la acción de la fuente.

Para entender el comportamiento temporal diferente asociado a $G_k^{(+)}$ y $G_k^{(-)}$, necesitamos construir las correspondientes funciones de Green dependientes del tiempo, que satisfacen

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^{(\pm)}(\boldsymbol{x}, t;\ \boldsymbol{x}', t') = -4\pi\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,\delta(t-t') \qquad [6.63]$$

Utilizando [6.56] vemos que el término fuente para [6.57] es:

$$-4\pi\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,e^{i\omega t'}$$

Las soluciones son, pues, $G_k^{(\pm)}(R)e^{i\omega t'}$. Según [6.55] las funciones de Green dependientes del tiempo son:

$$G^{(\pm)}(R,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R}\, e^{-i\omega\tau}\, d\omega \qquad [6.64]$$

siendo $\tau = t - t'$ el tiempo relativo que aparece en [6.63]. La función de Green para el espacio infinito es, pues, una función únicamente de la distancia relativa R y del tiempo relativo entre la fuente y el punto de observación. Para un medio no dispersivo en el que $k=\omega/c$, la integral de [6.64] es una función delta. Las funciones de Green son:

$$G^{(\pm)}(R,\tau) = \frac{1}{R}\,\delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right) \qquad [6.65]$$

o, más explícitamente,

$$G^{(\pm)}(\boldsymbol{x}, t;\ \boldsymbol{x}', t') = \frac{\delta\left(t' - \left[t \mp \dfrac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right]\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \qquad [6.66]$$

La función de Green $G^{(+)}$ se llama *función de Green retardada* porque presenta el comportamiento causal asociado con una perturbación ondulatoria. El argumento de la función delta muestra que el efecto observado en el punto $\boldsymbol{x}$ en el instante t es debido a la acción de una fuente distante una distancia R en un instante retardado, o anterior, $t' = t - R/c$. La diferencia de tiempo R/c es precisamente el tiempo de propagación de la perturbación desde un punto a otro. Análogamente, $G^{(-)}$ se llama *función de Green avanzada.*

Las integrales particulares de la ecuación de ondas no homogénea [6.54] son:

$$\Psi^{(\pm)}(\boldsymbol{x}, t) = \int\int G^{(\pm)}(\boldsymbol{x}, t;\ \boldsymbol{x}', t') f(\boldsymbol{x}', t')\, d^3x'\, dt'$$

Para especificar un problema físico determinado pueden añadirse a cualesquiera de ellas soluciones de la ecuación homogénea. Consideremos una distribución de fuentes $f(x', t')$ que sea localizada en el espacio y en el tiempo. Es diferente de cero sólo durante un intervalo finito de tiempo en torno a $t'=0$. Se advierten dos situaciones límite. En la primera se supone que en el instante $t \to -\infty$ existe una onda $\Psi_{in}(x, t)$ que satisface la ecuación de ondas homogénea. Esta onda se propaga en el tiempo y en el espacio; la fuente se enciende y a su vez genera ondas. La solución completa para esta situación en cualquier instante es, evidentemente:

$$\Psi(x, t) = \Psi_{in}(x, t) + \int\int G^{(+)}(x, t;\ x', t') f(x', t')\, d^3x'\, dt' \qquad [6.67]$$

La presencia de $G^{(+)}$ garantiza que para tiempos remotos, t, antes que la fuente sea activada, no hay contribución de la integral. Sólo existe la onda especificada Ψ_{in}. La segunda situación es aquella en la que en instantes muy posteriores ($t \to +\infty$) la onda está dada por $\Psi_{sal}(x, t)$, una solución conocida de la ecuación de ondas homogénea. Entonces la solución completa en todo instante es:

$$\Psi(x, t) = \Psi_{sal}(x, t) + \int\int G^{(-)}(x, t;\ x', t') f(x', t')\, d^3x'\, dt' \qquad [6.68]$$

Ahora la función de Green avanzada asegura que no existirá ninguna señal procedente de la fuente después de que la fuente se apague (por hipótesis, dichas señales están todas incluidas en Ψ_{sal}).

La situación física más corriente es la descrita por [6.67] con $\Psi_{in}=0$. Algunas veces se escribe introduciendo explícitamente la función de Green [6.66] en la forma:

$$\Psi(x, t) = \int \frac{[f(x', t')]_{ret}}{|x - x'|}\, d^3x' \qquad [6.69]$$

El corchete $[\ ]_{ret}$ significa que el tiempo ha de calcularse en el instante retardado, $t' = t - |x - x'|/c$.

El problema de valores iniciales o finales en instantes finitos se ha estudiado extensamente en una, dos y tres dimensiones. El lector puede referirse a la obra de MORSE y FESHBACH, págs. 843-847, y también al tratamiento más matemático de HADAMARD.

6.7. DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DEL ELECTROMAGNETISMO MACROSCOPICO

La discusión sobre el electromagnetismo en los capítulos anteriores se ha basado en las ecuaciones *macroscópicas* de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \qquad & \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \qquad & \nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= \boldsymbol{J} \end{aligned} \qquad [6.70]$$

en las que $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son los campos eléctrico y magnético macroscópicos, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ los campos derivados correspondientes, relacionados con $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ a través de la polarización $\boldsymbol{P}$ y la imanación $\boldsymbol{M}$ del medio material por:

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}; \qquad \boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M} \tag{6.71}$$

Análogamente, ρ y $\boldsymbol{J}$ son, respectivamente, las densidades de carga y corriente (libres) macroscópicas. Aunque estas ecuaciones son familiares y totalmente aceptables, aún nos falta presentar una deducción seria de las mismas desde un punto de partida microscópico. Esta falta se subsana en la sección presente. La deducción se mantiene dentro de un marco clásico, aunque los átomos deben describirse en forma mecanocuántica. La excusa para esta aparente falta de adecuación es que el tratamiento cuántico sigue de modo paralelo al clásico, reemplazando por los valores esperados mecanocuánticos las magnitudes clásicas en las fórmulas que damos a continuación. El lector puede examinar los tratamientos mecanoestadísticos en la bibliografía citada al final del capítulo.

Consideremos un mundo microscópico formado por núcleos y electrones. Cuando las dimensiones son grandes comparadas con 10^{-14} m los núcleos pueden tratarse como sistemas puntuales, lo mismo que los electrones. Suponemos que las ecuaciones que gobiernan los fenómenos electromagnéticos para estas cargas puntuales con las ecuaciones *microscópicas* de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{b}&=0 & \nabla\times\boldsymbol{e}+\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial t}&=0 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{e}&=\eta/\epsilon_0 & \nabla\times\boldsymbol{b}/\mu_0-\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{e}}{\partial t}&=\boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{6.72}$$

en las que $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{b}$ son los campos eléctrico y magnético microscópicos y η y $\boldsymbol{j}$ son las densidades de carga y corriente microscópicas. No hay campos $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{h}$ correspondientes debido a que todas las cargas están incluidas en η y $\boldsymbol{j}$. Una cantidad macroscópica de materia en reposo contiene del orden de $10^{23\pm5}$ electrones y núcleos, todos en incesante movimiento debido a la agitación térmica, a las vibraciones asociadas a la energía del punto cero o al movimiento orbital. Los campos electromagnéticos producidos por estas cargas varían de forma extremadamente rápida en el espacio y en el tiempo. Las variaciones espaciales tienen lugar en distancias del orden 10^{-10} m o menos, y las fluctuaciones temporales ocurren con periodos que van desde unos 10^{-13} s para las vibraciones nucleares hasta 10^{-17} s para el movimiento orbital de los electrones. Los dispositivos de medida macroscópicos promedian en general sobre intervalos en el espacio y en el tiempo mucho mayores que éstos. Todas las fluctuaciones microscópicas son, pues, eliminadas al promediar, dando magnitudes macroscópicas que varían de modo relativamente suave y lento, tal como aparece en las ecuaciones macroscópicas de Maxwell.

Debe examinarse con cuidado la cuestión de cuál es el tipo de promedio apropiado. A primera vista podría pensarse que son necesarias medias tanto en el espacio como en el tiempo. Pero esto no es cierto. Sólo es necesario obtener la media espacial. (Indiquemos que obtener sólo la media temporal ciertamente no sería suficiente, como puede verse en el caso de un cristal iónico cuyos iones presentan pequeñas vibraciones en el punto cero alrededor de puntos de la red bien definidos y separados.) Para delimitar el dominio en el que podemos es-

perar que sirva una descripción macroscópica de los fenómenos electromagnéticos, observemos que la reflexión y la refracción de la luz visible se describen de modo adecuado mediante las ecuaciones de Maxwell con una constante dieléctrica continua, en tanto que la difracción de rayos X pone de manifiesto claramente la naturaleza atomística de la materia. Es plausible, por consiguiente, la longitud $L_0 = 10^{-8}$ m $= 10^2$ Å como límite inferior absoluto del dominio macroscópico. El periodo de oscilación asociado con luz de esta longitud de onda es $L_0/c \simeq 3 \times 10^{-17}$ s. En un volumen de $L_0^3 = 10^{-24}$ m^3 existen todavía, en la materia ordinaria, del orden de 10^6 núcleos y electrones. Así, pues, en cualquier región de interés macroscópico con $L \gg L_0$ hay tantos núcleos y electrones que las fluctuaciones quedarán completamente difuminadas al promediar espacialmente. Por otra parte, debido a que la escala de tiempo asociada con L se halla realmente en el intervalo de los movimientos atómicos y moleculares, el promediar en el tiempo no resultaría apropiado. No obstante, después de obtener la media espacial no hay evidencia de las fluctuaciones temporales microscópicas del medio. Esto es así porque las variaciones temporales de los campos microscópicos no presentan correlación a distancias del orden de L_0, en ausencia de una preparación especial y del establecimiento de ordenación en distancias macroscópicas. Todo lo que sobrevive son las componentes en frecuencia correspondientes a oscilaciones forzadas a las frecuencias impuestas externamente.

La media espacial de una función $F(\boldsymbol{x}, t)$ con respecto a una función de prueba $f(\boldsymbol{x})$ se define como:

$$\langle F(\boldsymbol{x}, t)\rangle = \int d^3x' \, f(\boldsymbol{x}')F(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t') \qquad [6.73]$$

en donde $f(\boldsymbol{x})$ es real, no nula en cierto entorno de un punto $\boldsymbol{x} = 0$, y está normalizada a la unidad en todo el espacio. Resulta más sencillo, aunque no es necesario, imaginar que $f(\boldsymbol{x})$ es no negativa. Con el fin de preservar sin tendencias las características direccionales de las propiedades físicas promediadas, haremos que $f(\boldsymbol{x})$ sea isotropa en el espacio. Podemos poner dos ejemplos:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi R^3}, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = (\pi R^2)^{-3/2} e^{-r^2/R^2}$$

El primer ejemplo es corriente en la bibliografía, corresponde al promediado en un volumen esférico de radio R. Tiene la ventaja de su simplicidad conceptual, pero la desventaja de una discontinuidad abrupta en $r = R$. Esto conduce a una fluctuación en las magnitudes promediadas cuando una sola molécula o un grupo de moléculas entra o sale del volumen de promediado. Una función de prueba suave, como la gaussiana del ejemplo, elimina tales dificultades, supuesto que su escala sea grande comparada con las dimensiones atómicas. Afortunadamente, no necesitamos especificar con detalle la función de prueba $f(\boldsymbol{x})$; todo lo que se necesita en general son las propiedades de continuidad y suavidad que permitan un desarrollo de $f(\boldsymbol{x})$ en serie de Taylor que sea con-

vergente rápidamente en distancias de dimensiones atómicas, como se ha indicado esquemáticamente en la figura 6.4. Esto es una gran virtud *.

Como en las ecuaciones de Maxwell intervienen derivadas espaciales y temporales, debemos considerar estas operaciones en relación con el proceso de promediado según [6.73]. Evidentemente, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle F(\boldsymbol{x}, t)\rangle = \int d^3x' f(\boldsymbol{x}') \frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle F(\boldsymbol{x}, t)\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \qquad [6.74]$$

Así, pues, las operaciones de derivación espacial y temporal conmutan con la operación de promediado.

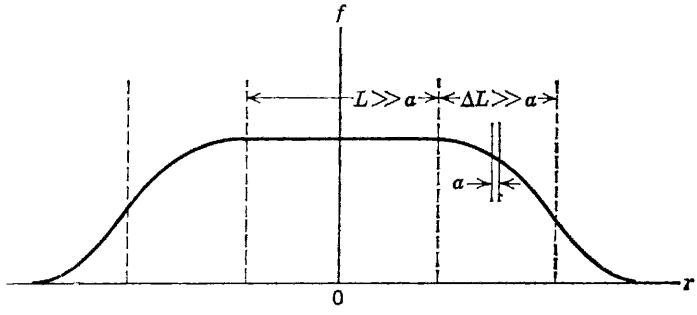


FIG. 6.4. Diagrama esquemático de la función de prueba $f(x)$ utilizada para el promediado espacial. La extensión de la meseta L, así como la extensión ΔL de la región en que f cae a cero, son grandes comparadas con las dimensiones moleculares a.

Ahora podemos ya abordar el promediado de las ecuaciones microscópicas de Maxwell [6.72]. Las magnitudes *macroscópicas* campo eléctrico y campo magnético, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, se definen como las medias de los campos microscópicos $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) &= \langle \boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}, t)\rangle \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) &= \langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)\rangle \end{aligned} \qquad [6.75]$$

Por tanto, las medias de las dos ecuaciones homogéneas de las [6.72] se convierten en las ecuaciones macroscópicas correspondientes:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \boldsymbol{b}\rangle = 0 &\rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \left\langle \nabla \times \boldsymbol{e} + \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} \right\rangle = 0 &\rightarrow \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \qquad [6.76]$$

* En este caso nos basamos en el desarrollo de G. RUSSAKOFF, *Am. J. Physics*, **38**, 1188 (1970).

Al promediar las ecuaciones no homogéneas de las [6.72] se obtiene:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \langle \eta(x, t) \rangle / \epsilon_0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}/\mu_0 - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \langle \boldsymbol{j}(x, t) \rangle \qquad [6.77]$$

Al comparar con el par de ecuaciones no homogéneas macroscópicas [6.70] se advierte el hecho conocido de que los campos derivados $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ se introducen mediante la extracción de $\langle \eta \rangle$ y $\langle \boldsymbol{j} \rangle$ de ciertas contribuciones que pueden identificarse con las propiedades del medio. La próxima tarea es, pues, examinar $\langle \eta \rangle$ y $\langle \boldsymbol{j} \rangle$.

Consideremos un medio constituido por moléculas compuestas por núcleos y electrones, y, además, cargas «libres» que no están localizadas alrededor de ninguna molécula determinada. La densidad de carga microscópica puede escribirse en la forma:

$$\eta(x, t) = \sum_j q_j \, \delta[x - x_j(t)] \qquad [6.78]$$

siendo $x_j(t)$ la posición de la carga puntual q_j. Para distinguir las cargas ligadas de las libres, descomponemos

$$\eta = \eta_{\text{libre}} + \eta_{\text{ligada}} \qquad [6.79]$$

y escribimos:

$$\eta_{\text{libre}} = \sum_{j\,(\text{libre})} q_j \, \delta(x - x_j)$$

$$\eta_{\text{ligada}} = \sum_{n\,(\text{moléculas})} \eta_n(x, t)$$

siendo η_n la densidad de carga en la enésima molécula,

$$\eta_n(x, t) = \sum_{j\,(n)} q_j \, \delta(x - x_j) \qquad [6.80]$$

En estas ecuaciones y en las que les siguen suprimiremos la dependencia temporal explícita, puesto que el proceso de promediado se realiza en un instante dado de tiempo. Vamos a proceder a promediar la densidad de carga de la enésima molécula y después sumar las contribuciones de todas las moléculas. Resulta apropiado expresar las coordenadas de las cargas en la molécula enésima con respecto a un origen en reposo respecto a ella. Sea $x_n(t)$ la posición de tal punto fijo en la molécula (normalmente se escoge el centro de masas), y $x_{jn}(t)$ la posición de la carga j en la molécula enésima es:

$$\begin{aligned} \langle \eta_n(x, t) \rangle &= \int d^3x' \, f(x') \eta_n(x - x', t) \\ &= \sum_{j(n)} q_j \int d^3x' \, f(x') \, \delta(x - x' - x_{jn} - x_n) \\ &= \sum_{j(n)} q_j f(x - x_n - x_{jn}) \end{aligned} \qquad [6.81]$$

Como x_{jn} es del orden de las dimensiones atómicas, los términos de la suma tienen argumentos que difieren muy poco de $(x-x_n)$ en el intervalo en que $f(x)$ cambia de modo apreciable. Por consiguiente, podemos hacer un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $(x-x_n)$ en cada término. Esto conduce a:

$$\langle \eta_n(x,t)\rangle = \sum_{j(n)} q_j \left[f(x-x_n) - x_{jn}\nabla f(x-x_n) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}(x_{jn})_\alpha (x_{jn})_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} f(x-x_n) + \ldots \right]$$

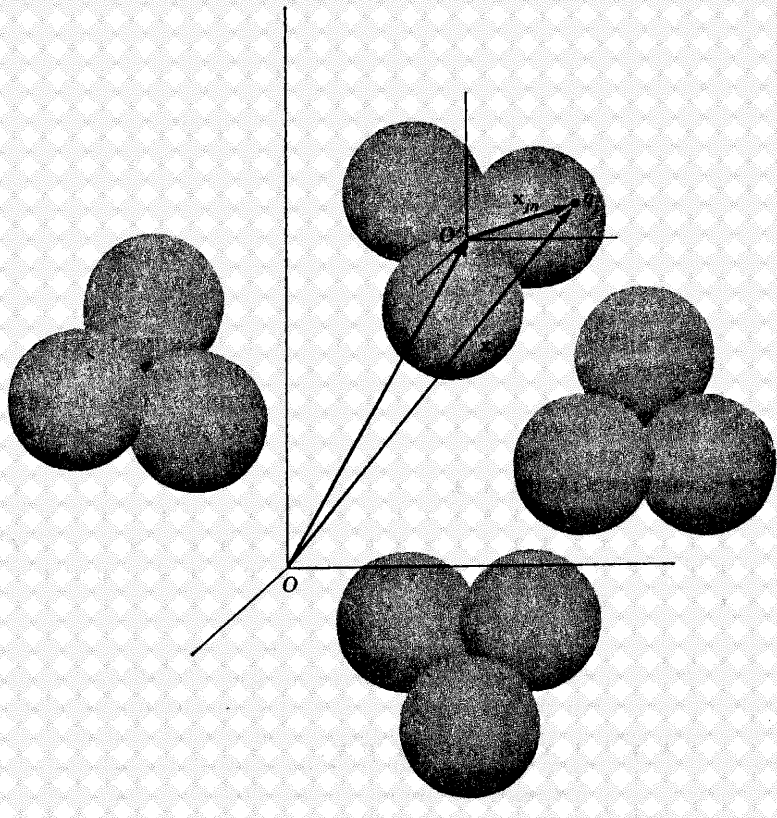


FIG. 6.5. Coordenadas de la n-ésima molécula. El origen O' está fijo en la molécula (usualmente se escoge en el centro de masas). La carga j-ésima tiene las coordenadas x_{jn} respecto a O', en tanto que la molécula está situada respecto a los ejes fijos (laboratorio) en la posición dada por las coordenadas x_n.

Las diferentes sumas sobre las cargas en la molécula son precisamente los *momentos multipolares moleculares*:

Carga molecular: $$q_n = \sum_{j(n)} q_j \qquad [6.82]$$

Momento dipolar molecular: $$p_n = \sum_{j(n)} q_j x_{jn} \qquad [6.83]$$

Momento cuadrupolar molecular:

$$(Q'_n)_{\alpha\beta} = 3 \sum_{j(n)} q_j (\boldsymbol{x}_{jn})_\alpha (\boldsymbol{x}_{jn})_\beta \qquad [6.84]$$

En función de estos momentos multipolares la densidad de carga media de la molécula enésima es:

$$\langle \eta_n(\boldsymbol{x}, t) \rangle = q_n f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) - \boldsymbol{p}_n \cdot \nabla f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) + \frac{1}{6} \sum_{\alpha\beta} (Q'_n)_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n)}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \ldots \qquad [6.85]$$

Si intentamos considerar esta ecuación como el resultado directo de la definición [6.73] de la media espacial, advertimos que el primer término puede interpretarse como la media de una densidad de carga puntual $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_n$, el segundo, como la divergencia de la media de una densidad dipolar puntual en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_n$, etc. Explícitamente:

$$\langle \eta_n(\boldsymbol{x}, t) \rangle = \langle q_n \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \rangle - \nabla \cdot \langle \boldsymbol{p}_n \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \rangle + \frac{1}{6} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} \langle (Q'_n)_{\alpha\beta} \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \rangle + \ldots \qquad [6.86]$$

Así, pues, encontramos que en lo que se refiere al resultado del proceso de promediado, *podemos considerar la molécula como una colección de multipolos puntuales* situados en un punto determinado de la misma. La distribución en detalle de la carga molecular es importante, como es natural, al nivel microscópico, pero queda reemplazada, en sus efectos para los fenómenos macroscópicos, por una suma de multipolos.

La densidad de carga microscópica total [6.79] consiste en las cargas libres y ligadas. Sumando para todas las moléculas (que pueden ser de diferentes especies) y combinando con las cargas libres, hallamos que la densidad de carga microscópica promediada es:

$$\langle \eta(\boldsymbol{x}, t) \rangle = \rho(\boldsymbol{x}, t) - \nabla \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} Q'_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}, t) + \ldots \qquad [6.87]$$

siendo ρ la *densidad de carga macroscópica*:

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \left\langle \sum_{j\,(\text{libre})} q_j \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j) + \sum_{\substack{n \\ (\text{moléculas})}} q_n \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \right\rangle \qquad [6.88]$$

$\boldsymbol{P}$ es la *polarización macroscópica*:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t) = \left\langle \sum_{\substack{n \\ (\text{moléculas})}} \boldsymbol{p}_n \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \right\rangle \qquad [6.89]$$

y $Q'_{\alpha\beta}$ es la *densidad cuadrupolar macroscópica*:

$$Q'_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{6} \left\langle \sum_{\substack{n \\ (\text{moléculas})}} (Q'_n)_{\alpha\beta} \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \right\rangle \qquad [6.90]$$

Cuando se lleva [6.87] a la primera de las ecuaciones [6.77], da:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\epsilon_0 E_\alpha + P_\alpha - \sum_{\beta} \frac{\partial Q'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \dots \right] = \rho \qquad [6.91]$$

Según [6.70], esto significa que el *vector desplazamiento macroscópico* $\boldsymbol{D}$ tiene, por definición, las componentes:

$$D_\alpha = \epsilon_0 E_\alpha + P_\alpha - \sum_{\beta} \frac{\partial Q'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \dots \qquad [6.92]$$

Los dos primeros términos constituyen el resultado familiar [6.71]. El tercero y los superiores están presentes en principio, pero resultan despreciables casi siempre.

Para completar la discusión debemos considerar $\langle \boldsymbol{j} \rangle$. La deducción es considerablemente más complicada que el tratamiento anterior para $\langle \eta \rangle$, a causa de su naturaleza vectorial y de la presencia de velocidades en la derivación, aun cuando no implica principios nuevos. Presentamos únicamente los resultados, dejando los detalles a un problema para aquellos lectores que disfrutan con tales desafíos. En primer lugar, la densidad de corriente microscópica es:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{j} q_j \boldsymbol{v}_j \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j(t)) \qquad [6.93]$$

siendo $\boldsymbol{v}_j = d\boldsymbol{x}_j/dt$ la velocidad de la carga j. De nuevo separamos la suma en dos, una extendida a las cargas libres y otra extendida a las moléculas. La densidad de corriente de la enésima molécula puede promediarse exactamente del mismo modo que en [6.81] para dar:

$$\langle \boldsymbol{j}_n(\boldsymbol{x}, t) \rangle = \sum_{j(n)} q_j (\boldsymbol{v}_{jn} + \boldsymbol{v}_n) f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{jn}) \qquad [6.94]$$

Aquí hemos supuesto, al escribir la velocidad de la carga j como la suma de una velocidad relativa interna $\boldsymbol{v}_{jn}$ y la velocidad $\boldsymbol{v}_n = d\boldsymbol{x}_n/dt$ del origen O' ligado a la molécula, que el movimiento no es relativista. A partir de este punto el razonamiento trae consigo desarrollos en serie de Taylor y manipulación de vectores. Una parte de la corriente contiene el *momento magnético molecular*:

$$\boldsymbol{m}_n = \sum_{j(n)} \frac{q_j}{2} (\boldsymbol{x}_{jn} \times \boldsymbol{v}_{jn}) \qquad [6.95]$$

El resultado final para la densidad de corriente microscópica *promediada* es:

$$\begin{aligned} \langle j_\alpha(\boldsymbol{x}, t) \rangle = {} & J_\alpha(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} [D_\alpha(\boldsymbol{x}, t) - \epsilon_0 E_\alpha(\boldsymbol{x}, t)] + \sum_{\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} M_\gamma(\boldsymbol{x}, t) \\ & + \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\langle \sum_{\substack{n \\ \text{(moléculas)}}} [(\boldsymbol{p}_n)_\alpha (\boldsymbol{v}_n)_\beta - (\boldsymbol{p}_n)_\beta (\boldsymbol{v}_n)_\alpha] \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \right\rangle \qquad [6.96] \\ & - \frac{1}{6} \sum_{\beta\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \left\langle \sum_{\substack{n \\ \text{(moléculas)}}} [(Q'_n)_{\alpha\beta} (\boldsymbol{v}_n)_\gamma - (Q'_n)_{\gamma\beta} (\boldsymbol{v}_n)_\alpha] \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \right\rangle + \dots \end{aligned}$$

Las magnitudes aún no definidas que aparecen en esta ecuación de aspecto formidable son: la *densidad de corriente macroscópica*:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)=\left\langle \sum_{j \text{ (libre)}} q_j \boldsymbol{v}_j\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)+\sum_{n \text{ (moléculas)}} q_n \boldsymbol{v}_n\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\right\rangle \qquad [6.97]$$

y la *imanación macroscópica*:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, t)=\left\langle \sum_{n \text{ (moléculas)}} \boldsymbol{m}_n\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\right\rangle \qquad [6.98]$$

Si las «cargas» libres poseen también momentos magnéticos intrínsecos, éstos pueden incluirse en la definición de $\boldsymbol{M}$ de un modo obvio. Los últimos términos de [6.96] contienen momentos eléctricos moleculares y velocidad moleculares y no puede dárseles una interpretación fácil, salvo en casos especiales (véase más adelante).

Cuando se introduce $\langle \boldsymbol{j} \rangle$ en la segunda ecuación de las [6.77] resulta la ecuación macroscópica de Maxwell-Ampère [6.70] con la magnitud campo magnético derivada $\boldsymbol{H}$ expresada en función de $\boldsymbol{B}$ y las propiedades del medio en la forma:

$$(\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{H})_\alpha=M_\alpha+\left\langle \sum_{n \text{ (moléculas)}} (\boldsymbol{p}_n \times \boldsymbol{v}_n)_\alpha\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\right\rangle$$
$$-\frac{1}{6}\sum_{\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\delta}\left\langle \sum_{n \text{ (moléculas)}} (Q'_n)_{\delta\beta} (\boldsymbol{v}_n)_\gamma\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\right\rangle+\ldots \qquad [6.99]$$

El primer término del segundo miembro de [6.99] es el resultado familiar [6.71]. Los otros términos son, en general, extremadamente pequeños; en primer lugar, porque las velocidades moleculares $\boldsymbol{v}_n$ son pequeñas (típicamente velocidades térmicas en un gas o velocidades de vibración de la red en un sólido) y, en segundo, porque las velocidades fluctúan, y macroscópicamente tienden a dar una media de cero. No ocurre así cuando el medio posee un movimiento de conjunto. Supongamos para simplificar que el medio como un todo tiene una velocidad de traslación $\boldsymbol{v}$. Despreciando cualquier otro movimiento de las moléculas, ponemos $\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{v}$ para cualquier n. Entonces, [6.99] se convierte después de una pequeña operación en:

$$(\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{H})=\boldsymbol{M}+(\boldsymbol{D}-\epsilon_0\boldsymbol{E})\times \boldsymbol{v} \qquad [6.100]$$

en la que $\boldsymbol{D}$ está dado por [6.92]. Esto demuestra que para un medio en movimiento la polarización eléctrica $\boldsymbol{P}$ (y la densidad cuadrupolar $Q_{\alpha\beta}$) contribuyen a la imanación efectiva. La ecuación [6.100] es el límite no relativista de una de las ecuaciones de la electrodinámica de los medios en movimiento de Minkowski (véase PAULI, pág. 105).

Para un tratamiento de las correcciones relativistas el lector puede consultar el libro de DE GROOT, así como para el estudio mecánico-estadístico del proceso de promediado. Desde el punto de vista de la lógica y la consistencia queda un cabo suelto. Al definir el momento cuadrupolar molecular $(Q'_n)_{\alpha\beta}$ por

medio de [6.84], nos hemos separado de nuestro convenio del capítulo 4, ecuación [4.9], dejando que $(Q'_n)_{\alpha\beta}$ tenga una traza no nula. Como en el capítulo 4 tuvimos como regla el relacionar las *cinco* componentes independientes del tensor momento cuadrupolar de traza nula con los $(2l+1)$ armónicos esféricos para $l=2$, necesitamos explicar por qué en las ecuaciones macroscópicas de Maxwell intervienen *seis* componentes. Si definimos un momento cuadrupolar de traza nula $(Q_n)_{\alpha\beta}$ por medio de [4.9], tendremos:

$$(Q'_n)_{\alpha\beta}=(Q_n)_{\alpha\beta}+\sum_{j(n)} q_j(x_{jn})^2\delta_{\alpha\beta} \qquad [6.101]$$

Introduciendo un radio de carga cuadrático medio r_n^2 de la distribución de carga molecular por medio de

$$er_n^2=\sum_{j(n)} q_j(x_{jn})^2$$

donde e es cierta unidad de carga conveniente, como, por ejemplo, la de un protón, podemos escribir [6.101] como:

$$(Q'_n)_{\alpha\beta}=(Q_n)_{\alpha\beta}+er_n^2\delta_{\alpha\beta}$$

Así, la densidad cuadrupolar macroscópica se convierte en:

$$Q'_{\alpha\beta}=Q_{\alpha\beta}+\frac{1}{6}\left\langle \sum_{\substack{n\\(\text{moléculas})}} er_n^2\delta_{\alpha\beta}\,\delta(x-x_n)\right\rangle$$

donde $Q_{\alpha\beta}$ está definido en función de $(Q_n)_{\alpha\beta}$ precisamente como en [6.90]. El resultado neto es que en la densidad de carga microscópica media [6.87] la densidad cuadrupolar sin traza $Q_{\alpha\beta}$ reemplaza a la densidad $Q'_{\alpha\beta}$ y la densidad de carga ρ aparece aumentada en un término adicional:

$$\rho\to\rho_{\text{libre}}+\left\langle \sum_{\substack{n\\(\text{moléculas})}} q_n\,\delta(x-x_n)\right\rangle+\frac{1}{6}\nabla^2\left\langle \sum_{\substack{n\\(\text{moléculas})}} er_n^2\,\delta(x-x_0)\right\rangle \qquad [6.102]$$

La traza del tensor $Q''_{\alpha\beta}$ se presenta con la densidad de carga por ser una contribución de tipo $l=0$ en el desarrollo multipolar. Los términos que contienen la carga molecular y el radio cuadrático medio representan conjuntamente los dos primeros términos de un desarrollo del multipolo molecular $l=0$ en cuanto nos salimos del límite estático. Al tomar transformadas de Fourier, en el espacio de números de onda corresponden a los dos primeros términos del desarrollo del factor de forma de la carga en potencias de k^2. Esto puede deducirse de la definición del factor de forma $F(k^2)$ para la densidad de carga $\rho(x)$:

$$\begin{aligned}F(k^2)&=\int d^3x\,\rho(x)\langle e^{ikx}\rangle_{l=0}\\&=\int d^3x\,\rho(x)\frac{\operatorname{sen} kr}{kr}\\&=\int\rho\,d^3x-\frac{1}{6}k^2\int r^2\rho\,d^3x+\dots\end{aligned}$$

Mediante la correspondencia $k \longleftrightarrow -i\nabla$, se establece la equivalencia general entre el desarrollo del factor de forma y [6.102].

En una interesante monografía, ROBINSON promueve una discusión sobre la relación entre las ecuaciones microscópicas y las ecuaciones macroscópicas semejante a la nuestra. El, sin embargo, realiza una distinción entre el procedimiento de promediado espacial [6.73] con la función de prueba $f(x)$, llamada por él «truncado» (del espectro en número de ondas), y el promedio mecánico-estadístico sobre varios tipos de conjuntos. ROBINSON mantiene que cada problema macroscópico tiene su propio límite inferior de longitudes relevantes y que esto determina el tamaño de la función de prueba a utilizar, antes de que se realice consideración alguna de promediado estadístico.

6.8. EL TEOREMA DE POYNTING Y LAS LEYES DE CONSERVACION DE LA ENERGIA Y EL IMPETU PARA UN SISTEMA DE PARTICULAS CARGADAS Y CAMPOS ELECTROMAGNETICOS

Resulta importante establecer la forma de las leyes de conservación de la energía y el ímpetu para el campo electromagnético. Empezaremos por considerar la conservación de la energía que recibe frecuentemente el nombre de *teorema de Poynting* (1884). Para una carga q, única, el trabajo efectuado en la unidad de tiempo por campos electromagnéticos externos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ es $q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}$, donde $\boldsymbol{v}$ es la velocidad de la carga. Por ser la fuerza magnética perpendicular a la velocidad, el campo magnético no realiza trabajo. Si tenemos una distribución continua de cargas y corrientes, el trabajo total que se ejerce por unidad de tiempo en un volumen finito V es:

$$\int_V \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\, d^3x \qquad [6.103]$$

Esta potencia representa conversión de energía electromagnética en mecánica o térmica. A esto deberá corresponder un decrecimiento de la energía del campo electromagnético en el interior del volumen V. Para enunciar de forma explícita esta ley de conservación utilizaremos las ecuaciones de Maxwell para expresar [6.103] en forma diferente. Eliminamos $\boldsymbol{J}$ mediante la ley de Ampère-Maxwell:

$$\int_V \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\, d^3x = \int_V \left[\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right] d^3x \qquad [6.104]$$

Y mediante la identidad vectorial:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})$$

y la ley de Faraday, podemos transformar el segundo miembro de [6.104] en:

$$\int_V \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\, d^3x = -\int_V \left[\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right] d^3x \qquad [6.105]$$

Para seguir adelante haremos dos suposiciones. Supondremos que el medio

macroscópico es lineal en sus propiedades eléctricas y magnéticas. Así las dos derivadas temporales en [6.105] pueden interpretarse, de acuerdo con las ecuaciones [4.89] y [6.16], como las derivadas temporales de las densidades de energía electrostática y magnética. Ahora haremos la segunda suposición, que consiste en suponer que la suma de [4.89] y [6.16] representa la energía electromagnética total, incluso para campos que varían con el tiempo. La densidad de energía total se representa por:

$$u = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) \qquad [6.106]$$

y entonces [6.105] puede expresarse:

$$-\int_V \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\, d^3x = \int_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\right] d^3x \qquad [6.107]$$

Por ser el volumen V arbitrario, tenemos la siguiente ecuación diferencial de continuidad, o la ley de conservación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} \qquad [6.108]$$

El vector $\boldsymbol{S}$ representa el flujo de energía y se llama *vector de Poynting*. Viene dado por:

$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \qquad [6.109]$$

y sus dimensiones son (energía/área × tiempo). Como en la ley de conservación solamente aparece su divergencia, el vector de Poynting es arbitrario en el sentido de que se le puede sumar el rotacional de un campo vectorial cualquiera. Tal término adicional no supone consecuencias de tipo físico y por ello se acostumbra hacer la elección particular [6.109].

El significado físico de las ecuaciones [6.107] o [6.108] es el siguiente: en la unidad de tiempo, la variación de energía electromagnética contenida en cierto volumen, más el flujo energético saliente a través de las superficies límite es igual al trabajo total cambiado de signo realizado por los campos sobre las fuentes interiores a dicho volumen. Es éste el enunciado de la conservación de la energía. Si se presentan efectos disipativos, tales como histéresis en los materiales ferromagnéticos, la simple ley [6.82] deja de ser válida; no obstante, puede completarse agregando términos que nos den las pérdidas de potencia por histéresis.

Hasta ahora, se ha considerado la energía asociada a los campos electromagnéticos. El trabajo $(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E})$ efectuado por los campos por unidad de tiempo y por unidad de volumen, es una conversión de energía electromagnética en mecánica o calorífica. Puesto que en último término la materia se compone de partículas cargadas (electrones y núcleos atómicos), consideraremos estas variaciones como aumento de la energía de las partículas cargadas por unidad de tiempo, y por unidad de volumen. Así, podremos interpretar el teorema de Poynting para los campos microscópicos como si estableciéramos la conservación de la energía en el sistema combinado de partículas y campos. Si designamos la energía total de las partículas interiores al volumen V mediante E_{mec} y supo-

nemos que ninguna partícula sale del mismo, tenemos:

$$\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} = \int_V \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\, d^3x \qquad [6.110]$$

El teorema de Poynting nos dice que la energía se conserva en el sistema combinado:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(E_{\text{mec}} + E_{\text{campo}}) = -\oint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\, da \qquad [6.111]$$

siendo la energía total del campo en V:

$$E_{\text{campo}} = \int_V u\, d^3x = \tfrac{1}{2}\int_V \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0}\right) d^3x \qquad [6.112]$$

Análogamente podemos considerar la conservación del ímpetu. La fuerza electromagnética total sobre la partícula es:

$$\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad [6.113]$$

Si llamamos $\boldsymbol{P}_{\text{mec}}$ a la suma de los ímpetus de todas las partículas existentes en el volumen V, podemos escribir, de acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$\frac{d\boldsymbol{P}_{\text{mec}}}{dt} = \int_V (\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\, d^3x \qquad [6.114]$$

expresión en la que hemos convertido la suma sobre las partículas en una integral de las densidades de cargas y corrientes por conveniencia para el cálculo. Igual que hicimos en el teorema de Poynting podemos utilizar las ecuaciones de Maxwell para eliminar ρ y $\boldsymbol{J}$ en [6.114]:

$$\rho = \epsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B}) - \epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad [6.115]$$

Cuando se sustituye [6.115] en [6.114] el integrando se convierte en:

$$\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} = \epsilon_0\left[\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{B}\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right] - (1/\mu_0)\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

Entonces, escribiendo:

$$\boldsymbol{B}\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{E}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

y sumando $(1/\mu_0)\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) = 0$ al segundo miembro, obtenemos:

$$\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} = \epsilon_0[\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})] + (1/\mu_0)[\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})] - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$$

La velocidad de variación del ímpetu mecánico [6.114] puede ahora escribirse:

$$\frac{d\boldsymbol{P}_{\text{mec}}}{dt}+\frac{d}{dt}\int_V \epsilon_0(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\,d^3x=$$

$$=\int_V\{\epsilon_0[\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})]+(1/\mu_0)[\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})]\}\,d^3x \qquad [6.116]$$

Podemos intentar identificar la integral de volumen del primer miembro como el ímpetu electromagnético total $\boldsymbol{P}_{\text{campo}}$ en el volumen V:

$$\boldsymbol{P}_{\text{campo}}=\epsilon_0\int_V(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\,d^3x \qquad [6.117]$$

El integrando puede ser interpretado como la densidad de ímpetu electromagnético. Observemos que es proporcional a la densidad de flujo energético $\boldsymbol{S}$, siendo c^{-2} la constante de proporcionalidad.

Para completar la identificación como ímpetu electromagnético de la integral de volumen

$$\boldsymbol{g}=\epsilon_0(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \qquad [6.118]$$

y establecer que [6.116] es la ley de conservación del ímpetu, debemos transformar la integral de volumen del segundo miembro en integral de superficie de la componente normal de algo que pueda interpretarse como el flujo del ímpetu. Llamemos x_α, $\alpha=1, 2, 3$ a las coordenadas cartesianas. La componente $\alpha=1$ de la parte eléctrica del integrando de [6.116] está dada explícitamente por:

$$[\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})]_1=E_1\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right)-E_2\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1}-\frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right)+E_3\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}(E_1^2)+\frac{\partial}{\partial x_2}(E_1E_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(E_1E_3)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(E_1^2+E_2^2+E_3^2)$$

Esto significa que la componente α podemos escribirla en la forma:

$$[\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})]_\alpha=\sum_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}(E_\alpha E_\beta-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\delta_{\alpha\beta}) \qquad [6.119]$$

cuyo segundo miembro está constituido por la divergencia de un tensor de segundo orden. Si definimos el *tensor de esfuerzos de Maxwell* T:

$$T_{\alpha\beta}=\epsilon_0E_\alpha E_\beta+\frac{1}{\mu_0}B_\alpha B_\beta-\frac{1}{2}\left[\epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+\left(\frac{1}{\mu_0}\right)\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\right]\delta_{\alpha\beta} \qquad [6.120]$$

la ecuación [6.116] puede escribirse en notación de componentes:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{P}_{\text{mec}}+\boldsymbol{P}_{\text{campo}})_\alpha=\sum_\beta\int_V\frac{\partial}{\partial x_\beta}T_{\alpha\beta}\,d^3x \qquad [6.121]$$

Al aplicar el teorema de la divergencia a la integral de volumen obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{P}_{\text{mec}}+\boldsymbol{P}_{\text{campo}})=\oint_S \sum_\beta T_{\alpha\beta}n_\beta\, da \qquad [6.122]$$

en la que $\boldsymbol{n}$ representa la normal exterior a la superficie S. Evidentemente, si [6.122] representa el enunciado de la conservación del ímpetu, $\sum_\beta T_{\alpha\beta}n_\beta$ es la componente α del flujo de ímpetu por unidad de área a través de la superficie S hacia el interior del volumen V. En otras palabras, es la fuerza por unidad de área transmitida a través de la superficie S que actúa sobre el sistema combinado de las partículas y campos existentes en V. La ecuación [6.122] puede utilizarse para calcular las fuerzas que se ejercen sobre objetos materiales en campos electromagnéticos, encerrando los objetos en una superficie S y obteniendo, mediante el segundo miembro de [6.122], la fuerza electromagnética total.

La conservación del momento cinético para el sistema combinado de partículas y campos puede tratarse del mismo modo que hemos manejado la energía y el ímpetu. Esto se deja como problema para el estudiante (véase el problema 6.11).

6.9. LAS LEYES DE CONSERVACION PARA LOS MEDIOS MACROSCOPICOS

En la sección anterior se dedujo el teorema de Poynting utilizando las ecuaciones macroscópicas de Maxwell, pero la conservación del ímpetu y el tensor de esfuerzos de Maxwell se discutieron sólo para las ecuaciones microscópicas. Debe ponerse sumo cuidado al definir la densidad de *energía electromagnética u*, el flujo de energía $\boldsymbol{S}$ y el tensor de esfuerzos $T_{\alpha\beta}$ para un medio material, debido a que resulta arbitrario en cierto modo lo que consideramos electromagnético y lo que consideramos mecánico. La cuestión ha preocupado a muchos autores durante años. En los trabajos de PAULI y DE GROOT pueden hallarse revisiones históricas. Nosotros nos contentaremos con unas pocas observaciones.

Si se realiza una aplicación directa de las ecuaciones *macroscópicas* de Maxwell a la conservación del ímpetu y de la energía se obtiene lo que se conoce generalmente como los resultados de Minkowski (1908), aun cuando algunos de ellos fueran propuestos por otros autores con anterioridad. Estos resultados son las expresiones [6.106] para u y [6.109] para $\boldsymbol{S}$, obtenidas antes, pero con la densidad de ímpetu y el tensor de esfuerzos dados por:

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} \qquad [6.123]$$

$$T_{\alpha\beta}=E_\alpha D_\beta+H_\alpha B_\beta-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\delta_{\alpha\beta} \qquad [6.124]$$

Se supone que el medio, en su respuesta, es lineal, pero no ótropo. Nótese que el tensor de esfuerzos no es simétrico para

los medios anisótropos. Esta falta de simetría ha molestado a muchos físicos. HERTZ y ABRAHAM se hallan entre los primeros que reemplazaron [6.124] por una forma simétrica. Las pruebas experimentales no son tan fáciles de realizar como podría creerse a primera vista. BREVIK * analiza las diferentes versiones de $T_{\alpha\beta}$ con detalle y llega a la conclusión de inclinarse por la forma asimétrica de Minkowski.

La expresión [6.123] de Minkowski para g se considera generalmente como inaceptable como densidad de ímpetu electromagnético. Todos los autores concuerdan en la definición:

$$g=\epsilon_0\mu_0(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\frac{\boldsymbol{S}}{c^2} \qquad [6.125]$$

Este resultado se obtiene mediante un tratamiento mecánico-estadístico del sistema formado por la materia y los campos en el que *se definen las magnitudes electromagnéticas como la diferencia entre las magnitudes para el sistema combinado y las correspondientes al sistema material a la misma temperatura de equilibrio T y densidad ρ, pero en ausencia de campos.* Con esta definición, las densidades de ímpetu y flujo de energía están dadas por [6.125] y [6.109], en tanto que, para un medio que sea lineal e isótropo con $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$, la parte electromagnética de la energía interna es **:

$$u=\frac{1}{2}\left\{E^2\left[\epsilon+T\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T}\right)_\rho\right]+H^2\left[\mu+T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_\rho\right]\right\} \qquad [6.126]$$

mientras que el tensor de esfuerzos electromagnético es:

$$T_{\alpha\beta}=\epsilon E_\alpha E_\beta+\mu H_\alpha H_\beta-\tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left[E^2\left(\epsilon-\rho\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)_T\right)+H^2\left(\mu-\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right)\right] \qquad [6.127]$$

Estas expresiones se reducen a las de Minkowski para u y $T_{\alpha\beta}$, solamente en la situación no física en que ϵ y μ sean independientes de la temperatura y de la densidad.

El tema de los balances de energía e ímpetu para la materia en campos electromagnéticos es evidentemente complicado. Remitimos al lector, para más cuestiones, a LANDAU y LIFSHITZ *(ob. cit.)* y también a STRATTON, en el capítulo 2.

* J. BREVIK, *Danske Videns. Sels. Mat.-fys. Medd.*, 37, núms. 11 y 13 (1970).

** Véase DE GROOT, en la sección 13, o LANDAU y LIFSHITZ, *Electrodinámica de los medios continuos*, secciones 10, 15, 30 y 34.

6.10. TEOREMA DE POYNTING PARA CAMPOS ARMONICOS, DEFINICION DE IMPEDANCIA Y ADMITANCIA EN FUNCION DE LOS CAMPOS *

En muchas aplicaciones se presentan conceptos propios de circuitos como son la resistencia o la reactancia de una red lineal de dos terminales, aun en casos en que el tamaño del sistema es comparable a la longitud de onda en el vacío, por ejemplo, para una antena resonante. Por consiguiente, resulta útil disponer de una definición general basada en los conceptos de campo. Esto se deduce de consideraciones sobre el teorema de Poynting cuando los campos varían en forma armónica. Supongamos que todos los campos y fuentes tienen una dependencia en el tiempo de la forma $e^{-i\omega t}$, de modo que podamos escribir:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{Re}\,[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}] \equiv \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} + \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{x})e^{i\omega t}] \qquad [6.128]$$

El campo $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ es, en general, complejo, con módulo y fase que cambian con la posición. Para las expresiones en forma de producto, tales como $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$, tenemos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) &= \tfrac{1}{4}\,[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} + \boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{x})e^{i\omega t}]\,[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} + \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{x})e^{i\omega t}] = \\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})e^{-2i\omega t}] \qquad [6.129]\end{aligned}$$

El convenio para el valor medio temporal de productos es, pues, tomar la mitad de la parte real del producto de una magnitud compleja por el complejo conjugado de la otra.

Para campos armónicos las ecuaciones de Maxwell se escriben:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \qquad & \nabla\times\boldsymbol{E} - i\omega\boldsymbol{B} &= 0 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho \qquad & \nabla\times\boldsymbol{H} + i\omega\boldsymbol{D} &= \boldsymbol{J}\end{aligned} \qquad [6.130]$$

en las que todas las magnitudes son funciones complejas de $\boldsymbol{x}$, de acuerdo con el segundo miembro de [6.128]. Consideremos, en lugar de [6.103], la integral de volumen

$$\tfrac{1}{2}\int_V \boldsymbol{J}^*\cdot\boldsymbol{E}\,d^3x$$

cuya parte real da la media temporal de la velocidad con que los campos realizan trabajo en el volumen V. En un razonamiento que sigue en forma estrictamente paralela las etapas entre [6.103] y [6.107], tenemos:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_V \boldsymbol{J}^*\cdot\boldsymbol{E}\,d^3x &= \tfrac{1}{2}\int_V \boldsymbol{E}\cdot[\nabla\times\boldsymbol{H}^* - i\omega\boldsymbol{D}^*]\,d^3x \\ &= \tfrac{1}{2}\int_V [-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*) - i\omega(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^* - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^*)]\,d^3x \qquad [6.131]\end{aligned}$$

* El tratamiento de esta sección sigue de modo paralelo el de FANO, CHU y ADLER (secciones 8.2 y 8.3). El lector puede encontrar en este libro una discusión considerablemente más extensa de la conexión entre los conceptos de circuitos concentrados y los de campos, ejemplos de capacidades parásitas en inductancias, etc. Véanse también los dos primeros capítulos de ADLER, CHU y FANO.

Ahora definimos el vector de Poynting complejo:

$$\boldsymbol{S}=\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^* \qquad [6.132]$$

y las densidades de energía eléctrica y magnética armónicas:

$$w_e=\tfrac{1}{4}\,(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*) \qquad w_m=\tfrac{1}{4}\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^*) \qquad [6.133]$$

Entonces, [6.131] puede escribirse:

$$\tfrac{1}{2}\int_V \boldsymbol{J}^*\cdot\boldsymbol{E}\,d^3x+2i\omega\int_V (w_e-w_m)\,d^3x+\oint_S \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\,da=0 \qquad [6.134]$$

Para campos armónicos, esta ecuación es la análoga de [6.107]. Es una ecuación compleja cuya parte real da la conservación de la energía para la media temporal de las magnitudes y cuya parte imaginaria está relacionada con la energía almacenada o reactiva y su flujo alternante. Si las densidades de energía w_e y w_m tienen integrales de volumen reales, como sucede para sistemas formados por conductores perfectos y dieléctricos sin pérdidas, la parte real de [6.134] es

$$\int_V \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{J}^*\cdot\boldsymbol{E})\,d^3x+\oint_S \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\,da=0$$

lo que demuestra que la media temporal en régimen estacionario de la velocidad con que los campos realizan trabajo sobre las fuentes contenidas en V es igual al flujo medio de potencia hacia *dentro* del volumen V a través de la superficie límite S, tal como se calcula a partir de la componente normal de $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{S}$. Esto es precisamente lo que se hubiera calculado a partir de la forma anterior [6.107] del teorema de Poynting de suponer que la densidad de energía u tiene una parte estacionaria y una parte que fluctúa armónicamente. Cuando existen pérdidas en los componentes del sistema, el segundo término de [6.134] tiene una parte real que da cuenta de esta disipación de energía.

El teorema de Poynting complejo [6.134] puede utilizarse para definir la impedancia de entrada de un sistema electromagnético cualquiera pasivo, lineal y con dos terminales. Imaginemos el sistema situado en el volumen V rodeado por una superficie S, de la que asoman únicamente los terminales de entrada, como se indica en la figura 6.6. Si la tensión y la corriente de entrada complejas son V_i e I_i, respectivamente, la potencia compleja a la entrada será $\frac{1}{2}I_i^*V_i$. Esta potencia puede escribirse en función del vector de Poynting utilizando [6.134], mediante su aplicación a todo el espacio *exterior a S*, en la forma:

$$\tfrac{1}{2}\,I_i^*V_i=-\oint_{S_i}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\,da \qquad [6.135]$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el unitario normal dirigido hacia el exterior, como se ve en la figura 6.6, y en la que hemos supuesto que el flujo de potencia a la entrada está confinado al área S_i (la sección transversal de la línea coaxial que aparece en la parte inferior de la figura 6.6). Considerando ahora [6.134] en el volumen V rodeado por la superficie cerrada S, el segundo miembro de [6.135] puede escribirse en función de integrales extendidas a los campos en el interior del

volumen V:

$$\tfrac{1}{2} I_i^* V_i = \tfrac{1}{2}\int_V \boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{E}\, d^3x + 2i\omega \int_V (w_e - w_m)\, d^3x + \oint_{S-S_i} \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\, da \qquad [6.136]$$

Aquí, la integral de superficie representa un flujo de potencia que sale del volumen V a través de la superficie S, descontada la zona de entrada S_i. Si se hace que la superficie $(S-S_i)$ se aleje hacia el infinito, la integral es real y representa la radiación que escapa (véase Cap. 9). Generalmente, a bajas frecuencias es despreciable. En tal caso no necesita hacerse distinción alguna entre S y S_i, resultando aplicable el diagrama de la parte superior de la figura 6.6.

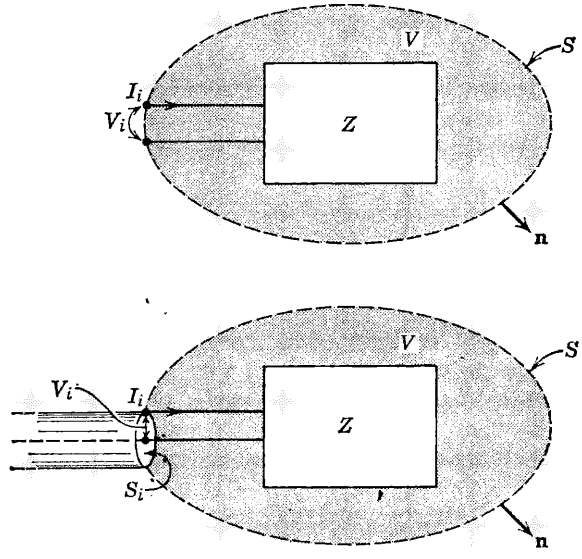


FIG. 6.6. Diagramas esquemáticos de sistemas electromagnéticos pasivos, lineales y de dos terminales. La superficie S rodea completamente el sistema; sólo salen los terminales de entrada. En estos terminales, la corriente y la tensión armónicas son, respectivamente, I_e y V_e, y la impedancia de entrada Z se define por medio de $V_e = ZI_e$. El diagrama superior se aplica a bajas frecuencias cuando son despreciables las pérdidas por radiación, mientras que el diagrama inferior, con su entrada mediante línea coaxial, permite tratar el concepto de resistencia de radiación.

Con la definición, $V_i = ZI_i$, se deduce de [6.136] la impedancia de entrada $Z = R - iX$ (¡por favor, los ingenieros eléctricos lean $Z = R + jX$!). Sus partes real e imaginaria son:

$$R = \frac{1}{|I_i|^2}\left\{ \mathrm{Re}\int_V \boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{E}\, d^3x + 2\oint_{S-S_i} \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\, da + 4\omega\, \mathrm{Im}\int_V (w_m - w_e)\, d^3x \right\} \qquad [6.137]$$

$$X = \frac{1}{|I_i|^2}\left\{ 4\omega\, \mathrm{Re}\int_V (w_m - w_e)\, d^3x - \mathrm{Im}\int_V \boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{E}\, d^3x \right\} \qquad [6.138]$$

Al escribir [6.137] y [6.138] hemos supuesto que el flujo de potencia saliente a través de S es real. De este modo, el segundo término de [6.137] es la «resistencia de radiación», de importancia a frecuencias elevadas. A bajas frecuencias, en sistemas en los cuales las pérdidas óhmicas son la única fuente apreciable de disipación de energía, estas expresiones se simplifican en la forma:

$$R \simeq \frac{1}{|I_i|^2} \int_V \sigma |\boldsymbol{E}|^2 \, d^3x \qquad [6.139]$$

$$X \simeq \frac{4\omega}{|I_i|^2} \int_V (w_m - w_e) \, d^3x \qquad [6.140]$$

En ellas σ es la conductividad real, y las densidades de energía w_m y w_e [6.133] son también reales en casi todo el volumen. Claramente la resistencia es el valor esperado al considerar las pérdidas óhmicas de calor en el circuito. Del mismo modo, la reactancia tiene una forma plausible: si domina la energía almacenada en forma magnética, como ocurre en una bobina con inductancia, la reactancia es positiva, etc. El hecho de que la reactancia para bajas frecuencias dependa con la frecuencia de forma diferente para las inductancias ($X = \omega L$) que para los condensadores ($X = -1/\omega C$), es debido a que, por una parte, la definición de L se hace en función de voltaje y corriente ($V = L \, dI/dt$), y, por otra, la de C se hace en función de carga y voltaje ($V = Q/C$). Se deja para los problemas del final del capítulo el tratamiento de algunos ejemplos sencillos, como la deducción de resultados equivalentes a las [6.139] y [6.140] para la conductancia y susceptancia de una admitancia compleja Y.

6.11. PROPIEDADES DE TRANSFORMACION DE LAS FUENTES Y LOS CAMPOS ELECTROMAGNETICOS EN LAS ROTACIONES, REFLEXIONES ESPACIALES Y LA INVERSION TEMPORAL

El hecho de que normalmente se da por supuesto que las magnitudes físicas relacionadas entre sí tienen propiedades de transformación compatibles en ciertos tipos de cambios de coordenadas hace que en ocasiones se pase por alto el significado de tales requisitos y las limitaciones que pueden imponerse por ello en la forma de las relaciones. Por consiguiente, resulta útil discutir, de manera explícita, las propiedades, relativamente obvias, de las magnitudes electromagnéticas en las rotaciones, las inversiones espaciales y la inversión temporal. Estas nociones tienen aplicación directa para limitar las relaciones constitutivas fenomenológicas, y se utilizarán en la sección próxima, donde se discutirá la cuestión de los monopolos magnéticos.

Se supone que el concepto de transformaciones de coordenadas espaciales y temporales, así como su relación con las leyes generales de conservación, son familiares al lector por la mecánica clásica (véase, por ejemplo, GOLDSTEIN). Aquí sólo se dará un resumen de los resultados principales.

Rotaciones

Una rotación en tres dimensiones es una transformación lineal de las coordenadas de un punto tal que la suma de cuadrados de las coordenadas permanece invariante. Una transformación de este tipo se llama ortogonal. Las coor-

denadas transformadas x'_α vienen dadas en función de las coordenadas originales x_β por:

$$x'_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta \qquad [6.141]$$

El requisito de que $(x')^2 = (x)^2$ impone la restricción de que los coeficientes reales de la transformación $a_{\alpha\beta}$ sean ortogonales:

$$\sum_\alpha a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \qquad [6.142]$$

La transformación inversa tiene $(a^{-1})_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ y el cuadrado del determinante de la matriz (a) es igual a la unidad. El valor $\det(a) = +1$ corresponde a una rotación propia, obtenible a partir de la configuración original mediante una secuencia de etapas infinitesimales, en tanto que $\det(a) = -1$ representa una rotación impropia, formada por una reflexión más una rotación.

Las magnitudes físicas se clasifican en tensores rotacionales de distintos órdenes dependiendo de cómo se transforman en las rotaciones. Las coordenadas $\boldsymbol{x}_i$, las velocidades $\boldsymbol{v}_i$, los ímpetus $\boldsymbol{p}_i$ tienen componentes que se transforman de acuerdo con la ley de transformación básica [6.141] y son tensores de primer orden, o *vectores*. Los productos escalares de vectores, como $\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2$ o $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2$, son invariantes en las rotaciones, y, por tanto, son tensores de orden cero, o *escalares*. Los grupos de cantidades que se transforman de acuerdo con

$$B'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} B_{\gamma\delta} \qquad [6.143]$$

se llaman tensores de segundo orden, o, más comúnmente, *tensores*. El tensor de esfuerzos de Maxwell es uno de estos grupos. Las transformaciones de los tensores de orden superior se deducen de modo obvio.

Al considerar los campos electromagnéticos y otras magnitudes físicas, tratamos con una o más funciones de las coordenadas y posiblemente de otras variables cinemáticas. Surge entonces la elección entre un punto de vista «activo» o «pasivo» de la rotación. Nosotros adoptamos el activo, los ejes de coordenadas se mantienen fijos y el sistema físico imaginamos que realiza una rotación. Así, por ejemplo, dos partículas cargadas con coordenadas iniciales $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ forman un sistema que en una transformación se transforma de modo que las coordenadas de las partículas son ahora $\boldsymbol{x}'_1$ y $\boldsymbol{x}'_2$, como se indica en la figura 6.7. Las componentes de cada vector posición se transforman de acuerdo con [6.141], pero el potencial electrostático permanece invariable, puesto que es función únicamente de la distancia entre los dos puntos, $R = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$, y R^2 es una suma de productos escalares de vectores y, por tanto, es invariante en la rotación. El potencial electrostático es un ejemplo de escalar en las rotaciones. En general, si una magnitud física ϕ, que es función de varias coordenadas designadas colectivamente por $\boldsymbol{x}_i$ (incluyendo posiblemente coordenadas generalizadas como velocidades e ímpetus), es tal que su valor permanece invariable cuando el sistema físico se hace girar desde $\boldsymbol{x}_i$ a $\boldsymbol{x}'_i$,

$$\phi'(\boldsymbol{x}'_i) = \phi(\boldsymbol{x}_i) \qquad [6.144]$$

entonces ϕ es una función escalar de las coordenadas. Análogamente, si un

conjunto de tres cantidades físicas $V_\alpha(x_i)$ ($\alpha=1, 2, 3$) se transforma en las rotaciones del sistema de acuerdo con

$$V'_\alpha(x'_i)=\sum_\beta a_{\alpha\beta}V_\beta(x_i) \qquad [6.145]$$

entonces V_α constituyen las componentes de un vector, y así sucesivamente para tensores de orden superior.

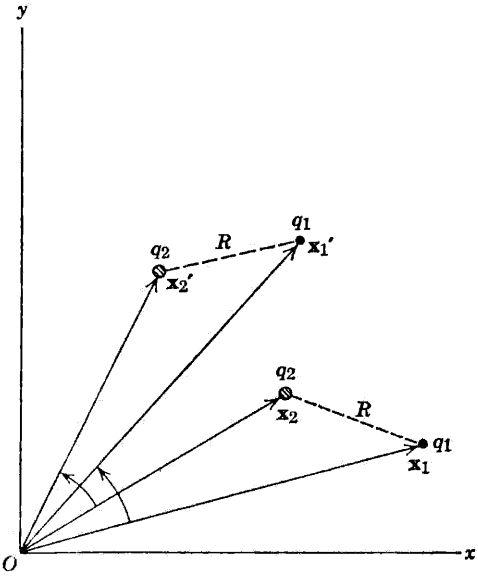


FIG. 6.7. Rotación activa de un sistema de dos cargas.

Los operadores diferenciales vectoriales tienen propiedades de transformación definidas en las rotaciones. Por ejemplo, el gradiente de un escalar, $\nabla\phi$, se transforma como un vector, la divergencia de un vector $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$, es un escalar, y el operador laplaciano ∇^2 es un operador escalar en el sentido de que su aplicación a una función, o conjunto de funciones, no altera sus propiedades de transformación rotacional.

Debe hacerse una mención especial del producto vectorial de dos vectores:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} \qquad [6.146]$$

Poniendo en notación de coordenadas esta forma vectorial abreviada:

$$A_\alpha=\sum_{\beta\gamma} e_{\alpha\beta\gamma}B_\beta C_\gamma$$

siendo $e_{\alpha\beta\gamma}=+1$ para $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$ y permutaciones cíclicas, $e_{\alpha\beta\gamma}=-1$ para otras permutaciones, y se anula cuando dos o más de los índices son iguales. Debido a la presencia de dos vectores en el segundo miembro, el producto vectorial tiene algunos atributos de un tensor antisimétrico de traza nula de

segundo orden. Como un tensor tal tiene sólo tres componentes independientes, lo tratamos como un vector. Naturalmente, esto está justificado únicamente en tanto que se transforme en las rotaciones de acuerdo con [6.141]. El hecho real es que la ley de transformación para el producto vectorial [6.146] es

$$A'_\alpha = \det(a) \sum_\alpha a_{\alpha\beta} A_\beta \qquad [6.147]$$

Para rotaciones propias, la única clase que hemos considerado es $\det(a) = +1$; de modo que [6.147] está de acuerdo con la transformación básica de coordenadas [6.141]. En las *rotaciones propias,* el producto vectorial se transforma como vector.

Reflexión e inversión espacial

La reflexión espacial en un plano corresponde a cambiar los signos de las componentes normales de los vectores posición de todos los puntos y dejar inalteradas las componentes paralelas al plano. Así, para una reflexión respecto al plano x-y, $x_i = (x_i, y_i, z_i) \rightarrow x'_i = (x_i, y_i, -z_i)$. La inversión espacial corresponde a la reflexión de las tres componentes de cualquier vector posición respecto al origen, $x_i \rightarrow x'_i = -x_i$. La reflexión o la inversión espacial es una operación discreta que, para más de dos dimensiones, no puede en general realizarse mediante rotaciones propias. Corresponde a $\det(a) = -1$, y para la operación de inversión directa está dada por [6.141] con $a_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$. Se deduce que los vectores cambian de signo en la inversión espacial, pero los productos vectoriales, que se comportan de acuerdo con [6.147], no lo hacen. Nos vemos, pues, forzados a distinguir dos clases de vectores (en las rotaciones generales):

Vectores polares (o simplemente vectores), que se transforman según [6.145] y, para $x_i \rightarrow x'_i = -x_i$, se comportan:

$$\boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}' = -\boldsymbol{V}$$

Vectores axiales o seudovectores, que se transforman según [6.147] y, para $x_i \rightarrow x'_i = -x_i$, se comportan:

$$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$$

Para los escalares deben hacerse distinciones semejantes en las rotaciones. Hablamos de *escalares* o *seudoescalares,* según que las magnitudes no cambien de signo o que lo hagan en la inversión espacial. El producto triple escalar $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ es un ejemplo de magnitud seudoescalar, supuesto que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ sean todos ellos vectores polares. (Descubrimos de paso en esto un aspecto peligroso de la notación habitual. Al escribir un vector como $\boldsymbol{a}$ no nos dice si es un vector polar o axial.) Las propiedades de transformación de los tensores de orden superior en la inversión espacial pueden deducirse directamente si se construyen tomando productos de componentes de vectores polares o axiales. Si un tensor de orden N se transforma en la inversión espacial con un factor $(-1)^N$, decimos que es un tensor verdadero, o simplemente *tensor,* mientras que si el factor es $(-1)^{N+1}$ decimos que es un *seudotensor* de orden N.

Inversión temporal

Las leyes básicas de la física son invariantes (al menos a nivel clásico) respecto al sentido del tiempo. Esto no significa que las ecuaciones sean pares en t, sino que, en la transformación inversión temporal $t \to t' = -t$, las magnitudes físicas relacionadas se transforman de manera consistente de modo que la *forma* de la ecuación es la misma que antes. Así, la ecuación de movimiento de Newton para una partícula de ímpetu $\boldsymbol{p}$ y posición $\boldsymbol{x}$ que está moviéndose en un potencial exterior $U(\boldsymbol{x})$:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\nabla U(\boldsymbol{x})$$

es invariante respecto a la inversión temporal supuesto que $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}' = -\boldsymbol{p}$. El cambio de signo para el ímpetu es, naturalmente, obvio de modo intuitivo por su relación con la velocidad, $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$. La consecuencia de la invariancia de las leyes de Newton en la inversión temporal es que, si un sistema de partículas evoluciona desde una cierta configuración inicial bajo la

TABLA 6.1. **Propiedades de transformación de diversas magnitudes físicas en las rotaciones, inversión espacial e inversión temporal** *

Magnitud física		*Rotación* (orden del tensor)	*Inversión espacial* (nombre)	*Inversión temporal*
I. *Mecánicas*				
Coordenadas	$\boldsymbol{x}$	1	Impar (vector)	Par
Velocidad	$\boldsymbol{v}$	1	Impar (vector)	Impar
Impetu	$\boldsymbol{p}$	1	Impar (vector)	Impar
Momento cinético	$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$	1	Par (seudovector)	Impar
Fuerza	$\boldsymbol{F}$	1	Impar (vector)	Par
Par de fuerzas	$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F}$	1	Par (seudovector)	Par
Energía cinética	$p^2/2m$	0	Par (escalar)	Par
Energía potencial	$U(\boldsymbol{x})$	0	Par (escalar)	Par
II. *Electromagnéticas*				
Densidad de carga	ρ	0	Par (escalar)	Par
Densidad de corriente	$\boldsymbol{J}$	1	Impar (vector)	Impar
Campo eléctrico	$\boldsymbol{E}$			
Polarización	$\boldsymbol{P}$	1	Impar (vector)	Par
Desplazamiento	$\boldsymbol{D}$			
Inducción magnética	$\boldsymbol{B}$			
Imanación	$\boldsymbol{M}$	1	Par (seudovector)	Impar
Campo magnético	$\boldsymbol{H}$			
Vector de Poynting	$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$	1	Impar (vector)	Impar
Tensor de esfuerzos de Maxwell	$T_{\alpha\beta}$	2	Par (tensor)	Par

* Para las magnitudes que son funciones de $\boldsymbol{x}$ y t, es necesario ser muy claro en lo que entiende por paridad e imparidad en las inversiones espacial y temporal. Por ejemplo, la inducción magnética es tal que en la inversión espacial, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \to \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}, t) = +\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{x}, t)$, en tanto que en la inversión temporal, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \to \boldsymbol{B}_T(\boldsymbol{x}, t) = -\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, -t)$.

acción de varias fuerzas hasta una configuración final, un posible estado de movimiento del sistema es que la configuración final con inversión temporal (todas las posiciones iguales, pero todas las velocidades invertidas) evolucionará a lo largo de una trayectoria inversa hasta la configuración inicial con inversión temporal.

Las propiedades de transformación de diferentes magnitudes mecánicas en las rotaciones, inversión espacial e inversión temporal se resumen en la primera parte de la tabla 6.1.

Magnitudes electromagnéticas

Precisamente igual que con las leyes de la mecánica es cierto (esto es, compatible con todos los hechos experimentales conocidos) que las formas de las ecuaciones que gobiernan el electromagnetismo son invariantes en las rotaciones, inversión espacial e inversión temporal. Esto implica que las diferentes magnitudes electromagnéticas tienen propiedades de transformación bien definidas en estas operaciones. Constituye un hecho experimental que la carga eléctrica es invariante en las transformaciones de Lorentz y Galileo y es un escalar en las rotaciones. Es natural, conveniente y permisible suponer que la carga es también un escalar en la inversión espacial y par en la temporal. El detalle consiste aquí en que las magnitudes medibles físicamente, como la fuerza, implican el producto de carga y campo. Así, las propiedades de transformación atribuidas a los campos como $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ dependen del convenio empleado para la carga.

Si la carga es un escalar verdadero en las tres transformaciones, la densidad de carga es también un *escalar verdadero.* Como el *campo eléctrico* es la fuerza por unidad de carga, vemos que $\boldsymbol{E}$ es un *vector polar, par en la inversión temporal.* Esto se deduce también de la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$, puesto que ambos miembros deben transformarse de la misma manera.

El primer término en la ecuación de Maxwell que expresa la ley de Faraday:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

se transforma en las rotaciones y en la inversión espacial como un seudovector, y es par en la inversión temporal. Para preservar la invariancia de forma es necesario, por consiguiente, que la *inducción magnética* $\boldsymbol{B}$ *sea un seudovector, impar en la inversión temporal.* El segundo miembro de la ecuación de Maxwell-Ampère:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

puede verse que se transforma como un vector polar, impar en la inversión temporal. Esto implica que la *densidad de corriente* $\boldsymbol{J}$ es un *vector polar impar en la inversión temporal,* como era de esperar según su definición en función de carga por velocidad.

Acabamos de ver que los campos y las fuentes microscópicas tienen propiedades de transformación bien definidas en las rotaciones, inversión espacial e inversión temporal. Puede verse de la deducción de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell, en la sección 6.7, y de las definiciones de $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M}$, etc., que $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$ se transforman todos de la misma manera, así como $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{H}$. Las

diferentes propiedades de transformación para las magnitudes electromagnéticas se han resumido en la segunda parte de la tabla 6.1.

Para ilustrar la utilidad de los argumentos sobre las propiedades de simetría indicadas en la tabla 6.1, consideremos la estructura fenomenológica de una relación constitutiva espacialmente local que especifique la polarización $\boldsymbol{P}$ para un medio isótropo lineal y no disipativo, en una inducción magnética externa, $\boldsymbol{B}_0$ uniforme y constante. Por hipótesis, la relación es de primer orden respecto al campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, pero nos interesa un desarrollo en serie de potencias de $\boldsymbol{B}_0$ que incluya hasta términos de segundo orden. Como $\boldsymbol{P}$ es un vector polar y par en la inversión temporal, los distintos términos que aparecen multiplicados por coeficientes escalares deben transformarse en la misma forma. Para el orden cero en $\boldsymbol{B}_0$, sólo nos queda el campo $\boldsymbol{E}$. Para los términos de primer orden en $\boldsymbol{B}_0$, caben las siguientes combinaciones que sean lineales en $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}_0;\qquad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}_0;\qquad \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\times\boldsymbol{B}_0,\ \ldots$$

Todas ellas son permisibles según las consideraciones de rotación e inversión espacial, pero sólo aquellas que contengan derivadas temporales de orden impar se transforman de modo apropiado en la inversión temporal. Para términos de segundo orden en $\boldsymbol{B}_0$ existen las posibilidades:

$$(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{E};\qquad (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{B}_0;\qquad (\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0)\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},\ \ldots$$

En este caso sólo los términos sin derivada temporal, o con derivada de orden par de $\boldsymbol{E}$ satisfacen todos los requisitos. La expresión más general, local espacialmente, para la polarización, que es correcta hasta el segundo orden en el campo magnético $\boldsymbol{B}_0$, es, pues:

$$\boldsymbol{P}=\chi_0\boldsymbol{E}+\chi_1\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}_0+\chi_2(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{E}+\chi_3(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{B}_0+\ldots \qquad [6.148]$$

en la que los χ_i son coeficientes reales, y pueden presentarse derivadas de orden superior de $\boldsymbol{E}$, que son impares para los términos lineales en $\boldsymbol{B}_0$ y son pares para el término de orden cero y de segundo orden en $\boldsymbol{B}_0$. A bajas frecuencias, la respuesta de casi todos los materiales tiene lugar a través de las fuerzas eléctricas. Esto significa que a frecuencia cero no debería existir dependencia alguna de $\boldsymbol{P}$ respecto a $\boldsymbol{B}_0$, y que una forma más realista es:

$$\boldsymbol{P}=\chi_0\boldsymbol{E}+\chi_1\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}_0+\chi_2'(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0)\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\chi_3'\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\cdot\boldsymbol{B}_0\right)\boldsymbol{B}_0 \qquad [6.149]$$

en la que se han incluido explícitamente sólo las derivadas temporales de menor orden para cada potencia de $\boldsymbol{B}_0$. Para frecuencias ópticas esta ecuación permite entender el comportamiento girotrópico de las ondas en un medio isótropo situado en un campo magnético constante *.

Otro ejemplo, el efecto Hall, se deja para los problemas. Tanto éste como los efectos termogalvanomagnéticos y la existencia de estructura magnética en los sólidos se discuten en la obra ya citada de LANDAU y LIFSHITZ.

* Véase LANDAU y LIFSHITZ, *Electrodinámica de los medios continuos*, pág. 334, problema 3, pág. 337.

6.12. SOBRE LA CUESTION DE LOS MONOPOLOS MAGNETICOS

En el momento presente (1975) no hay evidencia experimental de la existencia de cargas magnéticas o monopolos, pero principalmente a causa del primitivo y brillante argumento teórico de Dirac *, la búsqueda de los monopolos se renueva cada vez que se explora una nueva región de energías en la física de altas energías, o se disponga de una fuente nueva de materia, como en el caso de las rocas de la Luna. El argumento de Dirac, que más adelante se resume, es que la mera existencia de un monopolo magnético en el universo ofrecería la explicación de la naturaleza discreta de la carga eléctrica. Como la cuantización de la carga es uno de los misterios más profundos del mundo físico, la idea de Dirac resulta muy sugerente. La historia de las ideas teóricas y las investigaciones experimentales hasta 1968 se describen en el artículo de revisión de AMALDI **. Al final del capítulo se han incluido referencias a bibliografía más reciente.

Antes de examinar el argumento de Dirac hace falta hacer algunas consideraciones preliminares. Una cuestión que surge es la de si es posible decir que las partículas tengan tanto carga eléctrica como magnética. Supongamos que existen densidades de carga y corriente magnéticas, ρ_m y $\boldsymbol{J}_m$, además de las densidades eléctricas, ρ_e y $\boldsymbol{J}_e$. Entonces las ecuaciones de Maxwell serían:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_e & \nabla \times \boldsymbol{H} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}_e \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= \mu_0 \rho_m & -\nabla \times \boldsymbol{E} &= \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \mu_0 \boldsymbol{J}_m \end{aligned} \qquad [6.150]$$

Se supone que las densidades magnéticas satisfacen el mismo tipo de ecuación de continuidad que las densidades eléctricas. De estas ecuaciones se deduce que la existencia de cargas y corrientes magnéticas tendría alguna consecuencia electromagnética observable. Sin embargo, considérese la siguiente *transformación de dualidad*:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}' \cos \xi + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\, \boldsymbol{H}' \operatorname{sen} \xi, & \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{D}' \cos \xi + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, \boldsymbol{B}' \operatorname{sen} \xi \\ \boldsymbol{H} &= -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, \boldsymbol{E}' \operatorname{sen} \xi + \boldsymbol{H}' \cos \xi, & \boldsymbol{B} &= -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\, \boldsymbol{D}' \operatorname{sen} \xi + \boldsymbol{B}' \cos \xi \end{aligned} \qquad [6.151]$$

Para un ángulo ξ real, tal transformación deja invariantes las formas cuadráticas como $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$, $(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H})$, y las componentes del tensor de esfuerzos de Maxwell $T_{\alpha\beta}$. Si se transforman las fuentes de la manera análoga:

$$\begin{aligned} \rho_e &= \rho_e' \cos \xi + \rho_m'/c \operatorname{sen} \xi & \boldsymbol{J}_e &= \boldsymbol{J}_e' \cos \xi + \boldsymbol{J}_m'/c \operatorname{sen} \xi \\ \rho_m &= -c\rho_e \operatorname{sen} \xi + \rho_m' \cos \xi & \boldsymbol{J}_m &= -c\boldsymbol{J}_e' \operatorname{sen} \xi + \boldsymbol{J}_m' \cos \xi \end{aligned} \qquad [6.152]$$

---

* P. A. M. DIRAC, *Proc. Roy, Soc.*, **A133**, 60 (1931); *Phys. Rev.*, **74**, 817 (1948).

** E. AMALDI, «On the Dirac Magnetic Poles», en *Old and New Problems in Elementary Particles*, A. Puppi, ed. Academic Press, Nueva York (1968). Véanse también las revisiones más breves de P. G. M. SANDARS, *Contemporary Physics*, 7, 419 (1966) y R. H. CARRIGAN, *Nuovo Cimento*, **38**, 638 (1965).

es cuestión de operaciones algebraicas inmediatas el demostrar que las ecuaciones generalizadas de Maxwell [6.150] son invariantes, esto es, que las ecuaciones para los campos con primas ($\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$ y $\boldsymbol{H}'$) son las mismas que las [6.150], pero con las fuentes con prima correspondientes.

La invariancia de las ecuaciones de la electrodinámica en las transformaciones de dualidad demuestra que el hablar de una partícula que posee una carga eléctrica, pero no una carga magnética, es cuestión de convenio. La única cuestión con sentido es si *todas* las partículas tienen o no la misma relación entre la carga magnética y la eléctrica. Si ocurre así, entonces podemos hacer una transformación de dualidad escogiendo el ángulo para que tengamos $\rho_m=0$ y $\boldsymbol{J}_m=0$. Entonces tendremos las ecuaciones de Maxwell en la forma en que habitualmente las escribimos.

Si escogemos por convenio que las cargas eléctrica y magnética de un electrón sean, $q_e=-e$, $q_m=0$, se sabe que entonces para el protón $q_e=+e$ (siendo el límite de error actual $q_e(\text{electrón})+q_e(\text{protón})/e \sim 10^{-20}$) y $q_m < < 7{,}4\times 10^{-22}e$, para un nucleón.

Este límite tan extremadamente pequeño para la carga magnética del protón o del neutrón se deduce directamente del conocimiento de que el campo magnético medio en la superficie de la tierra no es mayor de 1 gauss. Con un grado de precisión muy grande, la conclusión es que las partículas de la materia ordinaria poseen sólo carga eléctrica, o, lo que es equivalente, tienen todas la misma relación entre la carga magnética y la eléctrica. Para otras partículas, inestables, la cuestión de la carga magnética permanece abierta, pero no existe evidencia positiva alguna.

Las propiedades de transformación de ρ_m y $\boldsymbol{J}_m$ en las rotaciones, la inversión espacial y la temporal resultan importantes. De acuerdo con el comportamiento conocido de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en la formulación habitual deducimos para la segunda línea de las ecuaciones [6.150] que:

ρ_m es una densidad seudoescalar, impar en la inversión temporal, y *$\boldsymbol{J}_m$ es una densidad seudovector, par en la inversión temporal.*

Como las simetrías de ρ_m en ambas inversiones espacial y temporal son opuestas a las de ρ_e, es una consecuencia necesaria de la existencia de una partícula con ambas cargas eléctrica y magnética que la inversión espacial y la temporal dejen de ser simetrías válidas de las leyes de la física. Naturalmente, es un hecho que estos principios de simetría no son exactamente válidos en el campo de la física de partículas elementales, pero la evidencia actual indica que su violación es extremadamente pequeña y está asociada de algún modo con las interacciones débiles. Desarrollos futuros pueden enlazar las interacciones electromagnética, débil y posiblemente fuerte y utilizar las partículas que lleven carga magnética como el vehículo para la violación de las simetrías de inversión espacial y temporal. No existiendo evidencia alguna de los monopolos, todo esto constituye una especulación.

A pesar de la evidencia negativa sobre la existencia de monopolos magnéticos, volvamos a la ingeniosa propuesta de Dirac. Al considerar la mecánica cuántica de un electrón en presencia de un monopolo magnético, demostró que se requería, en aras de la consistencia, la condición de cuantización:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ge}{\hbar}=\frac{n}{2}, \qquad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad [6.153]$$

siendo e la carga electrónica, $\hbar$ la constante de Planck dividida por 2π, y g la

carga magnética del monopolo. La naturaleza discreta de la carga eléctrica se deduce así de la existencia del monopolo. La magnitud de e no está determinada, excepto en función de la carga magnética g. Es posible invertir el argumento. A partir del valor conocido de la constante de estructura fina $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137$, deducimos la existencia de monopolos magnéticos con cargas g cuya constante de *«estructura fina» magnética* es:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g^2}{\hbar c} = \frac{n^2}{4}\left(4\pi\epsilon_0\frac{\hbar c}{e^2}\right) \simeq \frac{137}{4}n^2$$

Tales monopolos se conocen con el nombre de *monopolos de Dirac*. La intensidad de su acoplamiento es enorme, de modo que, en principio, sería muy sencillo extraerlos de la materia con campos magnéticos estáticos y a continuación detectarlos. Por ejemplo, la pérdida de energía de un monopolo de Dirac relativista en la materia es aproximadamente la misma que la de un núcleo pesado relativista de $Z = 137n/2$. Presumiblemente, podría distinguirse de tal núcleo porque si llegara a quedar en reposo no mostraría un aumento de ionización al final de su recorrido (véase problema 13.8).

6.13. DISCUSION SOBRE LA CONDICION DE CUANTIZACION DE DIRAC

Algunas consideraciones semiclásicas pueden aclarar la condición de cuantización de Dirac [6.153]. En primer lugar, consideremos la desviación, cuando el parámetro de impacto sea grande, que sufre una partícula de carga e y masa m en el campo de un monopolo magnético estacionario de carga magnética g. El cambio en el estado de movimiento de la partícula cargada puede determinarse, si el parámetro de impacto es suficientemente grande, calculando el impulso de la fuerza como si la partícula no se desviara. En la figura 6.8 se indica la geometría del problema; la partícula incide paralelamente al eje z con un parámetro de impacto b y una velocidad v y está sometida al campo magnético del monopolo dirigido radialmente, $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} g\boldsymbol{r}/r^3$, de acuerdo con la fuerza de Lorentz [6.113]. Dentro de la aproximación de suponer que la partícula no se desvía, la única fuerza que actúa durante la colisión tiene la dirección y:

$$F_y = evB_x = \frac{\mu_0 eg}{4\pi}\frac{vb}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}} \qquad [6.154]$$

El impulso comunicado por esta fuerza es:

$$\Delta p_y = \frac{\mu_0 egvb}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2eg}{b} \qquad [6.155]$$

Como el impulso tiene la dirección y, la partícula se desvía, saliendo del plano de la figura 6.8, esto es, en la dirección acimutal. Evidentemente, el momento cinético de la partícula resulta modificado por la colisión, un resultado que no resulta sorprendente dado el carácter no central de la fuerza. Sin embargo, la

magnitud de este cambio en el momento cinético sí que es algo sorprendente. Inicialmente no hay componente z de $\boldsymbol{L}$, y al final sí que la hay. El cambio en L_z es:

$$\Delta L_z = b\Delta p_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2eg = n\hbar \qquad [6.156]$$

El cambio en la componente z del momento cinético de la partícula es independiente del parámetro de impacto b y de la velocidad v de la partícula cargada. Depende únicamente del producto eg, y tiene un valor universal para una par-

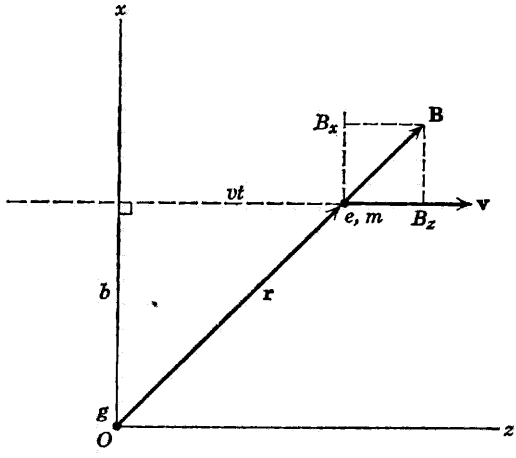


FIG. 6.8. Partícula cargada pasando junto a un monopolo con parámetro de impacto grande.

tícula cargada que pase frente a un monopolo estacionario, no importa a qué distancia. Si suponemos que cualquier cambio en el momento cinético debe tener lugar en múltiplos enteros de $\hbar$, nos vemos conducidos inmediatamente a la condición de cuantización de Dirac [6.153] *.

El carácter extrañamente universal del cambio en el momento cinético de una partícula cargada al pasar frente a un monopolo magnético [6.156] puede interpretarse al considerar el momento cinético contenido en los campos de una carga eléctrica puntual en presencia de un monopolo magnético puntual. Si el monopolo g se encuentra en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}_m$ y la carga e está en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}_e$, los campos magnético y eléctrico en todo el espacio son:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} g \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_m}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_m|^3}; \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_e}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_e|^3} \qquad [6.157]$$

El momento cinético $\boldsymbol{L}_{em}$ está dado por la integral de volumen de $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{g}$, siendo $\boldsymbol{g}$ la densidad de ímpetu electromagnético [6.118]. Así:

$$\boldsymbol{L}_{em} = \epsilon_0 \int \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})\, d^3x \qquad [6.158]$$

* Este razonamiento es debido esencialmente a A. S. GOLDHABER, *Phys. Rev.*, **140**, B1407 (1965).

Es plausible físicamente y verificable matemáticamente que el ímpetu total de los campos (integral de volumen de g) se anule. Esto significa que $\boldsymbol{L}_{em}$ es independiente de la elección del origen. Entonces resulta conveniente escoger los ejes de coordenadas de modo que las cargas magnética y eléctrica estén situadas simétricamente respecto al origen y sobre el eje z, tal como se ha dibujado en

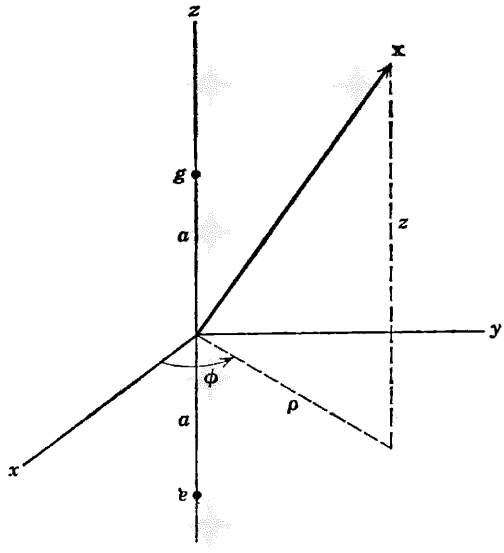


FIG. 6.9.

la figura 6.9. Tomando coordenadas cilíndricas para la integración, el momento cinético viene dado explícitamente por:

$$\boldsymbol{L}_{em}=\frac{\mu_0 ega}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{\infty}\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\phi\,\frac{[\rho^2\boldsymbol{e}_3-\rho z\,(\cos\phi\boldsymbol{e}_1+\operatorname{sen}\phi\boldsymbol{e}_2)]}{[(\rho^2+z^2+a^2]^2-4a^2z^2]^{3/2}}$$

siendo $2a$ la separación entre las cargas. Después de realizar la integración acimutal, las componentes x e y se anulan, quedando:

$$\boldsymbol{L}_{em}=\boldsymbol{e}_3\frac{\mu_0}{4\pi}ega\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{\infty}\frac{\rho^3\,d\rho}{[(\rho^2+z^2+a^2)^2-4a^2z^2]^{3/2}}$$

Esto se convierte, introduciendo las variables sin dimensiones $s=\rho/a$ y $t=z/a$, en:

$$\boldsymbol{L}_{em}=\left(\frac{\mu_0 eg}{4\pi}\right)\boldsymbol{e}_3\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_0^{\infty}\frac{s^3\,ds}{[s^2+t^2+1)^2-4t^2]^{3/2}}$$

Por consiguiente, el momento cinético electromagnético es independiente de la distancia que separa las cargas magnética y eléctrica. Su valor es un número puro multiplicado por $\mu_0 eg/4\pi$. La integral doble puede calcularse de modo

directo y su valor es la unidad. El momento cinético del campo es, pues *:

$$\boldsymbol{L}_{em}=\frac{\mu_0 eg}{4\pi}\,\boldsymbol{e}_3 \qquad [6.159]$$

Está dirigido a lo largo de la línea desde la carga eléctrica a la magnética y tiene un valor igual al producto de las cargas (en el sistema de unidades MKSA) por la constante $\mu_0/4\pi$.

Si consideramos el proceso de colisión de la figura 6.8 y el momento cinético total del sistema, esto es, la suma del correspondiente a la partícula y el correspondiente al campo, vemos que el momento cinético total se conserva. El cambio [6.156] en el momento cinético de la partícula está compensado justamente por el cambio en el momento cinético electromagnético [6.159] debido a la inversión en el sentido de $\boldsymbol{e}_3$. GOLDHABER (*ob. cit.*) proporciona una discusión sistemática del problema de dispersión mecanocuántico, incluyendo el momento cinético electromagnético.

El resultado de THOMSON [6.159] fue utilizado por SAHA **, e independientemente por WILSON ***, para deducir la condición de Dirac [6.153] por medios semiclásicos. Con el fin de obtener $n/2$ *en lugar de* n cuando se considera únicamente el momento cinético del campo, es necesario postular que la cuantización para $\boldsymbol{L}_{em}$ es semientera, hipótesis que resulta algo indeseable para el campo electromagnético.

Finalmente, presentamos una discusión simplificada del argumento original de Dirac (1931) que condujo a [6.153]. Al discutir la mecánica cuántica de un electrón en presencia de un monopolo magnético es deseable cambiar lo menos posible el formalismo de las interacciones electromagnéticas y, por ejemplo, conservar el hamiltoniano de interacción en la forma habitual:

$$H_{\text{int}}=e\Phi-\frac{e}{m}\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$$

siendo Φ y $\boldsymbol{A}$ los potenciales escalar y vector de las fuentes externas. Para conseguir esto con una carga magnética es necesario recurrir a un artificio. Se imagina que la carga magnética es el extremo de una línea de dipolos o de un solenoide de hilo muy fino que se extiende hasta el infinito, como se muestra en la figura 6.10. El monopolo, junto con su cuerda, como se denomina la línea de dipolos o solenoide, pueden tratarse más o menos en forma normal dentro del marco de las interacciones electromagnéticas ordinarias en que $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$, etc. Vemos, de [5.55], que el potencial vector elemental $d\boldsymbol{A}$ de un dipolo magnético elemental $d\boldsymbol{m}$ situado en $\boldsymbol{x}'$ es:

$$d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=-d\boldsymbol{m}\times\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) \qquad [6.160]$$

Así, para la cuerda de dipolos o solenoide cuya posición es la línea L el vec-

* Este resultado fue establecido por primera vez por J. J. THOMSON, *Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, Cambridge University Press, sección 284 de la edición tercera (1904) y siguientes. El argumento de la sección 284 es exactamente el inverso del nuestro. De la conservación del momento cinético THOMSON deduce la parte magnética $e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})/c$ de la fuerza de Lorentz.

** M. N. SAHA, *Ind. J. Phys.*, **10**, 141 (1936); *Phys. Rev.*, **75**, 1968 (1949).

*** H. H. WILSON, *Phys. Rev.*, **75**, 309 (1949).

tor potencial es:

$$\boldsymbol{A}_L(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mu_0 g}{4\pi}\int_L d\boldsymbol{l}\times\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) \qquad [6.161]$$

Este potencial vector tiene un rotacional que para todos los puntos, excepto los situados sobre la propia cuerda, varía inversamente proporcional a la distancia y da al integrar un flujo saliente $4\pi g$, como es de esperar para el cam-

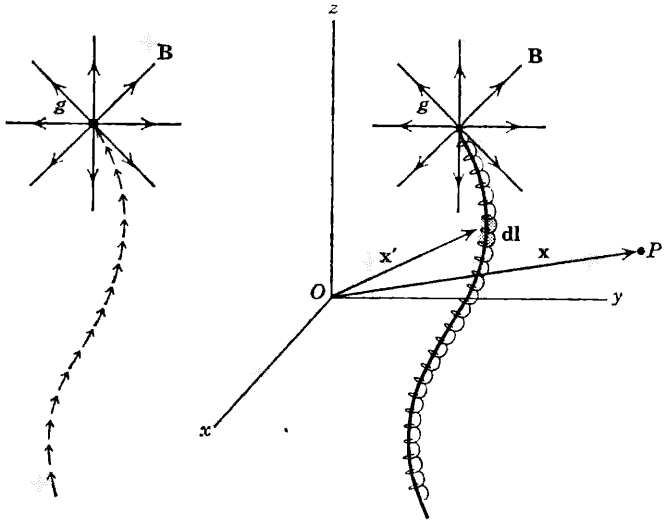


FIG. 6.10. Dos representaciones de un monopolo magnético g, una como terminación de una línea de dipolos y la otra como el extremo de un solenoide delgado, ambas «cuerdas» se alejan hasta el infinito.

po $\boldsymbol{B}$ de un monopolo g. Sobre la cuerda misma el potencial vector es singular. Este comportamiento singular es equivalente a un campo intenso $\boldsymbol{B}'$ *interior* al solenoide que proporciona una contribución de retorno al flujo $(-4\pi g)$ entrante a lo largo de la línea de modo que cancele el flujo saliente del monopolo. En todo lo anterior hemos descrito precisamente un solenoide delgado y largo. Para expresar el campo del monopolo solo escribimos:

$$\boldsymbol{B}_{\text{monopolo}} = \nabla\times\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}'$$

siendo $\boldsymbol{B}'$ el campo que existe sólo sobre la cuerda (interior del solenoide). A continuación, DIRAC razonaba que con objeto de describir la interacción del electrón con un monopolo magnético, en vez de con un solenoide largo y delgado, es imperativo que el electrón nunca «vea» el campo singular $\boldsymbol{B}'$. Así, impuso que la función de ondas del electrón se anule sobre la cuerda. Este postulado arbitrario ha sido criticado, pero la discusión de tales aspectos nos llevaría demasiado lejos y no es una cuestión clave para nuestros propósitos limitados. Un trabajo posterior de DIRAC (1948) trata con detalle la cuestión de la inobservabilidad de las cuerdas.

Si se acepta que $\boldsymbol{A}_L(\boldsymbol{x})$ de [6.161] es el potencial vector apropiado para el monopolo y su cuerda L, queda el problema de la arbitrariedad en la ubica-

ción de ésta. Claramente, los observables físicos no deberían depender de donde esté la cuerda. Vamos a demostrar a continuación que la elección de posiciones diferentes para la cuerda es equivalente a realizar elecciones distintas de contraste para el potencial vector. Es más, los requisitos de que la ecuación de Schrodinger sea invariante en las transformaciones de contraste y que la función de ondas sea unívoca conducen a la condición de cuantización de Dirac [6.153]. Considérense, como se indica en la figura 6.11, dos cuerdas

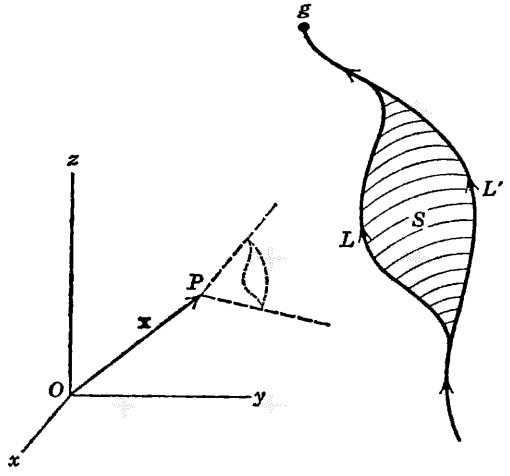


FIG. 6.11. Dos cuerdas diferentes L y L' dan potenciales vector del monopolo que difieren en una transformación de contraste que implica el gradiente del ángulo sólido $\Omega_C(x)$ con que se ve la superficie S que se apoya en el contorno $C=L'-L$, desde el punto de observación P.

diferentes L y L'. La diferencia entre los dos potenciales vector viene dada por [6.161] si se toma la integral a lo largo de la trayectoria cerrada $C=L'-L$ que rodea el área S. Según el problema 5.1 (pág. 210), puede escribirse:

$$A_{L'}(x)=A_L(x)+\frac{\mu_0 g}{4\pi}\nabla\Omega_C(x) \qquad [6.162]$$

siendo Ω_C el ángulo sólido con que se ve el contorno C desde el punto de observación x. Comparando este resultado con las ecuaciones de las transformaciones de contraste, $A \rightarrow A'=A+\nabla\chi$, $\Phi \rightarrow \Phi'-(\partial\chi/\partial t)$, se advierte que el cambio de cuerda desde L a L' es equivalente a una transformación de contraste en la que $\chi=\mu_0 g\Omega_C/4\pi$.

En mecánica cuántica es bien conocido * que un cambio en el contraste para los potenciales electromagnéticos deja invariante la forma de la ecuación de Schrodinger, supuesto que la función de ondas se transforma de acuerdo con

$$\psi \rightarrow \psi'=\psi e^{ie\chi/\hbar}$$

en la que e es la carga de la partícula y χ es la función de contraste. Por tanto,

* La demostración es muy sencilla. Véase, por ejemplo, M. A. KRAMERS, *Quantum Mechanics*, North-Holland, Amsterdam (1957), reimpresión, Dover (1964), sección 62.

un cambio en la posición de la cuerda de L a L' debe ser acompañado por una modificación en la fase de la función de ondas del electrón:

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i\left(\frac{\mu_0 eg}{4\pi \hbar}\right)\Omega_C} \qquad [6.163]$$

Como Ω_C cambia bruscamente en 4π cuando el electrón cruza la superficie S, la función de ondas será multivaluada a menos que se imponga:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{eg}{\hbar} \cdot 4\pi = 2\pi n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2$$

Esta es la condición de cuantización de Dirac [6.153]; se deduce de los requisitos generales de invariancia en las transformaciones de contraste y unicidad de la función de ondas, independientemente de la ubicación de la cuerda del monopolo.

La discusión anterior sobre los monopolos magnéticos presenta únicamente los conceptos más básicos. Existe una abundante bibliografía sobre los intentos de construir una electrodinámica cuántica con monopolos magnéticos y cargas eléctricas, y otros aspectos. El lector interesado puede obtener más datos sobre el tema a través del artículo de AMALDI (ob. cit.) y las referencias al final del capítulo.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

La ley de inducción de Faraday exige algún cuidado para aplicarla a circuitos tales como el disco de Faraday y los generadores homopolares. Hay numerosos tratamientos de estas cuestiones. Un muestreo en las páginas de una revista nos da, por ejemplo:

W. V. HOUSTON, *Am. J. Phys.*, **7**, 373 (1939).
D. R. CORSON, *Am. J. Phys.*, **24**, 126 (1956).
D. L. WEBSTER, *Am. J. Phys.*, **31**, 590 (1963).
E. M. PUGH, *Am. J. Phys.*, **32**, 879 (1964).

Las leyes de conservación de la energía y el ímpetu de los campos electromagnéticos se discuten en casi todos los libros de texto. Un buen tratamiento de la energía de corrientes casi estacionarias y fuerzas sobre circuitos portadores de corriente, diferente del nuestro, viene dado por:

PANOFSKY y PHILLIPS, cap. 10.
STRATTON, cap. 2.

LANDAU y LIFSHITZ, *Electrodinámica de los medios continuos*, secciones 15, 16 y 34, discuten el tensor de esfuerzos de Maxwell con cierto detalle considerando las fuerzas en fluidos y solidos. Los aspectos generales de las leyes de conservación, así como la teoría de circuitos casi estacionarios, cálculos de inductancias y fuerzas, son expuestos de forma brillante por:

ABRAHAM y BECKER, tomo I, caps. 8 y 9.

y en muchos textos de ingeniería.

El asunto aquí no tratado de corrientes turbillonarias y el calentamiento por inducción es discutido con muchos ejemplos por:

SMYTHE, cap. XX.

La relación entre los conceptos de la teoría de circuitos y la descripción haciendo uso de los campos la dan, como ya se ha mencionado:

ADLER, CHU y FANO.
FANO, CHU y ADLER.

La descripción de las cavidades resonantes como elementos de circuitos aparece en el trabajo clásico de

W. W. HANSEN, *J. Appl. Phys.*, **9**, 654 (1938).

Una discusión incitante sobre la deducción de las ecuaciones macroscópicas del electromagnetismo, así como de la termodinámica de los sistemas eléctricos y magnéticos, es la dada por:

ROBINSON.

La deducción de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell desde un punto de vista mecánico-estadístico ha sido durante mucho tiempo tema de investigación de una escuela de físicos holandeses. Sus conclusiones están recogidas en los libros de

DE GROOT.
DE GROOT y SUTTORP.

Un tratamiento de la energía, el ímpetu y el tensor de esfuerzos de Maxwell para los campos electromagnéticos que presenta alguna variante respecto al de Brevik (ob. cit.) es el dado por:

PENFIELD y HAUS.

Para el lector que desee explorar el tratamiento mecanocuántico detallado de la constante dieléctrica y las ecuaciones macroscópicas en la materia, se sugieren los artículos de

S. L. ADLER, *Phys. Rev.*, **126**, 413 (1962).
B. D. JOSEPHSON, *Phys. Rev.*, **152**, 21 (1966).
G. D. MAHAN, *Phys. Rev.*, **153**, 983 (1967).

Las propiedades de simetría de los campos electromagnéticos en la reflexión y la rotación se discuten en los trabajos de

ARGENCE y KAHAN.

El tema de los monopolos magnéticos tiene una bibliografía extensa. Ya hemos citado la revisión de AMALDI, y los trabajos de CARRIGAN y GOLDHABER, así como los artículos fundamentales de DIRAC. La importancia de los monopolos para la física de partículas es discutida por

J. SCHWINGER, *Science*, **165**, 757 (1969).

Describen algunas búsquedas experimentales:

HART y otros, *Phys. Rev.*, **184**, 1393 (1969).
FLEISCHER, PRICE y WOODS, *Phys. Rev.*, **184**, 1398 (1969).
ALVAREZ y otros, *Science*, **167**, 701 (1970).

Los aspectos matemáticos de este capítulo están centrados sobre la ecuación de ondas. El problema de valores iniciales en una, dos, tres y más dimensiones es discutido por:

MORSE y FESHBACH, págs. 843-847.

con mayor detalle matemático, por:

HADAMARD.

6.1. *a)* Demuéstrese que para un sistema de elementos de corriente en el vacío, la energía total debida al campo magnético es

$$W=\frac{\mu_0}{8\pi}\int d^3x\int d^3x'\,\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

en donde $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ es la densidad de corriente.

b) Si la configuración de corrientes consiste en n circuitos recorridos por corrientes $I_1, I_2, \ldots, I_n$, demuéstrese que la energía puede expresarse mediante:

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}L_iI_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n}M_{ij}I_iI_j$$

Preséntense expresiones integrales para las autoinducciones (L_i) y las inductancias mutuas (M_{ij}).

6.2. Una línea de transmisión de dos conductores consiste en un par de alambres no permeables, paralelos, de radios a y b, separados por una distancia $d>a+b$. La corriente fluye por uno y vuelve por el otro, y está uniformemente distribuida sobre la sección transversal de cada alambre. Demuéstrese que la autoinducción por unidad de longitud es

$$L=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[1+2\ln\left(\frac{d^2}{ab}\right)\right]$$

6.3. Un circuito consiste en un tubo conductor largo y de pared delgada, de radio a, y un hilo de retorno de radio b dispuesto a lo largo del eje del tubo. Si se supone la corriente distribuida uniformemente en la sección transversal del hilo, calcúlese la autoinducción por unidad de longitud. ¿Cuál sería la autoinducción si el conductor interior fuese otro tubo hueco y delgado?

6.4. Demuéstrese que la inductancia mutua de dos espiras circulares coaxiales en un medio homogéneo de permeabilidad μ es

$$M_{12}=\mu\sqrt{ab}\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)K(k)-\frac{2}{k}E(k)\right]$$

en donde

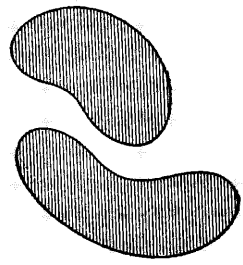
$$k^2=\frac{4ab}{(a+b)^2+d^2}$$

a y b son los radios de las espiras, d la distancia entre sus centros, y K y E son las integrales elípticas completas.

Hállese el valor límite cuando $d\ll a$ y $a\simeq b$.

6.5. Una línea de transmisión consta de dos conductores *perfectos*, paralelos y de sección arbitraria pero constante. La corriente fluye por uno y vuelve por el otro.

Demuéstrese que el producto de la inductancia por unidad de longitud L, y la capacitancia por unidad de longitud C es $LC=\mu\epsilon$, siendo μ y ϵ la permeabilidad y constante dieléctrica del medio que rodea a los conductores. (Véase la discusión sobre campos magnéticos en las proximidades de conductores perfectos al principio de la sección 5.13.)



PROBLEMA 6.5.

6.6. Considérense dos espiras recorridas por corrientes (como las de la figura 5.3, página 177) cuya orientación en el espacio es fija, pero cuya distancia mutua puede cambiar. Sean 0_1 y 0_2 orígenes en las proximidades de cada una de las espiras y ligados a ellas, y x_1 y x_2, respectivamente, los vectores posición de los elementos de corriente dl_1 y dl_2 respecto a sus orígenes correspondientes. Sea R la distancia mutua entre ambos orígenes dirigida desde el de la espira 2 al de la espira 1.

a) Partiendo de la expresión [5.10] para la fuerza entre las espiras, demuéstrese que puede escribirse en la forma:

$$\boldsymbol{F}_{12}=I_1 I_2 \nabla_R M_{12}(\boldsymbol{R})$$

siendo M_{12} la inductancia mutua entre las espiras:

$$M_{12}(\boldsymbol{R})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\oint\frac{dl_1\cdot dl_2}{|x_1-x_2+\boldsymbol{R}|}$$

y se supone que la orientación de las espiras no cambia con $\boldsymbol{R}$.

b) Demuéstrese que la inductancia mutua, considerada como función de $\boldsymbol{R}$, es una solución de la ecuación de Laplace:

$$\nabla_R^2 M_{12}(\boldsymbol{R})=0$$

La importancia de este resultado reside en que, dada la unicidad de las soluciones de la ecuación de Laplace, es posible aprovechar las propiedades de dichas soluciones, supuesto que pueda hallarse una solución para un valor particular de $\boldsymbol{R}$.

6.7. Dos espiras circulares idénticas de radio a están situadas inicialmente a una distancia R sobre un eje común perpendicular a sus planos respectivos.

a) Partiendo de la expresión $W_{12}=\int d^3x\, \boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{A}$, y el resultado del problema 5.4, *b)* para A_ϕ, demuéstrese que la inductancia mutua de las espiras es:

$$M_{12}=\mu_0\pi a^2\int_0^\infty dk\, e^{-kR}J_1^2(ka)$$

b) Demuéstrese que para $R>2a$, M_{12} puede desarrollarse en serie en la forma:

$$M_{12}=\frac{\pi\mu_0 a}{2}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2-3\left(\frac{a}{R}\right)^5+\frac{75}{8}\left(\frac{a}{R}\right)^7\cdots\right]$$

c) Utilícense las técnicas de la sección 3.3 para las soluciones de la ecuación de Laplace para demostrar que la inductancia mutua de dos espiras idénticas y coplanares, de radio a, cuyos centros están separados por una distancia $R > 2a$ es:

$$M_{12} = -\frac{\mu_0 \pi a}{4}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^3 + \frac{a}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^5 + \frac{375}{64}\left(\frac{a}{R}\right)^7 + \ldots\right]$$

d) Calcúlense las fuerzas entre las espiras para las dos configuraciones, con el eje común y coplanares. Compárense las respuestas con las del problema 5.10.

6.8. La corriente microscópica $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$ puede escribirse como:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_j q_j \boldsymbol{v}_j \delta[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j(t)]$$

cuando la carga puntual q_j está situada en el punto $\boldsymbol{x}_j(t)$ y tiene la velocidad $\boldsymbol{v}_j = d\boldsymbol{x}_j(t)/dt$. Al igual que la densidad de carga, esta corriente puede desdoblarse en una contribución de electrones «libres» (de conducción) y una contribución de corrientes ligadas (moleculares).

Siguiendo el procedimiento de la sección 6.7 para hallar las medias y suponiendo que las velocidades se sumen no relativísticamente, obténgase la corriente media $\langle \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) \rangle$.

a) Demuéstrese que la corriente media puede escribirse en la forma de [6.96] con las definiciones [6.92], [6.97] y [6.98].

b) Demuéstrese que para un medio cuyas velocidades moleculares internas puedan despreciarse, pero que se halla en movimiento de conjunto (esto es: $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}$ para cualquier n):

$$\boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{H} = \boldsymbol{M} + (\boldsymbol{D} - \epsilon_0 \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{v}$$

Esto prueba que un medio de polarización $\boldsymbol{P}$ en movimiento produce una densidad de imanación efectiva.

Ayudas para la parte *a)*: Considérense magnitudes tales como $(d\boldsymbol{p}_n/dt)$, $(dQ'^{(n)}_{\alpha\beta}/dt)$ y véase a cuáles se asemejan. Nótese también que:

$$\frac{df}{dt}[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)] = -\boldsymbol{v}_n \cdot \nabla f[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)]$$

6.9. Una esfera dieléctrica de constante dieléctrica ϵ y radio a, se encuentra situada en el origen. En la dirección x hay aplicado un campo eléctrico uniforme E_0. La esfera gira con velocidad angular ω alrededor del eje z. Demuéstrese que hay un campo magnético $\boldsymbol{H} = -\nabla \Phi_M$, siendo:

$$\Phi_M = \frac{3}{5}\left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\right) E_0 \omega \left(\frac{a}{r_>}\right)^5 xz$$

donde $r_>$ es el mayor entre r y a. El movimiento es no relativista.

Se pueden utilizar los resultados de la sección 4.4 para la esfera dieléctrica en un campo aplicado.

6.10. Discútase el principio de conservación de la energía y del momento cinético para un sistema macroscópico de fuentes y campos electromagnéticos en un medio uniforme e isotropo descrito por una constante dieléctrica ϵ y una permeabilidad μ. Demuéstrese que la densidad de energía, vector de Poynting, densidad de ímpetu del campo, y tensor de esfuerzos de Maxwell, vienen dados

por las expresiones de Minkowski:

$$u=\frac{1}{2}(\epsilon E^2+\mu H^2)$$

$$S=(E\times H)$$

$$g=\frac{\mu\epsilon}{c^2}(E\times H)$$

$$T_{ij}=\frac{1}{2}[\epsilon E_iE_j+\mu H_iH_j-\tfrac{1}{2}\delta_{ij}(\epsilon E^2+\mu H^2)]$$

¿Qué modificaciones aparecen si ϵ y μ son funciones de la posición?

6.11. Con las mismas hipótesis del problema 6.10, discútase la conservación del momento cinético. Demuéstrese que las formas diferencial e integral de la ley de conservación son

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}_{\text{mec}}+\mathcal{L}_{\text{campo}})+\nabla\cdot\overleftrightarrow{M}=0$$

y

$$\frac{d}{dt}\int_V(\mathcal{L}_{\text{mec}}+\mathcal{L}_{\text{campo}})d^3x+\int_S n\cdot\overleftrightarrow{M}\,da=0$$

en donde la densidad de momento cinético del campo es

$$\mathcal{L}_{\text{campo}}=x\times g=\frac{\mu\epsilon}{c^2}x\times(E\times H)$$

y el flujo de momento cinético viene descrito por el tensor

$$\overleftrightarrow{M}=\overleftrightarrow{T}\times x$$

Nota: Aquí hemos usado para M_{ij} y T_{ij} la notación diádica. La flecha de doble punta encierra un significado bastante obvio. Por ejemplo, $n\cdot\overleftrightarrow{M}$ es un vector cuya componente j es $\sum_i n_iM_{ij}$. La diada $\overleftrightarrow{M}$ de segundo orden puede escribirse como un tensor de tercer orden, $M_{ijk}=T_{ij}x_k-T_{ik}x_j$. Pero es antisimétrico en los índices j y k y por ello tiene sólo tres elementos independientes. Al incluir el índice i, M_{ijk} tiene, por consiguiente, nueve componentes y puede escribirse como un seudotensor de segundo orden, como hemos hecho antes.

6.12. Una onda plana transversal incide normalmente en el vacío sobre una pantalla plana perfectamente absorbente:

a) Demuéstrese, partiendo de la ley de conservación del ímpetu, que la presión (llamada presión de radiación) ejercida sobre la pantalla es igual a la energía por unidad de volumen del campo de la onda.

b) El flujo de energía electromagnética procedente del Sol en las proximidades de la Tierra es aproximadamente 0,14 wat/cm^2. Si un velero interplanetario tuviese una vela de masa 10^{-4} g/cm^2 y demás masas despreciables, ¿cuál sería su máxima aceleración en cm/seg^{-2} debida a la presión de la radiación solar? ¿Cómo se compara ésta con la aceleración debida al «viento» solar (radiación corpuscular)?

6.13. Considérese la definición de admitancia $Y=G-iB$ de una red pasiva lineal de dos terminales en función de las magnitudes de campo por medio del teorema de Poynting complejo de la sección 6.10.

a) Obténganse expresiones generales para la conductancia G y la susceptancia B, incluyendo pérdidas por radiación, tomando el complejo conjugado de [6.134].

b) Demuéstrese que a bajas frecuencias las expresiones que resultan equivalentes a [6.139] y [6.140] son:

$$G \simeq \frac{1}{|V_1|^2}\int_V \sigma|E|^2\, d^3x$$

$$B \simeq -\frac{4\omega}{|V_1|^2}\int_V (w_m - w_e)\, d^3x$$

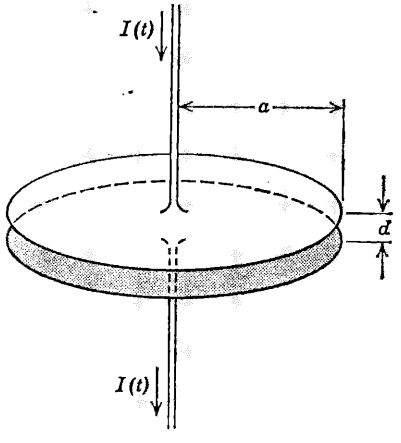
6.14. Un condensador plano está formado por dos láminas paralelas, rectangulares y perfectamente conductoras de dimensiones a y b y cuya distancia d es pequeña comparada con a o b. La corriente llega y sale distribuida uniformemente a lo largo de dos de las aristas adyacentes de longitud b. Considerando definidas la corriente y la diferencia de potencial en este lado del condensador, calcúlese la impedancia o la admitancia de entrada empleando los conceptos de campos de la sección 6.10.

a) Calcúlense los campos eléctrico y magnético en el condensador de modo que sean correctos hasta el segundo orden en potencias de la frecuencia, pero despreciando el efecto de los bordes.

b) Demuéstrese que el desarrollo de la reactancia [6.140] en potencias de la frecuencia hasta un orden apropiado es el mismo que el obtenido para un circuito de parámetros concentrados que consiste en un condensador $C=\epsilon_0 ab/d$ en serie con una autoinducción $L=\mu_0 ab/3b$.

6.15. Un condensador ideal de placas circulares paralelas de radio a y separación $d \ll a$, se conecta a una fuente de corriente mediante conductores axiales, como se indica en el esquema. La corriente en el hilo es $I(t)=I_0 \cos wt$.

a) Calcúlense los campos eléctrico y magnético entre las placas hasta el segundo orden en potencias de la frecuencia (o el número de ondas), despreciando el efecto de bordes.



PROBLEMA 6.15.

b) Calcúlense las integrales de volumen de w_e y w_m que entran en la definición de reactancia X [6.140], hasta el segundo orden en ω. Demuéstrese que estas energías, en función de la corriente de entrada I_i, definida como $I_i=-i\omega Q$, siendo Q la *carga total* sobre una de las placas, son:

$$\int w_e\, d^3x=\frac{|I_1|^2\, d}{\omega^2 a^2}; \qquad \int w_m\, d^3x=\frac{|I_1|^2\, d}{8c^2}\left(1+\frac{\omega^2 a^2}{12c^2}\right)$$

c) Demuéstrese que el circuito equivalente serie consta de $C=\epsilon_0 a^2/4d$ y de $L=\mu_0 d/2$, y que un valor aproximado para la frecuencia de resonancia del sistema es $\omega_{\text{res}} \simeq 2\sqrt{2}\, c/a$. Compárese este resultado con la primera raíz de $J_0(x)$.

6.16. Si en un conductor o semiconductor está fluyendo una corriente debida al campo eléctrico aplicado, y se aplica un campo magnético transversal, aparece una componente del campo eléctrico en la dirección ortogonal a ambos, el campo eléctrico aplicado (dirección de la corriente) y el campo magnético, lo que da lugar a una diferencia de potencial entre los lados del conductor. El fenómeno se conoce como *efecto Hall.*

a) Utilícense las propiedades conocidas de los campos electromagnéticos en las rotaciones y reflexiones espaciales y la hipótesis de los desarrollos en serie de Taylor alrededor de intensidad del campo magnético cero para demostrar que en un medio isótropo la generalización de la ley de Ohm, que sea correcta hasta el segundo orden en el campo magnético, debe tener la forma:

$$\boldsymbol{E}=\rho_0 \boldsymbol{J}+R(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{J})+\beta_1 H^2\boldsymbol{J}+\beta_2(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{H}$$

siendo ρ_0 la resistividad en ausencia de campo magnético y R es el llamado coeficiente de Hall.

b) ¿Cuáles son los requisitos de la invariancia respecto a la inversión temporal?

6.17. *a)* Calcúlese la fuerza que actúa sobre un monopolo de Dirac de carga magnética mínima situado a una distancia de 0,5 angstroms, y en el plano mediatriz, de un dipolo magnético cuyo momento dipolar sea igual a un magnetón nuclear $e\hbar/2m_p c$.

b) Compárese la fuerza de la parte *a)* con las fuerzas atómicas tales como la fuerza electrostática directa entre cargas (para la misma separación), la fuerza spin-órbita y la interacción hiperfina. Coméntese la cuestión del enlace de los monopolos magnéticos a los núcleos con momento magnético. Supóngase que la masa del monopolo es al menos igual a la masa del protón. *Ref.*: D. SIVERS, *Phys. Rev.*, **D2**, 2048 (1970).

6.18. Considérese la expresión de Dirac:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0 g}{4\pi}\int_L \frac{d\boldsymbol{l}'\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$$

para el potencial vector de un monopolo magnético y su cuerda asociada L. Supóngase, para concretar, que el monopolo está situado en el origen y la cuerda a lo largo de la parte negativa del eje z.

a) Calcúlese $\boldsymbol{A}$ explícitamente y demuéstrese que en coordenadas esféricas tiene las componentes

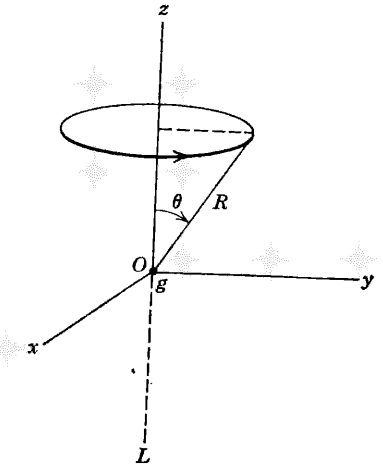
$$A_r=0; \qquad A_\theta=0 \qquad \text{y}$$

$$A_\phi=\frac{\mu_0 g(1-\cos\theta)}{4\pi r \operatorname{sen}\theta}=\left(\frac{\mu_0 g}{4\pi r}\right)\operatorname{tg}(\theta/2)$$

b) Verifíquese que $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ es el campo coulombiano de una carga puntual, salvo, posiblemente, para $\theta=\pi$.

c) Con la $\boldsymbol{B}$ determinada en la parte *b)*, calcúlese el flujo magnético total que atraviesa una espira circular de radio $R\,\text{sen}\,\theta$ dibujada en la figura siguiente. Considérense $\theta<\pi/2$ y $\theta>\pi/2$ por separado, pero calcúlese siempre el flujo hacia arriba.

d) Partiendo de $\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$ alrededor de la espira, determínese el flujo magnético total a través de la espira. Compárese este resultado con el encontrado en la parte *c)*. Demuéstrese que son iguales para $0<\theta<\pi/2$, pero que existe una diferencia *constante* para $\pi/2<\theta<\pi$. Interprétese esta diferencia.



PROBLEMA 6.18.

6.19. Una fuente dipolar que se enciende y se apaga para $t=0$ constituye un ejemplo de la conservación de la causalidad y de la velocidad finita de propagación a pesar del empleo de la condición de Coulomb. Las densidades efectivas de carga y corriente son:

$$\rho(x,t)=\delta(x)\delta(y)\delta'(z)\delta(t)$$
$$J_z(x,t)=-\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta'(t)$$

en las que una prima significa diferenciación con respecto al argumento. El dipolo es de intensidad unidad y apunta en el sentido negativo del eje z.

a) Demuéstrese que el potencial instantáneo de Coulomb [6.45] es:

$$\Phi(x,t)=-\delta(t)\frac{z}{r^3}$$

b) Demuéstrese que la corriente transversal $\boldsymbol{J}_t$ es:

$$\boldsymbol{J}(x,t)=-\delta'(t)\left[\frac{2}{3}\boldsymbol{\epsilon}_3\delta(x)-\frac{\boldsymbol{\epsilon}_3}{4\pi r^3}+\frac{3}{4\pi r^3}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\epsilon}_3\cdot\boldsymbol{n})\right]$$

en la que el factor 2/3 que multiplica la función delta procede de tratar el gradiente de z/r^3, de acuerdo con la ecuación [4.20].

c) Demuéstrese que los campos eléctrico y magnético son causales y que las componentes del campo eléctrico son:

$$E_x(x, t)=\frac{c}{r}\left[-\delta''(r-ct)+\frac{3}{r}\delta'(r-ct)-\frac{3}{r^2}\delta(r-ct)\right]\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\phi$$

E_y es el mismo que E_x, reemplazando el $\cos\phi$ por $\operatorname{sen}\phi$, y

$$E_z(x, t)=\frac{c}{r}\left[\operatorname{sen}^2\theta\delta''(r-ct)+(3\cos^2\theta-1)\left(\frac{\delta'(r-ct)}{r}-\frac{\delta(r-ct)}{r^2}\right)\right]$$

Ayuda: Aunque la respuesta *b)* expresa la corriente transversal explícitamente, puede utilizarse en combinación con la ecuación [6.69] la forma menos explícita:

$$J_t(x, t)=-\delta'(t)\left[\epsilon_3\delta(x)+\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

para calcular el potencial vector y los campos para la parte *c)*. Un método alternativo consiste en emplear la transformada de Fourier en el dominio del tiempo para J_t y A, la función de Green [6.62] y su desarrollo en ondas esféricas del capítulo 16.

ONDAS ELECTROMAGNETICAS PLANAS Y PROPAGACION DE ONDAS

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar las ondas planas en medios ilimitados o, posiblemente, semiinfinitos. Primeramente se tratan las propiedades fundamentales de las ondas electromagnéticas planas en medios no conductores, como son su naturaleza transversal y los estados de polarización lineal y circular. Después se deducen y aplican las importantes fórmulas de Fresnel para la reflexión y refracción en una superficie de separación plana. Sigue a esto una revisión de las propiedades de dispersión de los dieléctricos, conductores y plasmas en altas frecuencias. Se ilustra la riqueza de la naturaleza mediante una visión panorámica (Fig. 7.9) del índice de refracción y el coeficiente de absorción del agua líquida que se extiende a 20 décadas de frecuencia. A continuación se incluye una descripción simplificada de la propagación en la ionosfera, y de las ondas en un medio disipativo o conductor. Lo que sigue son las ideas de velocidad de fase y de grupo y la deformación de un impulso o paquete de ondas a medida que se propaga en un medio dispersivo. Se discute con algún detalle el punto importante de la causalidad y sus consecuencias para las propiedades dispersivas del medio, incluyendo las relaciones de dispersión de Kramers-Kronig y varias reglas de suma derivadas de ellas. El capítulo termina con el tratamiento del problema clásico de la llegada de una señal en un medio dispersivo, discutido por primera vez por SOMMERFELD y BRILLOUIN (1914), pero que sólo recientemente ha sido sometido a la prueba experimental.

7.1. ONDAS PLANAS EN UN MEDIO NO CONDUCTOR

Un aspecto fundamental de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético es la existencia de soluciones que consisten en ondas progresivas que representan el transporte de energía de un punto a otro. Las ondas electromagnéticas más simples e importantes son las planas transversales. Veamos cómo obtener este tipo de soluciones en un medio simple no conductor caracterizado por una permeabilidad y permitividad uniformes. En ausencia de fuentes, las ecuaciones de Maxwell en un medio infinito son:

$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \qquad & \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad & \nabla\times\boldsymbol{B}-\mu\epsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0 \end{aligned}\right\} \qquad [7.1]$$

donde hemos caracterizado el medio por los parámetros μ, ϵ, que por el momento se supone que son independientes de la frecuencia. Combinando las dos ecuaciones en que figuran los rotacionales y aprovechando que las divergencias son nulas, encontramos fácilmente que cada una de las componentes cartesianas de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ satisfacen la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad [7.2]$$

donde

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \qquad [7.3]$$

es una constante característica del medio cuyas dimensiones son las de una velocidad. La ecuación [7.2] admite como soluciones las conocidas ondas planas:

$$u = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t} \qquad [7.4]$$

donde la frecuencia angular ω y el módulo del vector de onda $\boldsymbol{k}$ se hallan relacionados por:

$$k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\mu\epsilon}\omega \qquad [7.5]$$

Si consideramos la propagación de las ondas en una sola dirección, que puede ser la dirección x, la solución fundamental es:

$$u(x, t) = Ae^{ikx - i\omega t} + Be^{-ikx - i\omega t} \qquad [7.6]$$

que mediante [7.5] se puede escribir así:

$$u_k(x, t) = Ae^{ik(x - vt)} + Be^{-ik(x + vt)}$$

Si v no depende de k (esto es, en un medio sin dispersión, en el cual $\mu\epsilon$ es independiente de la frecuencia), sabemos por el teorema de la integral de Fourier [2.44] y [2.45] que por superposición lineal podemos construir una solución general de la forma

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \qquad [7.7]$$

a partir de $u_k(x, t)$, donde $f(z)$ y $g(z)$ son funciones arbitrarias. Con facilidad se comprueba directamente que se trata de una solución de la ecuación de ondas [7.2]. La ecuación [7.7] representa ondas que se desplazan hacia la izquierda y hacia la derecha, siendo v la velocidad de propagación que recibe el nombre de velocidad de fase de la onda.

Si el medio es dispersivo, esto es, si el producto $\mu\epsilon$ es función de la frecuencia, algunas partes del anterior razonamiento exigen una modificación. Si antes de combinar las ecuaciones [7.1] se realiza un desarrollo en ω mediante la integral de Fourier, se llega a la ecuación de ondas de Helmholtz:

$$\nabla^2 u + \mu\epsilon\omega^2 u = 0 \qquad [7.8]$$

Así, pues, k viene dada todavía por [7.5]. Esto significa que para cada componente de frecuencia ω las soluciones de ondas planas son de la forma [7.4].

Solamente cuando reconstruimos la onda como función de x y de t es cuando la dispersión introduce modificaciones. La ecuación [7.7] deja de ser válida, y la onda cambia de forma a medida que se propaga (véanse las secciones 7.8, 7.9 y 7.11).

La onda plana básica [7.4] y [7.5] satisface la ecuación escalar de ondas [7.8]. Pero deberemos atender a la naturaleza vectorial de los campos electromagnéticos y a la exigencia de satisfacer las ecuaciones de Maxwell. Si convenimos en que los campos físicos eléctrico y magnético se obtienen tomando las partes reales de magnitudes complejas, podemos representar los campos de la onda plana en la forma:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) &= \mathcal{E}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) &= \mathcal{B} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \end{aligned}\right\} \qquad [7.9]$$

en la que $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ y $\boldsymbol{n}$ son vectores constantes en el espacio y en el tiempo. Cada componente de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ satisface la ecuación de ondas [7.8] supuesto que:

$$k^2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = \mu\epsilon\omega^2$$

Para recuperar de nuevo [7.5] es necesario suponer que $\boldsymbol{n}$ es un vector tal que $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$. Una vez satisfecha la ecuación de ondas, sólo resta fijar las propiedades vectoriales de modo que las [7.1] sean válidas. Las ecuaciones que dan las divergencias implican que:

$$\boldsymbol{n}\cdot\mathcal{E}=0; \qquad \boldsymbol{n}\cdot\mathcal{B}=0 \qquad [7.10]$$

Esto significa que tanto $\boldsymbol{E}$ como $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares a la dirección de propagación $\boldsymbol{n}$. Tal onda se denomina *onda transversal*. Las ecuaciones que dan los rotacionales imponen una restricción nueva, esto es:

$$\mathcal{B} = \sqrt{\mu\epsilon}\,\boldsymbol{n}\times\mathcal{E} \qquad [7.11]$$

Si $\boldsymbol{n}$ es real, [7.11] implica que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ tienen la misma fase. Entonces resulta útil introducir un conjunto de vectores unitarios reales y mutuamente ortogonales ($\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$, $\boldsymbol{n}$), que se indican en la figura 7.1. En función de estos vectores uni-

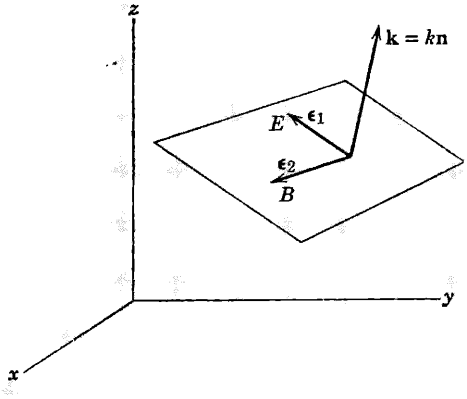


FIG. 7.1. Vector de propagación $\boldsymbol{k}$ y dos vectores de polarización ortogonales $\boldsymbol{\epsilon}_1$ y $\boldsymbol{\epsilon}_2$.

tarios las intensidades de los campos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ son:

$$\mathcal{E}=\epsilon_1 E_0, \qquad \mathcal{B}=\epsilon_2\sqrt{\mu\epsilon}\,E_0 \tag{7.12}$$

o

$$\mathcal{E}=\epsilon_2 E_0', \qquad \mathcal{B}=-\epsilon_1\sqrt{\mu\epsilon}\,E_0' \tag{7.12'}$$

en las que E_0 y E_0' son constantes, posiblemente complejas. La onda descrita por [7.9] y [7.12] ó [7.12'] es una onda transversal que se propaga en la dirección $\boldsymbol{n}$. Representa un flujo medio temporal de energía dado por la parte real del vector de Poynting complejo:

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*$$

El flujo de energía (energía por unidad de área y tiempo) es:

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,|E_0|^2\boldsymbol{n} \tag{7.13}$$

La densidad media temporal u es, por tanto:

$$u=\frac{1}{4}\left(\epsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*+\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^*\right)$$

Lo que da

$$u=\frac{\epsilon}{2}|E_0|^2 \tag{7.14}$$

La relación entre los módulos de [7.13] y [7.14] nos dice que la velocidad con que se transporta la energía es $v=1/\sqrt{\mu\epsilon}$, tal como era de esperar según [7.3].

En la discusión anterior se ha supuesto que $\boldsymbol{n}$ en [7.11] era un vector unitario real. Esto no conduce a la solución más general posible para una onda plana. Supóngase que $\boldsymbol{n}$ es complejo y lo escribimos en la forma $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_R+i\boldsymbol{n}_I$. Entonces, la exponencial de [7.9] se convierte en

$$e^{ikn\cdot x-i\omega t}=e^{-kn_I\cdot x}e^{ikn_R\cdot x-i\omega t}$$

En ciertas direcciones la onda presenta un crecimiento o decrecimiento exponencial. Entonces se la denomina *onda plana no homogénea.* Las superficies de amplitud constante y de fase constante aún son planos, pero ya no paralelos. Se mantienen las relaciones [7.10] y [7.11]. El requisito de que $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$, puede desdoblarse en sus partes real e imaginaria *:

$$\begin{aligned} n_R^2-n_I^2&=1\\ \boldsymbol{n}_R\cdot\boldsymbol{n}_I&=0\end{aligned} \tag{7.15}$$

La segunda de estas condiciones indica que $\boldsymbol{n}_R$ y $\boldsymbol{n}_I$ son ortogonales. Los ejes de coordenadas pueden orientarse de modo que $\boldsymbol{n}_R$ esté en la dirección de x y $\boldsymbol{n}_I$

* Nótese que si $\boldsymbol{n}$ es complejo no tiene valor unidad, esto es, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$, no implica $|\boldsymbol{n}|^2=1$.

en la dirección y. La primera ecuación de las [7.15] puede satisfacerse en general escribiendo:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 \cosh\theta + i\boldsymbol{e}_2 \operatorname{senh}\theta \qquad [7.16]$$

en la que θ es una constante real y $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ son vectores unitarios reales en las direcciones x e y, respectivamente (¡no deben confundirse con ϵ_1 y ϵ_2!). Por consiguiente, el vector $\mathcal{E}$ más general que satisface la condición $\boldsymbol{n}\cdot\mathcal{E}=0$ es:

$$\mathcal{E} = (i\boldsymbol{e}_1 \operatorname{senh}\theta - \boldsymbol{e}_2 \cosh\theta)A + \boldsymbol{e}_3 A' \qquad [7.17]$$

siendo A y A' constantes complejas. Para $\theta \neq 0$, $\mathcal{E}$ en general tiene componentes en la dirección de $\boldsymbol{n}$. Se verifica fácilmente que, para $\theta = 0$, se vuelven a encontrar las soluciones [7.12] y [7.12′].

Al discutir más adelante en este capítulo la reflexión interna total y la refracción en un medio conductor encontraremos ejemplos sencillos de ondas planas no homogéneas, aunque en este último caso el carácter no homogéneo aparece como consecuencia de un vector de ondas complejo, y no de un vector unitario complejo $\boldsymbol{n}$. Las ondas planas no homogéneas constituyen una base general para el tratamiento de los problemas de condiciones de contorno para las ondas y resultan de especial utilidad en la solución del problema de difracción en dos dimensones. El lector interesado puede consultar el libro de CLEMMOW, donde hallará un tratamiento extenso con ejemplos.

7.2. POLARIZACION LINEAL Y CIRCULAR. PARAMETROS DE STOKES

La onda plana [7.9] y [7.12] tiene el vector campo eléctrico siempre en la dirección ϵ_1. Se dice que tal onda está polarizada linealmente con vector de polarización ϵ_1. Evidentemente, la onda descrita por [7.12′] está polarizada linealmente con vector de polarización ϵ_2 y es linealmente independiente de la primera. Así, las dos ondas:

con

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= \epsilon_1 E_1 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \\ \boldsymbol{E}_2 &= \epsilon_2 E_2 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \\ \boldsymbol{B}_j &= \sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_j}{k}, \quad j=1,2 \end{aligned}\right\} \qquad [7.18]$$

pueden combinarse para dar la onda plana homogénea más general que se propaga en la dirección $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = (\epsilon_1 E_2 + \epsilon_2 E_2) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \qquad [7.19]$$

Las amplitudes E_1 y E_2 son números complejos con el fin de que exista la posibilidad de una diferencia de fase entre ondas de distinta polarización.

Si E_1 y E_2 están *en fase*, [7.19] representa una onda *polarizada linealmente*, cuyo vector de polarización forma un ángulo $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(E_2/E_1)$ con ϵ_1, y cuyo módulo es $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$, como se indica en la figura 7.2.

Si E_1 y E_2 presentan *diferencia de fase,* la onda [7.19] está *polarizada elípticamente.* Para entender lo que esto significa, consideraremos el caso más sen-

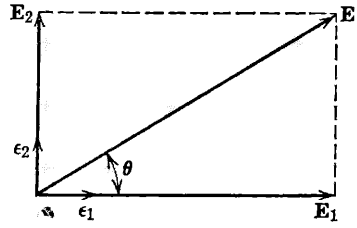


FIG. 7.2. Campo eléctrico de una onda polarizada linealmente.

cillo, la *polarización circular.* En este caso, E_1 y E_2 tienen el mismo módulo, pero la diferencia de fase es 90°. La onda [7.19] se convierte en:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = E_0(\boldsymbol{\epsilon}_1 \pm i\boldsymbol{\epsilon}_2)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \qquad [7.20]$$

siendo E_0 la amplitud real común a ambas. Suponemos que los ejes se han elegido de tal forma que la propagación de la onda sea a lo largo del eje z, en la dirección positiva, mientras que $\boldsymbol{\epsilon}_1$ y $\boldsymbol{\epsilon}_2$ tienen las direcciones x e y, respectivamente. Las componentes del campo eléctrico obtenidas, al tomar las partes reales de [7.20], son:

$$\left.\begin{aligned} E_x(x, t) &= E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_y(x, t) &= \mp E_0 \operatorname{sen}(kz - \omega t) \end{aligned}\right\} \qquad [7.21]$$

En un *punto fijo del espacio,* las componentes [7.21] son tales que el vector campo es constante en módulo, pero gira en un círculo con la frecuencia ω (Fig. 7.3). Para el signo superior $(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2)$ la rotación es de sentido contrario a las agujas de un reloj cuando el observador mira hacia la onda que llega. En óptica se llama a esta onda *polarizada circularmente a la izquierda.* No obstante, en la terminología de la física moderna se dice que es de helicidad *positiva.* La última descripción parece más adecuada porque tal onda tiene la proyección del momento cinético sobre el eje z positiva (véase problema 7.21). Para el signo

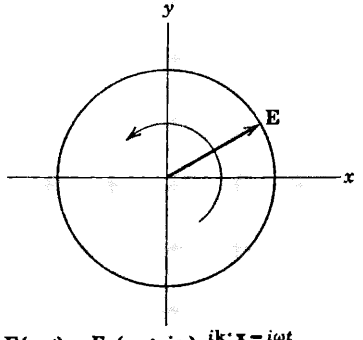


FIG. 7.3. Campo eléctrico de una onda polarizada circularmente.

inferior ($\epsilon_1 - i\epsilon_2$), la rotación de $\boldsymbol{E}$ tiene lugar en el sentido de las agujas del reloj; cuando se mira hacia la onda; la onda está polarizada circularmente hacia la derecha (según la óptica); tiene *helicidad negativa.*

Las dos ondas [7.20] polarizadas circularmente constituyen un conjunto de campos básicos igualmente aceptable, apto para la descripción de un estado de polarización cualquiera. Introducimos los vectores unitarios complejos ortogonales:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 \pm i\boldsymbol{\epsilon}_2) \qquad [7.22]$$

con las propiedades:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mp} &= 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 &= 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\pm} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad [7.23]$$

Entonces, una representación general equivalente a [7.19] es:

$$\boldsymbol{E}(x, t) = (E_+ \boldsymbol{\epsilon}_+ + E_- \boldsymbol{\epsilon}_-) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t} \qquad [7.24]$$

donde E_+ y E_- son amplitudes complejas. Si E_+ y E_- tienen distinto módulo pero están en fase, [7.24] representa una onda polarizada elípticamente con los ejes principales de la elipse en las direcciones de $\boldsymbol{\epsilon}_1$ y $\boldsymbol{\epsilon}_2$. La razón del semieje mayor al menor es $(1+r)/(1-r)$, siendo $E_-/E_+ = r$. Si las amplitudes presentan diferencia de fase, $E_-/E_+ = re^{i\alpha}$, y en este caso es fácil demostrar que la elipse descrita por el vector $\boldsymbol{E}$ tiene sus ejes girados en un ángulo $(\alpha/2)$. La figura 7.4 nos muestra el caso general de polarización elíptica, y las elipses descritas por $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en un punto dado del espacio.

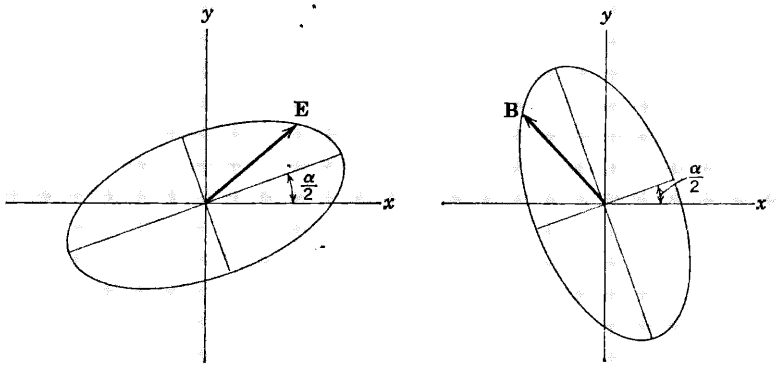


FIG. 7.4. Campo eléctrico e inducción magnética en una onda polarizada elípticamente.

Para $r = \pm 1$, volvemos a obtener una onda polarizada linealmente.

Si una onda electromagnética puede escribirse en la forma bien de [7.19], bien de [7.24], con coeficientes conocidos (E_1, E_2), o (E_+, E_-), respectivamente, su contenido de polarización resulta conocido. Sin embargo, en la práctica se presenta el problema inverso. Dada una onda de la forma [7.9], ¿cómo podemos determinar a partir de observaciones del rayo el estado de polarización

en todos sus detalles? Para abordar este problema son de utilidad los cuatro *parámetros de Stokes,* propuestos por G. G. STOKES en 1852. Estos parámetros son cuadráticos en la intensidad del campo y pueden determinarse mediante medidas de intensidad exclusivamente, con la ayuda de un polarizador lineal y una placa de cuarto de onda o sistemas equivalentes. Su medida determina completamente el estado de polarización de la onda.

Los parámetros de Stokes pueden introducirse al observar que para una onda que se propague en la dirección z, los productos escalares:

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot \boldsymbol{E} \qquad [7.25]$$

son las amplitudes de radiación con polarización lineal en la dirección x, con polarización lineal en la dirección y, con helicidad positiva y con helicidad negativa, respectivamente. Nótese que para polarización circular debe emplearse el *complejo conjugado* del vector de polarización apropiado, de acuerdo con [7.23]. Los cuadrados de estas amplitudes dan una medida de la intensidad de cada tipo de polarización. También se necesita información sobre la fase; se obtiene a partir de productos vectoriales. Damos las definiciones de los parámetros de Stokes con respecto a las expresiones que toman como base tanto las componentes lineales como las componentes circulares, en función de las amplitudes proyectadas [7.25], y también explícitamente en función de la magnitud y fase relativa de las componentes. Para su posterior empleo definimos cada uno de los coeficientes escalares en [7.19] y [7.24] como el producto de un factor de amplitud y otro de fase:

$$\begin{aligned} E_1 &= a_1 e^{i\delta_1}; & E_2 &= a_2 e^{i\delta_2} \\ E_+ &= a_+ e^{i\delta_+}; & E_- &= a_- e^{i\delta_-} \end{aligned} \qquad [7.26]$$

En función de la base con polarización lineal ($\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$), los parámetros de Stokes son *:

$$\begin{aligned} s_0 &= |\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{E}|^2 + |\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \boldsymbol{E}|^2 = a_1^2 + a_2^2 \\ s_1 &= |\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{E}|^2 - |\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \boldsymbol{E}|^2 = a_1^2 - a_2^2 \\ s_2 &= 2\,\mathrm{Re}\,[(\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{E})^*(\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \boldsymbol{E})] = 2a_1 a_2 \cos(\delta_2 - \delta_1) \\ s_3 &= 2\,\mathrm{Im}\,[(\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{E})^*(\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \boldsymbol{E})] = 2a_1 a_2 \,\mathrm{sen}\,(\delta_2 - \delta_1) \end{aligned} \qquad [7.27]$$

Si en lugar de ésta se emplea la base con polarización circular ($\boldsymbol{\epsilon}_+$, $\boldsymbol{\epsilon}_-$) las definiciones son:

$$\begin{aligned} s_0 &= |\boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot \boldsymbol{E}|^2 + |\boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot \boldsymbol{E}|^2 = a_+^2 + a_-^2 \\ s_1 &= 2\,\mathrm{Re}\,[(\boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot \boldsymbol{E})^*(\boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot \boldsymbol{E})] = 2a_+ a_- \cos(\delta_- - \delta_+) \\ s_2 &= 2\,\mathrm{Im}\,[(\boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot \boldsymbol{E})^*(\boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot \boldsymbol{E})] = 2a_+ a_- \,\mathrm{sen}\,(\delta_- - \delta_+) \\ s_3 &= |\boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot \boldsymbol{E}|^2 - |\boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot \boldsymbol{E}|^2 = a_+^2 - a_-^2 \end{aligned} \qquad [7.28]$$

Las expresiones [7.27] y [7.28] muestran un interesante reajuste de los papeles de los parámetros de Stokes con respecto a las dos bases. El parámetro s_0 mide en cualquier caso la intensidad relativa de la onda. El parámetro s_1 da la pre-

* Desgraciadamente, la notación sobre los parámetros de Stokes no es uniforme. STOKES mismo empleó (A, B, C, D); otras notaciones son (I, Q, U, V) e (I, M, C, S). Nuestra notación es la de BORN y WOLF.

ponderancia de la polarización lineal según x respecto a la polarización lineal según y, mientras que s_2 y s_3 suministran información sobre la fase en la base de polarización lineal. Observamos en [7.28] que s_3 admite la interpretación de ser la diferencia entre las intensidades relativas de las componentes de helicidad positiva y negativa, mientras que en esta base s_1 y s_2 se relacionan con las fases. Los cuatro parámetros de Stokes no son independientes, puesto que dependen sólo de las tres cantidades, a_1, a_2 y $\delta_2 - \delta_1$. Entre ellos satisfacen la relación:

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \qquad [7.29]$$

Discutir las etapas operativas necesarias para medir los parámetros de Stokes y así determinar el estado de polarización de una onda plana nos separaría demasiado de nuestro campo. Remitimos al lector a la sección 13.13 del libro de STONE para otros detalles. También se deja, salvo una simple mención, el problema importante de la radiación cuasi-monocromática. La radiación, aun si es lo bastante monocromática para nuestros propósitos, consiste en realidad en la superposición de trenes de onda finitos. Estos, según el teorema de Fourier, comprenden un intervalo de frecuencias y no son completamente monocromáticos. Un modo de considerar esto es decir que las amplitudes y fases (a_i, δ_i) en [7.26] varían lentamente con el tiempo, esto es, lentamente cuando se compara con la frecuencia ω. Los parámetros de Stokes observables se convierten entonces en medias durante un intervalo de tiempo relativamente largo, y se escriben, por ejemplo,

$$s_2 = 2 \langle a_1 a_2 \cos (\delta_2 - \delta_1) \rangle$$

en la que los paréntesis angulares indican la media temporal macroscópica. Una consecuencia del proceso de promediado es que los parámetros de Stokes para un rayo cuasi-monocromático satisfacen una desigualdad

$$s_0^2 \geqslant s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

en vez de la igualdad [7.29]. La «luz natural», aun si es monocromática en alto grado, tiene $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. En BORN y WOLF, Cap. 10, puede encontrarse información adicional sobre la luz cuasi-monocromática y la coherencia parcial.

El estudio de la radiación óptica y de radiofrecuencia procedente del «pulsar» de la nebulosa del Cangrejo, constituye un ejemplo astrofísico del empleo de los parámetros de Stokes para describir el estado de polarización. La luz visible presenta una pequeña proporción de polarización lineal *, en tanto que la emisión de radio a $\omega = 2{,}5 \times 10^9$ s^{-1} tiene un alto grado de polarización lineal **. A ninguna frecuencia existe evidencia de que haya polarización circular. Obviamente, informaciones de esta clase ayudan a aclarar el mecanismo de radiación de estos fascinadores objetos.

* E. J. WAMPLER, J. D. SCARGLE y J. S. MILLER, *Astrophys. J. Letters*, **157**, L1 (1969).

** D. A. GRAHAM, A. G. LYNE y F. G. SMITH, *Nature*, **225**, 526 (1 feb. 1970); D. B. CAMPBELL, C. HEILES y J. M. RANKIN, *Nature*, **225**, 527 (7 feb. 1970).

7.3. REFLEXION Y REFRACCION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN UNA SUPERFICIE PLANA ENTRE DOS MEDIOS DIELECTRICOS

La reflexión y refracción de la luz en una superficie plana que separa dos medios de propiedades dieléctricas distintas es un fenómeno conocido. Los distintos aspectos de los fenómenos se dividen en dos clases.

1) Propiedades cinemáticas:
   a) El ángulo de reflexión es igual al de incidencia.
   b) Ley de Snell: $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{n'}{n}$, donde i y r son, respectivamente, los ángulos de incidencia y refracción; n y n' son los índices de refracción correspondientes.

2) Propiedades dinámicas:
   a) Intensidades de las radiaciones reflejada y refractada.
   b) Cambios de fase y polarización.

Las propiedades cinemáticas son consecuencia inmediata de la naturaleza ondulatoria del fenómeno y del hecho de que hay que satisfacer las condiciones de contorno. Pero no dependen de la naturaleza detallada de las ondas o del tipo de condiciones de contorno. Por otra parte, las propiedades dinámicas dependen por completo de la naturaleza específica de los campos electromagnéticos y de sus condiciones de contorno.

En la figura 7.5 se muestra el sistema de coordenadas y los símbolos adecuados para el problema. Los medios por debajo y por encima del plano $z=0$ tienen permeabilidades y constantes dieléctricas, respectivamente, μ, ϵ y μ', ϵ'. Una onda plana de frecuencia ω y vector de onda $\boldsymbol{k}$ incide procedente del medio μ, ϵ. Las ondas refractada y reflejada tienen, respectivamente, los vectores de onda $\boldsymbol{k}'$ y $\boldsymbol{k}''$; $\boldsymbol{n}$ es la normal unitaria del medio μ, ϵ al medio μ', ϵ'.

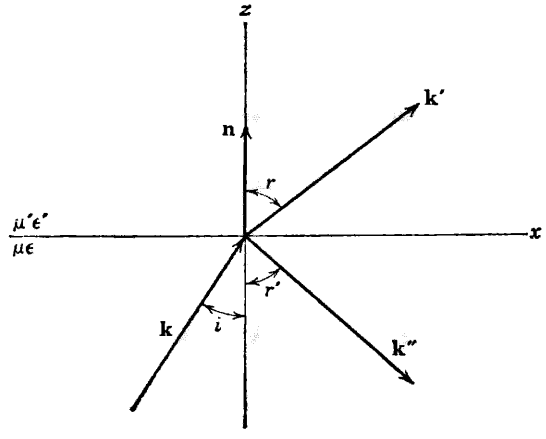


FIG. 7.5. La onda incidente $\boldsymbol{k}$ alcanza la interfase plana entre dos medios distintos, dando lugar a una onda reflejada $\boldsymbol{k}''$ y una onda refractada $\boldsymbol{k}'$.

Según [7.18], las tres ondas son:

INCIDENTE:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \\ \boldsymbol{B} &= \sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}}{k} \end{aligned}\right\} \qquad [7.30]$$

REFRACTADA:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E}'_0 e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \\ \boldsymbol{B}' &= \sqrt{\mu'\epsilon'}\,\frac{\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}'}{k'} \end{aligned}\right\} \qquad [7.31]$$

REFLEJADA:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}'' &= \boldsymbol{E}''_0 e^{i\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \\ \boldsymbol{B}'' &= \sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}''}{k} \end{aligned}\right\} \qquad [7.32]$$

Los módulos de los vectores número de ondas son:

$$\left.\begin{aligned} |\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}''| &= k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \\ |\boldsymbol{k}'| &= k' = \omega\sqrt{\mu'\epsilon'} \end{aligned}\right\} \qquad [7.33]$$

La existencia de condiciones de contorno en el plano $z=0$, que deben satisfacerse para cualquier instante en todos los puntos del mismo, implica que las variaciones espaciales y temporales de todos los campos deben ser las mismas en el plano $z=0$. Por tanto, en él deberemos tener iguales todos los factores de fase independientemente de la naturaleza de las condiciones de contorno:

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})_{z=0} = (\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x})_{z=0} = (\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{x})_{z=0} \qquad [7.34]$$

La ecuación [7.34] contiene los aspectos cinemáticos de la reflexión y refracción. Vemos inmediatamente que los tres vectores de onda deben estar en un mismo plano. Utilizando la notación de la figura 7.5:

$$k \operatorname{sen} i = k' \operatorname{sen} r = k'' \operatorname{sen} r' \qquad [7.35]$$

Por ser $k''=k$, vemos que $i=r'$; el ángulo de incidencia es igual que el de reflexión. Y la ley de Snell es:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{\mu'\epsilon'}{\mu\epsilon}} = \frac{n'}{n} \qquad [7.36]$$

Las propiedades dinámicas se hallan contenidas en las condiciones de contorno: continuidad de las componentes normales de $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$; continuidad de las componentes tangenciales de $\boldsymbol{E}$ y de $\boldsymbol{H}$. Si utilizamos los campos [7.30] y

[7.32], estas condiciones en el plano $z=0$ son:

$$\left.\begin{aligned} [\epsilon(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_0'')-\epsilon'\boldsymbol{E}_0']\cdot\boldsymbol{n}&=0\\ [\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}_0''-\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}_0']\cdot\boldsymbol{n}&=0\\ (\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_0''-\boldsymbol{E}_0')\times\boldsymbol{n}&=0\\ \left[\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}_0'')-\frac{1}{\mu'}(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}_0')\right]\times\boldsymbol{n}&=0 \end{aligned}\right\} \qquad [7.37]$$

Al aplicar estas condiciones de contorno es conveniente considerar dos situaciones por separado: una en que la onda plana incidente está polarizada linealmente con el vector de polarización perpendicular al plano de incidencia (plano definido por $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{n}$); otra en que el vector de polarización es paralelo al plano de incidencia. Podemos así obtener el caso general de polarización elíptica por combinación lineal de los dos resultados, según los métodos expuestos en la sección 7.2.

Primero consideraremos que el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia, como se muestra en la figura 7.6. Todos los campos eléctricos se han dibujado dirigidos hacia atrás, separándose del lector. Las orientacio-

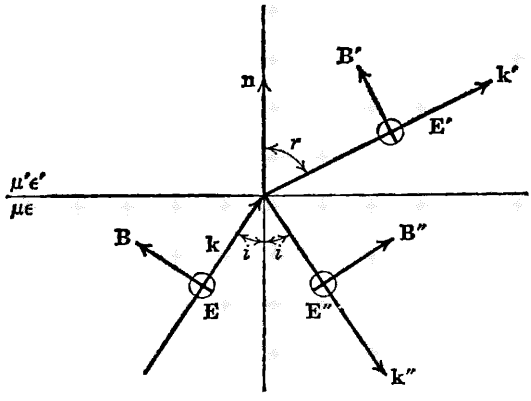


FIG. 7.6. Reflexión y refracción con el vector de polarización perpendicular al plano de incidencia.

nes de los vectores $\boldsymbol{B}$ se han escogido de modo que den un flujo de energía positivo en el sentido de los vectores de onda. La primera de las condiciones de contorno [7.37] no conduce a nada, por ser todos los campos eléctricos paralelos a la superficie. La tercera y la cuarta de las ecuaciones [7.37] dan

$$\left.\begin{aligned} E_0+E_0''-E_0'&=0\\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0-E_0'')\cos i-\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}E_0'\cos r&=0 \end{aligned}\right\} \qquad [7.38]$$

y si usamos la ley de Snell en la segunda, obtenemos nuevamente la tercera. Por [7.38], podemos conocer las amplitudes relativas de las ondas refractada y

reflejada, que son:

E PERPENDICULAR AL PLANO DE INCIDENCIA

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_0'}{E_0}&=\frac{2n\cos i}{n\cos i+\dfrac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2-n^2\operatorname{sen}^2 i}}\\ \frac{E_0''}{E_0}&=\frac{n\cos i-\dfrac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2-n^2\operatorname{sen}^2 i}}{n\cos i+\dfrac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2-n^2\operatorname{sen}^2 i}}\end{aligned}\right\} \qquad [7.39]$$

La raíz cuadrada en estas expresiones es $n'\cos r$, pero se ha empleado la ley de Snell para ponerla en función del ángulo de incidencia. Para las frecuencias ópticas es habitualmente permisible tomar $\mu/\mu'=1$. Las ecuaciones [7.39], y las [7.40] y [7.42] que siguen, se utilizan frecuentemente en el campo de la óptica en el que n y n' son reales, pero también son válidas para constantes dieléctricas complejas.

Si, tal como se indica en la figura 7.7, el campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia, las condiciones de contorno que intervienen son las correspondien-

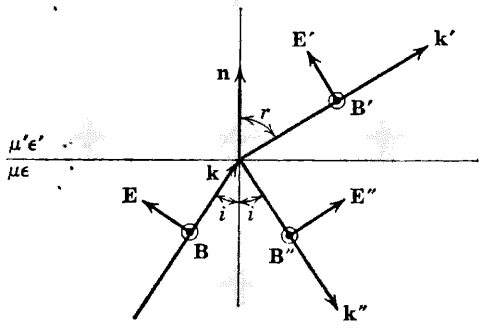


FIG. 7.7. Reflexión y refracción con el ector de polarización paralelo al plano de incidencia.

tes a la componente normal de D, y componentes tangenciales de E y H (primera, tercera y cuarta ecuaciones de [7.37]). La continuidad en las componentes tangenciales de E y H nos exige que:

$$\left.\begin{aligned}\cos i(E_0-E_0'')-\cos r\,E_0'&=0\\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0+E_0'')-\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}E_0'&=0\end{aligned}\right\} \qquad [7.40]$$

La continuidad en la componente normal de D, teniendo en cuenta la ley de Snell, nos da de nuevo la segunda de estas ecuaciones. Las amplitudes relati-

vas de los campos refractado y reflejado son, por tanto:

E PARALELO AL PLANO DE INCIDENCIA:

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_0'}{E_0}&=\frac{2nn'\cos i}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i+n\sqrt{n'^2-n^2\operatorname{sen}^2 i}}\\ \frac{E_0''}{E_0}&=\frac{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i-n\sqrt{n'^2-n^2\operatorname{sen}^2 i}}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i+n\sqrt{n'^2-n^2\operatorname{sen}^2 i}}\end{aligned}\right\} \qquad [7.41]$$

Para incidencia normal ($i=0$), tanto [7.39] como [7.41] se reducen a:

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_0'}{E_0}&=\frac{2}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}}+1}\rightarrow\frac{2n}{n'+n}\\ \frac{E_0''}{E_0}&=\frac{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}}-1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}}+1}\rightarrow\frac{n'-n}{n'+n}\end{aligned}\right\} \qquad [7.42]$$

en las que los resultados de la derecha corresponden a $\mu'=\mu$. Para la onda reflejada el convenio de signos es el correspondiente a la polarización paralela al plano de incidencia. Esto significa que si $n'>n$ hay una inversión de fase para la onda reflejada.

7.4. POLARIZACION POR REFLEXION Y REFLEXION TOTAL INTERNA

En las relaciones dinámicas para la reflexión y la refracción hay dos aspectos dignos de mención. El primero es que cuando la polarización es paralela al plano de incidencia existe un ángulo de incidencia, llamado *ángulo de Brewster,* para el cual no hay onda reflejada. Haciendo $\mu'=\mu$, para simplificar, hallamos que la amplitud de la onda reflejada, según [7.41], se anula cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster:

$$i_B=\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{n'}{n}\right) \qquad [7.43]$$

Para una relación $(n'/n)=1{,}5$, $i_B\simeq 56°$. Si una onda plana de polarización mixta incide con un ángulo igual al de Brewster, la onda reflejada está *completamente polarizada* linealmente con su vector de polarización *perpendicular* al plano de incidencia. Esta propiedad puede utilizarse para producir haces de luz polarizada, pero no es tan efectivo como otros procedimientos basados en

las propiedades anisótropas de algunos medios dieléctricos. Incluso si la onda no polarizada incide con ángulos distintos del de Brewster, hay tendencia en la onda reflejada a estar polarizada de forma predominante perpendicularmente al plano de incidencia. En este hecho se basan las gafas oscuras que transmiten selectivamente sólo una dirección de polarización de la región. En las radiofrecuencias las antenas receptoras se pueden orientar para evitar las ondas reflejadas (y también las procedentes de la ionosfera) en favor de la onda directa.

El segundo fenómeno que vamos a considerar es el de *reflexión total interna.* La denominación de interna se debe a que las ondas incidente y reflejada están en un medio de mayor índice de refracción que la onda refractada ($n > n'$). La ley de Snell [7.55] dice que si $n > n'$, $r > i$. Por consiguiente, $r = \pi/2$ cuando $i = i_0$, siendo:

$$i_0 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{n'}{n}\right) \qquad [7.44]$$

Para las ondas cuyo ángulo de incidencia es $i = i_0$, la onda refractada se propaga paralelamente a la superficie. Por tanto, no puede haber flujo de energía a través de ésta. Para este ángulo, pues, debe haber reflexión total. ¿Qué sucede si $i > i_0$? Antes de contestar observemos que para $i > i_0$, $\text{sen}\, r > 1$. Esto significa que r es un ángulo complejo cuyo coseno es imaginario puro.

$$\cos r = i\sqrt{\left(\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, i_0}\right)^2 - 1} \qquad [7.45]$$

El significado de estas magnitudes complejas se aclara al considerar el factor de propagación de la onda refractada:

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = e^{ik'(x\,\text{sen}\, r + z\cos r)} = e^{-k'[(\text{sen}\, i/\text{sen}\, i_0)^2 - 1]^{1/2} z}\, e^{ik'(\text{sen}\, i/\text{sen}\, i_0)x} \qquad [7.46]$$

Esto nos demuestra que si $i > i_0$, la onda refractada se propaga sólo paralelamente a la superficie, atenuándose de forma exponencial al otro lado de la interfase. La atenuación tiene lugar en unas pocas longitudes de onda a partir de la superficie límite, salvo cuando $i \simeq i_0$.

Aun cuando existan campos al otro lado de la superficie no hay flujo de energía a través de la misma. Por tanto, para $i \geqslant i_0$ hay reflexión total. La ausencia de flujo de energía puede verificarse calculando el valor medio temporal de la componente *normal* del vector de Poynting justamente en un punto interior próximo a la superficie:

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\,\text{Re}\,[\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}'^*)] \qquad [7.47]$$

Sustituyendo $\boldsymbol{H}' = 1/\mu'\omega\,(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E})$, hallamos:

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{1}{2\omega\mu'}\,\text{Re}\,[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}')\,|\boldsymbol{E}_0'|^2] \qquad [7.48]$$

Pero $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}' = k'\cos r$ es una cantidad imaginaria pura, así que $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n} = 0$.

El valor de $\cos r$ [7.45] imaginario puro, multiplicado por n', es la magnitud apropiada para reemplazar a la raíz cuadrada que aparece en las fórmulas de Fresnel, [7.39] y [7.41]. Se advierte que ahora las relaciones E_0''/E_0 son de

módulo unidad, como es de esperar físicamente para una reflexión *total* interna. Sin embargo, la onda reflejada sufre un cambio de fase que es diferente para los dos tipos de incidencia, y que depende del ángulo de incidencia y de (n/n'). Estos cambios de fase pueden utilizarse para cambiar un estado de polarización en otro. El rombo de Fresnel es uno de tales dispositivos, en el cual luz polarizada linealmente de modo que tenga la misma amplitud en el plano de incidencia y perpendicularmente a él se convierte, mediante dos reflexiones internas sucesivas que producen cada una de ellas un cambio relativo de fase de 45°, en luz polarizada circularmente (véase BORN y WOLF, página 50).

El fenómeno de la reflexión total se aprovecha en muchas aplicaciones en las que se requiere transmitir luz sin pérdida de intensidad. En física nuclear y de partículas se utilizan «guías de luz» de plástico para llevar la luz emitida por un cristal de centelleo debida al paso de una partícula ionizante hasta un fotomultiplicador, donde se convierte en una señal eléctrica útil. Frecuentemente el fotomultiplicador debe estar a cierta distancia del cristal de centelleo debido a limitaciones geométricas o a la presencia de campos magnéticos que perturbarían su funcionamiento. Si la sección transversal de la guía de luz es grande en comparación con la longitud de onda de la radiación producida, las consideraciones hechas aquí para una superficie de separación plana son válidas aproximadamente. Sin embargo, si el medio dieléctrico tiene unas dimensiones transversales del orden de la longitud de onda, debe tenerse en cuenta la configuración geométrica detallada. Entonces la propagación es la correspondiente a una guía de ondas dieléctrica (véase la sección 8.10).

7.5. CARACTERISTICAS DE DISPERSION CON LA FRECUENCIA DE LOS DIELECTRICOS, CONDUCTORES Y PLASMAS

En la sección 7.1 se había supuesto que la permeabilidad y la susceptibilidad eran independientes de la frecuencia. Esta ausencia de dispersión tiene como consecuencia que la propagación de un tren de ondas tiene lugar sin distorsión, como implica la solución general [7.8]. En realidad, todos los medios presentan alguna dispersión. Sólo en el vacío, o en un intervalo limitado de frecuencias, puede tratarse la velocidad de propagación como constante al variar la frecuencia. Naturalmente, aun en presencia de dispersión son válidos todos los resultados de las secciones anteriores en los que intervienen componentes de una sola frecuencia. Solamente hace falta interpretar los valores de μ y ϵ como los apropiados a la frecuencia considerada. Cuando hay superposición de un intervalo de frecuencias aparecen, sin embargo, efectos nuevos, como resultado de la dependencia de ϵ y μ con la frecuencia. Para poder examinar algunas de estas consecuencias necesitamos desarrollar al menos un modelo sencillo de dispersión.

a) *Modelo sencillo para* $\epsilon(\omega)$

Casi toda la física de la dispersión utiliza una extensión del modelo clásico, descrito en la sección 4.6, para campos variables con el tiempo. Para simplificar, despreciaremos la diferencia entre el campo eléctrico aplicado y el campo local. Por consiguiente, el modelo únicamente es apropiado para sustancias de densidad relativamente baja. (Este defecto puede eliminarse, si se desea, em-

pleando [4.69].) La permeabilidad relativa se tomará igual a la unidad. Para un electrón ligado mediante una fuerza de naturaleza armónica [4.71] sobre el que actúa un campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ la ecuación de movimiento es:

$$m\,[\ddot{\boldsymbol{x}} + \gamma\dot{\boldsymbol{x}} + \omega_0\boldsymbol{x}] = e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \qquad [7.49]$$

en la que γ corresponde a una fuerza amortiguadora fenomenológica. En [7.49] se desprecian efectos de la fuerza magnética. Hacemos la aproximación adicional de que la amplitud de oscilación es lo bastante pequeña para que pueda evaluarse el campo eléctrico en la posición media del electrón. Si el campo varía armónicamente con el tiempo con una frecuencia ω en la forma $e^{-i\omega t}$, el momento dipolar con que contribuye cada electrón vale:

$$\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{x} = \frac{e^2}{m}(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)^{-1}\boldsymbol{E} \qquad [7.50]$$

Si suponemos que hay N moléculas por unidad de volumen, con Z electrones por molécula, y que, en lugar de una sola frecuencia de resonancia para todos hay varias, de modo que haya f_j electrones por molécula cuya frecuencia de enlace es ω_j y cuya constante de amortiguamento sea γ_j, podemos escribir la constante dieléctrica, $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$, en la forma:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0\left[1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}\sum_j f_j(\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j)^{-1}\right] \qquad [7.51]$$

en la que las f_j, llamadas *intensidades de oscilador,* satisfacen la regla de suma:

$$\sum_j f_j = Z \qquad [7.52]$$

La ecuación [7.51], cuando se utilizan valores adecuados mecanocuánticos para f_j, γ_j y ω_j, resulta una descripción exacta de la contribución atómica a la constante dieléctrica.

b) *Dispersión anómala y absorción resonante*

Las constantes de amortiguamiento γ_j en general son pequeñas comparadas con las *frecuencias de enlace o resonantes* ω_j. Esto significa que $\epsilon(\omega)$ es aproximadamente real para la mayor parte de las frecuencias. El factor $(\omega_j^2 - \omega^2)^{-1}$ es positivo para $\omega < \omega_j$ y negativo para $\omega > \omega_j$. Así, a bajas frecuencias, inferiores al ω_j más pequeño, todos los términos de la suma que aparece en [7.51] tienen el mismo signo y $\epsilon(\omega)$ es mayor que ϵ_0. A medida que se van pasando valores sucesivos de ω_j, van apareciendo más y más términos negativos en la suma y finalmente ésta se hace negativa y $\epsilon(\omega)$ es menor que ϵ_0. En las proximidades de cualquiera de las ω_j se presenta, como es natural, una conducta bastante brusca. Para el término en que $\omega = \omega_j$ la parte real del denominador en [7.51] se anula y el término se hace grande e imaginario puro. En la figura 7.8 se ha dibujado el aspecto general de la variación de las partes real e imaginaria de $\epsilon(\omega)$ al atravesar dos frecuencias de resonancia sucesivas. Se denomina *dispersión normal* a la asociada con un aumento de Re $\epsilon(\omega)$ al aumentar ω, y *dispersión anómala* cuando sucede lo contrario. Se advierte que la dispersión normal ocurre en todos los puntos salvo en la proximidad de una frecuencia

resonante, y que solamente cuando hay dispersión anómala es cuando la parte imaginaria de ϵ resulta apreciable. Como la existencia de una parte imaginaria de ϵ positiva representa una disipación de la energía de la onda electromagné-

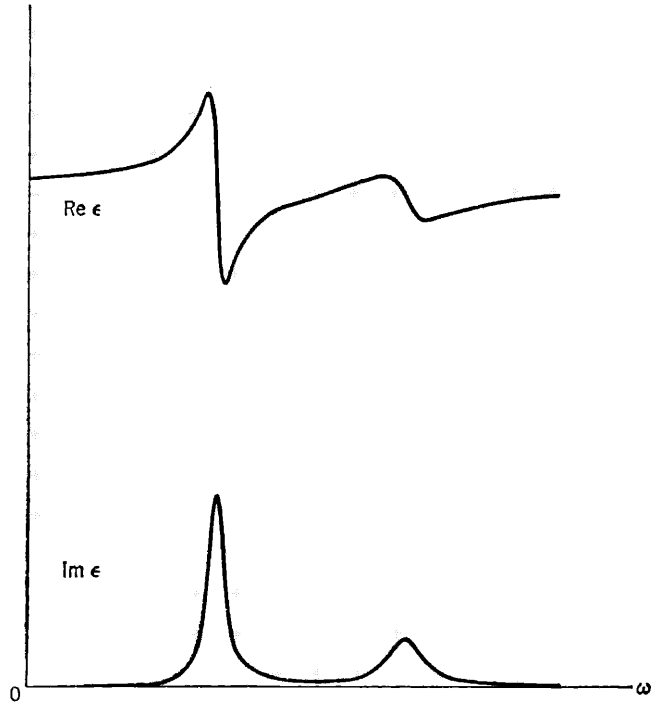


FIG. 7.8. Partes real e imaginaria de la constante dieléctrica $\epsilon(\omega)$ en la proximidad de dos resonancias. La región de dispersión anómala es también el intervalo de frecuencias en que tiene lugar absorción.

tica en el medio, las regiones en que Im ϵ es grande se denominan regiones de *absorción resonante* *.

La atenuación de una onda plana se expresa más directamente en función de las partes real e imaginaria del número de ondas k. Si se escribe el número de ondas en la forma:

$$k=\beta+i\frac{\alpha}{2} \qquad [7.53]$$

entonces el parámetro α se conoce con el nombre de constante de atenuación o coeficiente de absorción. La *intensidad* de la onda decae como $e^{-\alpha x}$. La ecuación [7.5] proporciona la relación entre (α, β) y Re ϵ, Im ϵ):

$$\begin{aligned}\beta^2-\frac{\alpha^2}{4}&=\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\text{Re}\,\epsilon}{\epsilon_0}\\ \beta\alpha&=\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\text{Im}\,\epsilon}{\epsilon_0}\end{aligned} \qquad [7.54]$$

* Si Im $\epsilon<0$, el medio suministra energía a la onda y tiene lugar una amplificación, como ocurre en el máser y el láser. Véase M. BORENSTEIN y W. E. LAMB, *Phys. Rev.*, A5, 1298 (1972).

Si $\alpha \ll \beta$, lo que sucede a menos que la absorción sea muy intensa o Re ϵ sea negativa, la constante de atenuación α puede escribirse aproximadamente en la forma:

$$\alpha \simeq \frac{\text{Im } \epsilon(\omega)}{\text{Re } \epsilon(\omega)} \beta \qquad [7.55]$$

siendo $\beta = \sqrt{\text{Re } \epsilon/\epsilon_0}\, \omega/c$. La disminución relativa de intensidad en una distancia igual a la longitud de onda, dividida por 2π es igual a la relación Im ϵ/Re ϵ.

c) *Comportamiento a bajas frecuencias, conductividad eléctrica*

En el límite $\omega \to 0$, existe una diferencia cualitativa en la respuesta del medio según la frecuencia resonante más baja sea cero o no. Para los aislantes la frecuencia de resonancia más baja es diferente de cero. Entonces, para $\omega = 0$ la polarizabilidad molecular está dada por [4.73], que corresponde al límite, cuando $\omega = 0$, de [7.51]. En la sección 4.6 se han discutido los aspectos elementales de los dieléctricos en el límite estático.

Si una cierta fracción de los electrones de una molécula son «libres» en el sentido de que tienen $\omega_0 = 0$, la constante dieléctrica es singular para $\omega = 0$. Si se presenta separadamente la contribución de los electrones libres, [7.51] se convierte en:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{res}} + i \frac{Ne^2 f_0}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)} \qquad [7.56]$$

siendo ϵ_{res} la contribución de todos los otros dipolos. Esta conducta singular puede aclararse si examinamos la ecuación de Maxwell-Ampère:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

y suponemos que el medio obedece la ley de Ohm, $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$, y tiene una constante dieléctrica «normal» ϵ_n. Cuando la dependencia con el tiempo es armónica la ecuación se convierte en:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega \left(\epsilon_n + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \boldsymbol{E} \qquad [7.57]$$

Por otra parte, si en lugar de introducir la ley de Ohm explícitamente, atribuimos todas las propiedades del medio a una constante dieléctrica $\epsilon(\omega)$, podríamos identificar con ésta la magnitud que figura entre paréntesis en [7.57]. Comparando con [7.56] se obtiene, para la conductividad, la expresión:

$$\sigma = \frac{f_0 N e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)} \qquad [7.58]$$

Esencialmente, este es el modelo de DRUDE (1900) para la conductividad eléctrica, siendo $f_0 N$ el número de electrones libres por unidad de volumen en el medio. La constante de amortiguamiento γ_0/f_0 puede determinarse empíricamente a partir de los datos experimentales sobre la conductividad. Para el cobre, $N \simeq 8 \times 10^{28}$ átomos/m^3 y la conductividad a baja frecuencia para las temperaturas ordinarias es $\sigma = 5{,}5 \times 10^7$ mhos/m. Esto conduce a $\gamma_0/f_0 = 4 \times 10^{13}$ s^{-1}.

Suponiendo que f_0 sea 1, se advierte que hasta frecuencias bastante más allá de la región de las microondas ($\omega \lesssim 10^{11}$ s^{-1}) la conductividad de los metales es esencialmente real (esto es, la corriente está en fase con el campo), y es independiente de la frecuencia. Para frecuencias mayores (en el infrarrojo y más allá) la conductividad es compleja y varía con la frecuencia en la forma que describe cualitativamente el resultado simple [7.58]. El problema de la conductividad eléctrica es, en realidad, de tipo mecanocuántico, en él desempeña un importante papel el principio de exclusión de Pauli. Actualmente los electrones libres son electrones de valencia de los átomos aislados que, cuando los átomos se reúnen para formar un sólido, pasan a ser casi libres y se mueven por la red relativamente sin obstáculos (supuesto que sus energías caigan en ciertos intervalos o bandas). Los efectos amortiguadores proceden de los choques en los que hay una transferencia de ímpetu apreciable entre los electrones y las vibraciones de la red, defectos de red e impurezas *.

Las consideraciones anteriores demuestran que la distinción entre dieléctricos y conductores es artificial, al menos para $\omega \neq 0$. Si el medio posee electrones libres es un conductor a bajas frecuencias: en otro caso, es un aislante **. Pero a frecuencias no nulas la contribución de «conductividad» en [7.51] aparece simplemente como una amplitud resonante igual que las demás. Las propiedades dispersivas del medio pueden atribuirse lo mismo a una constante dieléctrica compleja que a una conductividad y una constante dieléctrica que dependen de la frecuencia.

d) *Límite de frecuencias altas, frecuencia de plasma*

A frecuencias mucho más altas que la mayor de las frecuencias de resonancia la constante dieléctrica toma la forma sencilla

$$\epsilon(\omega) \simeq \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \qquad [7.59]$$

siendo

$$\omega_p^2 = \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m} \qquad [7.60]$$

La frecuencia ω_p, que depende únicamente del número total de electrones NZ por unidad de volumen, se llama *frecuencia de plasma* del medio. En el límite el número de ondas viene dado por:

$$ck = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \qquad [7.61]$$

Algunas veces [7.61] se expresa en la forma $\omega^2 = \omega_p{}^2 + c^2k^2$, y se llama relación de dispersión, ecuación para $\omega = \omega(k)$. En los medios dieléctricos [7.59] sólo se aplica cuando $\omega^2 \gg \omega_p{}^2$. La constante dieléctrica es entonces próxima a la

---

* Véase A. H. WILSON, *Theory of Metals*, Cambridge University Press (1953^2), o W. R. BEAM, *Electronic of Solids*, McGraw-Hill, Nueva York (1965).

** En el lenguaje de la estructura de bandas mecanocuánticas del sólido, el conductor tiene algunos electrones en una banda parcialmente llena, mientras que el aislante tiene sus bandas llenas completamente en la extensión permitida por el principio de Pauli. Un electrón «libre» debe tener estados cuánticos a los que pueda moverse de modo que aproximadamente se conserve la energía. En una banda parcialmente llena existen tales estados, pero en una banda llena, por definición, no existen tales estados disponibles.

del vacío, aunque ligeramente menor, y aumenta con la frecuencia de modo semejante a la parte de la curva dibujada en la figura 7.8, que corresponde a las frecuencias mayores. El número de ondas es real y varía con la frecuencia como en el caso de un modo en una guía de ondas cuya frecuencia de corte sea ω_p (véase Fig. 8.4).

En ciertas situaciones, tales como las presentes en la ionosfera o en un plasma electrónico poco denso, los electrones están libres y el amortiguamiento es despreciable. Entonces, la ecuación [7.59] se cumple en un intervalo de frecuencias amplio, que incluye $\omega < \omega_p$. Para frecuencias menores que la frecuencia de plasma el número de ondas [7.61] se hace imaginario puro. Si tales ondas inciden sobre el plasma son reflejadas y los campos en el interior decaen exponencialmente con la distancia a la superficie. Para $\omega = 0$ la constante de atenuación es:

$$\alpha_{\text{plasma}} \simeq \frac{2\omega_p}{c} \qquad [7.62]$$

En el laboratorio las densidades de los plasmas son del orden de $10^{18} - 10^{22}$ electrones por m^3. Esto significa que $\omega_p \simeq 6 \times 10^{10} - 6 \times 10^{12}$ s^{-1}, de modo que las distancias de atenuación típicas (α^{-1}) son del orden de $0{,}2 - 2 \times 10^{-3}$ cm para los campos estáticos o de baja frecuencia. La expulsión de los campos del interior de un plasma es un efecto bien conocido en los procesos termonucleares controlados y se aprovecha en los intentos de confinamiento de plasmas calientes (véase la sección 10.5).

La reflectividad de los metales a las frecuencias ópticas y superiores es debida esencialmente a un comportamiento igual al del plasma. La constante dieléctrica de un metal está dada por [7.56]. A frecuencias altas ($\omega \gg \gamma_0$) toma la forma aproximada:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{res}}(\omega) - \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

siendo $\omega_p^2 = ne^2/\epsilon_0 m^*$, la frecuencia de plasma correspondiente a los electrones de conducción, con una masa efectiva m^* para incluir parcialmente los efectos de enlace. Para $\omega \ll \omega_p$ el comportamiento de la luz incidente sobre el metal es aproximadamente el mismo que para el plasma descrito por [7.59]. La luz penetra sólo una distancia muy pequeña en el metal y es casi enteramente reflejada. Pero cuando se aumenta la frecuencia hasta la región en que $\epsilon(\omega) > 0$, el metal repentinamente puede transmitir luz y su reflectividad cambia de modo drástico. Esto ocurre típicamente en el ultravioleta y por ello se habla de la transparencia de los metales en el ultravioleta. La determinación de la frecuencia crítica suministra información sobre la densidad o masa efectiva de los electrones de conducción *.

e) *Indice de refracción y coeficiente de absorción del agua líquida como función de la frecuencia*

Como ejemplo del comportamiento global con la frecuencia de la parte real del índice de refracción y del coeficiente de absorción de un medio real, consideraremos la sustancia más corriente, el agua. Es nuestro intento el dar una

* Véase el capítulo 4 de D. PINES, *Elementary excitations in Solids*, W. A. Benjamin, Nueva York (1963), donde se discuten éstas y otras propiedades de los metales en las regiones óptica y ultravioleta.

visión amplia e indicar las tremendas variaciones posibles, más que discutir detalles específicos. De acuerdo con ello, en la figura 7.9 damos una representación con escalas logarítmicas con 20 décadas en frecuencia y 11 décadas en el coeficiente de absorción que recopila los aspectos generales de $n(\omega) = \text{Re}\,\sqrt{\mu\epsilon c}$ y de $\alpha(\omega) = 2\,\text{Im}\,\sqrt{\mu\epsilon}\,\omega$ para el agua líquida en condiciones normales de presión y temperatura. La parte superior de la gráfica muestra el comportamiento interesante, pero no espectacular de $n(\omega)$. Para frecuencias muy bajas, $n(\omega) \simeq 9$, valor que se debe a la orientación parcial de los momentos dipolares permanentes de las moléculas de agua. Por encima de 10^{10} Hz la curva cae de modo relativamente suave hasta el infrarrojo. En la región visible, indicada por las líneas verticales de trazos, $n(\omega) \simeq 1{,}34$, con poca variación. En el ultravioleta aparece otra estructura especial. Por encima de 6×10^{15} Hz ($h\nu \simeq 25$ eV) no hay datos sobre la parte real del índice de refracción. La aproximación asintótica hacia la unidad indicada en la figura corresponde a tomar como válida la fórmula [7.59].

El comportamiento del coeficiente de absorción α es mucho más dramático. Para frecuencias por debajo de 10^6 Hz el coeficiente de absorción es extremadamente pequeño. Los datos no parecen concordantes (se indican dos series diferentes), probablemente a causa de variaciones en la pureza de las muestras. A medida que la frecuencia aumenta hasta 10^{11} Hz, el coeficiente de absorción aumenta rápidamente hasta $\alpha \simeq 10^2$ cm^{-1}, que corresponde a una distancia de atenuación de 100 micrones en el agua líquida. Esta es la absorción conocida para las microondas en el agua. Es el fenómeno que (debido a la humedad en el aire) terminó con la tendencia durante la Segunda Guerra Mundial a mejorar la resolución del radar utilizando longitudes de onda cada vez más cortas.

En la región infrarroja la presencia de bandas de absorción, asociadas con los modos de vibración de la molécula y con las posibles oscilaciones de la molécula en el campo de sus vecinas, hace que la absorción alcance picos de valor $\alpha \simeq 10^4$ cm^{-1}. Entonces, en un estrecho intervalo de frecuencias entre 4×10^{14} Hz y 8×10^{14} Hz, el coeficiente cae precipitadamente 7 décadas y media hasta un valor de $\alpha < 3 \times 10^{-3}$ cm^{-1}. Después vuelve a subir de nuevo en más de 8 décadas hacia 2×10^{15} Hz. A esta impresionante *ventana* de baja absorción es a la que denominamos *región visible*. La extrema transparencia del agua en ella tiene su origen en la estructura de los niveles de energía básicos de los átomos y moléculas. Medite el lector sobre la cuestión fundamental de la evolución biológica en este planeta impregnado de agua, el porqué de que los ojos de los animales vean el espectro entre el rojo y el violeta y el porqué de que el césped sea verde. ¡La madre naturaleza ha aprovechado ciertamente su ventana! En el ultravioleta muy alejado la absorción tiene un valor máximo de $\alpha \simeq 1{,}1 \times 10^6$ cm^{-1} para $\nu \simeq 5 \times 10^{15}$ Hz (21 eV). Esta es exactamente la energía del plasmón $\hbar\omega_p$, que corresponde a una excitación colectiva de todos los electrones de la molécula. La atenuación viene dada en orden de magnitud por [7.62]. A frecuencias mayores faltan datos hasta el efecto fotoeléctrico, después aparecen la dispersión de Compton y otros procesos de alta energía. Los físicos nucleares han estudiado con detalle la absorción allí. El comportamiento está gobernado básicamente por las propiedades atómicas y la densidad, no por el hecho de que la sustancia sea agua.

En la parte de bajas frecuencias de la gráfica de la figura 7.9 hemos indicado el coeficiente de absorción para el *agua de mar*. A bajas frecuencias, el agua de mar tiene una conductividad eléctrica $\sigma \simeq 4{,}4$ mhos/metro. Según [7.57], encontramos que por debajo de 10^8 Hz $\alpha \simeq (2\sigma\omega)^{1/2}$. El coeficiente de

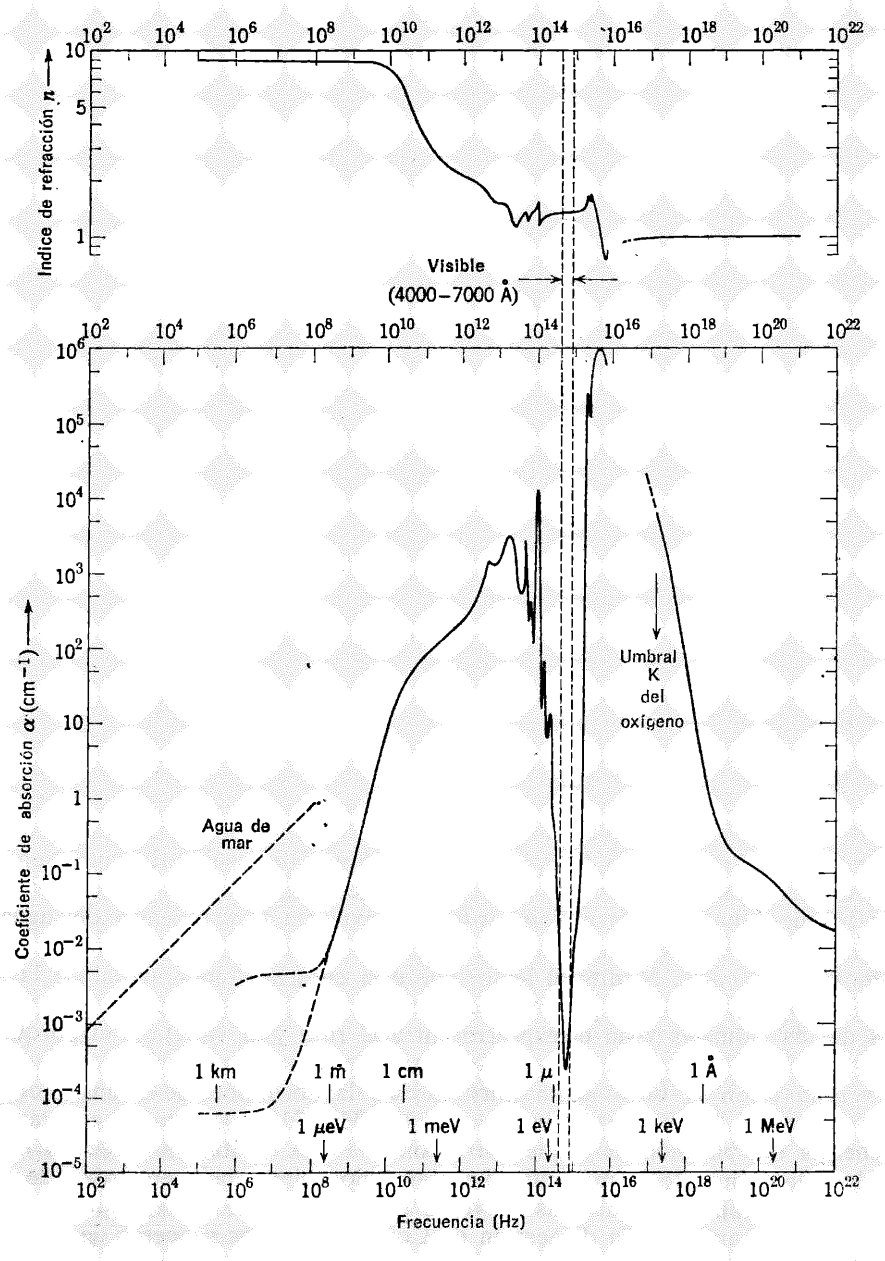


FIG. 7.9. Indice de refracción (arriba) y coeficiente de absorción (abajo) del agua líquida en función de la frecuencia. En abscisas se ha dibujado también una escala de energías (flechas) y una escala de longitudes de onda (líneas verticales). La región visible del espectro en frecuencia se ha indicado por líneas de trazos verticales. El coeficiente de absorción del agua de mar mediante la línea de trazos diagonal de la izquierda. Nótese que las escalas en ambos ejes son logarítmicas.

absorción es, pues, proporcional a $\sqrt{\omega}$ y se hace muy pequeño a bajas frecuencias. La línea dibujada es α (cm^{-1}) $\simeq 8{,}4 \times 10^{-5}\sqrt{\nu}$ (Hz). Para 10^2 Hz, la distancia de atenuación es $\alpha^{-1} \simeq 10$ metros en el agua de mar. Esto significa que a 50 metros de profundidad sólo llega el 1 por 100 de la intensidad en la superficie. Si se tuviera una gran flota de submarinos distribuidos por el océano en todo el mundo y se deseara ser capaz de enviarles mensajes mientras están sumergidos desde una base terrestre, se deberían considerar frecuencias extremadamente bajas (ELF) para la comunicación. La existencia de resonancias destacadas en la cavidad tierra-ionosfera en el intervalo entre 8 Hz y unos pocos centenares de Hertz (véase la sección 8.9) hace esta región del espectro en frecuencia especialmente atractiva, por la reducida atenuación. Con longitudes de onda de 5×10^3 km, se necesitan antenas muy largas (¡que todavía son pequeñas comparadas con la longitud de onda!). De vez en cuando aparecen especulaciones en esta línea en la prensa diaria *.

7.6. MODELO SIMPLIFICADO DE PROPAGACION EN LA IONOSFERA Y LA MAGNETOSFERA

La propagación de ondas electromagnéticas en la ionosfera queda descrita en la aproximación de orden cero por la constante dieléctrica [7.59], pero la presencia del campo magnético terrestre modifica el comportamiento de modo significativo. En muchos plasmas de laboratorio también está presente la influencia de un campo magnético estático externo. Para poner de manifiesto la influencia de un campo magnético externo, consideremos el problema sencillo de un plasma electrónico poco denso de densidad uniforme sometido a una inducción magnética $\boldsymbol{B}_0$ fuerte, estática y uniforme, mientras que se propagan a su través ondas transversales paralelamente a la dirección de B_0. (El problema más general de que la dirección de propagación sea arbitraria está contenido en el problema 10.7). Si la amplitud de los movimientos electrónicos es pequeña y despreciamos las colisiones, la ecuación de movimiento es aproximadamente:

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} - e\boldsymbol{B}_0 \times \dot{\boldsymbol{x}} = -e\boldsymbol{E}e^{-i\omega t} \qquad [7.63]$$

donde la influencia del campo $\boldsymbol{B}$ de la onda transversal se ha despreciado en comparación con la inducción estática $\boldsymbol{B}_0$ y la carga electrónica se ha escrito como $-e$. Resulta conveniente considerar que las ondas transversales están polarizadas circularmente. Así, podemos escribir:

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{\epsilon}_1 \pm i\boldsymbol{\epsilon}_2)E \qquad [7.64]$$

y una expresión semejante para $\boldsymbol{x}$. Como la dirección de $\boldsymbol{B}_0$ es ortogonal a $\boldsymbol{\epsilon}_1$ y $\boldsymbol{\epsilon}_2$, el producto vectorial en [7.63] tiene componentes únicamente en las direcciones $\boldsymbol{\epsilon}_1$ y $\boldsymbol{\epsilon}_2$, y las componentes transversales están desacopladas. La solución estacionaria de [7.63] es:

$$\boldsymbol{x} = \frac{e}{m\omega(\omega \mp \omega_B)}\boldsymbol{E} \qquad [7.65]$$

* *New York Times*, 14 octubre 1969, pág. 49, columna 1; 19 agosto 1973, pág. 8, columna 1.

donde ω_B es la frecuencia de precesión de la partícula cargada en un campo magnético:

$$\omega_B = \frac{eB_0}{m} \qquad [7.66]$$

La dependencia con la frecuencia de [7.65] puede entenderse recurriendo al teorema de Larmor; al transformar [7.63] a un sistema de coordenadas que precesiona con la frecuencia ω_B en el que se ha eliminado el campo magnético estático, se demuestra que la velocidad de cambio del ímpetu es debida a un campo eléctrico de frecuencia efectiva $(\omega \pm \omega_B)$, según el sentido de la polarización circular.

La amplitud de la oscilación [7.65] da lugar a un momento dipolar para cada electrón, y conduce para una muestra macroscópica a la constante dieléctrica:

$$\epsilon_{\mp} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)}\right) \qquad [7.67]$$

El signo superior corresponde a una onda con helicidad positiva (polarización circular hacia la izquierda en la terminología óptica), en tanto que el signo inferior es para helicidad negativa. Cuando la propagación es antiparalela al campo magnético $\boldsymbol{B}_0$, los signos aparecen invertidos. Este resultado constituye la generalización de [7.59], incluyendo una inducción magnética estática. No es completamente general porque se aplica solamente en ondas que se propagan en la dirección del campo estático. Pero aún en este ejemplo tan simple vemos la característica esencial: las ondas polarizadas circularmente a la derecha y a la izquierda se propagan de forma diferente. La ionosfera es birrefringente. Si la dirección de propagación no coincide con la del campo estático $\boldsymbol{B}_0$, se demuestra de forma inmediata que, si se desprecian los términos del orden de ω_B^2 en comparación con ω^2 y $\omega\omega_B$, el índice de refracción viene también dado por [7.67]. No obstante, la frecuencia de precesión [7.66] se interpreta ahora como la debida solamente a la componente de $\boldsymbol{B}_0$ paralela a la dirección de propagación. Esto nos dice que ω_B en [7.67] es una función del ángulo: el medio no sólo es birrefringente, sino que además es anisótropo. (Véase el problema 10.7.)

En el caso de la ionosfera se tiene una densidad máxima de electrones libres del orden de $n_0 \simeq 10^{10}$-10^{12} electrones/m^3, lo que corresponde a una frecuencia de plasma de $\omega_p \simeq 6 \times 10^6$-$6 \times 10^7$ s^{-1}. Si tomamos el valor 0,3 gauss para el campo magnético terrestre, la frecuencia de precesión es $\omega_B \simeq 6 \times 10^6$ s^{-1}.

La figura 7.10 representa $\epsilon_{\pm}/\epsilon_0$ como función de la frecuencia para dos valores de la razón (ω_p/ω_B). En ambos casos se presentan intervalos de frecuencia en los que uno de los dos, ϵ_+ o ϵ_-, es positivo, mientras el otro es negativo. Para estas frecuencias no puede propagarse en el plasma un estado de polarización circular, y, por tanto, una onda en tal estado de polarización que incida sobre el plasma será reflejada totalmente. El otro estado de polarización se transmite parcialmente. Así, pues, cuando incide sobre un plasma una onda polarizada linealmente, la onda reflejada está polarizada elípticamente con su eje mayor girado respecto a la dirección de polarización de la onda incidente.

El comportamiento de las ondas de radio que se reflejan en la ionosfera es explicable en función de estas ideas, pero la presencia de varias capas de plasma cuyas densidades y posiciones relativas varían con la altura y con el tiempo hace que el problema sea bastante más complicado que nuestro ejemplo sen-

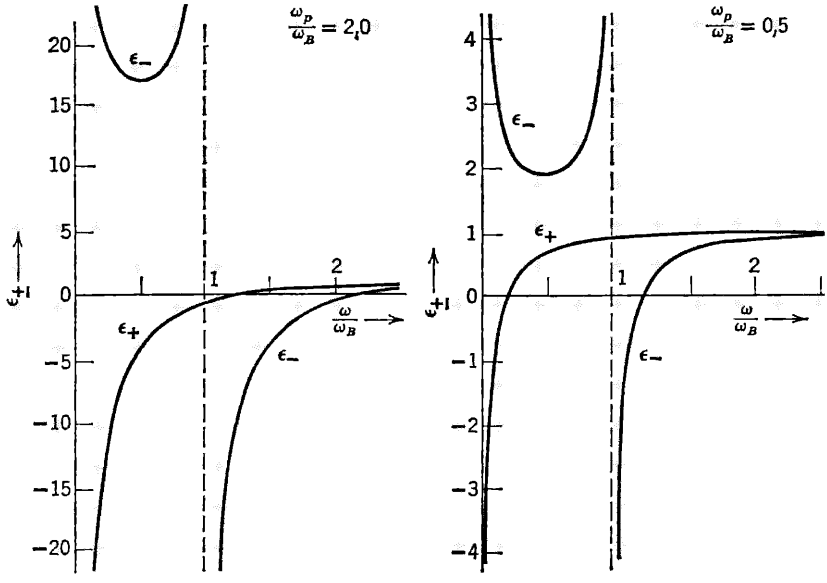


FIG. 7.10. Constante dieléctrica como función de la frecuencia para el de ionosfera (plasma electrónico enrarecido en una inducción magnética estática y uniforme). $\epsilon_\pm(\omega)$ se refiere a las ondas polarizadas circularmente a la derecha y a la izquierda, propagándose paralelamente al campo magnético; ω_B es la frecuencia de giro; ω_p es la frecuencia del plasma. Los dos conjuntos de curvas corresponden a los valores de la razón $\omega_p/\omega_B = 2{,}0,\ 0{,}5$.

cillo. Estudiando la reflexión de impulsos de radiación transmitidos verticalmente hacia arriba pueden deducirse las densidades electrónicas a distintas alturas. El número n_0 de electrones libres por unidad de volumen aumenta lentamente con la altura en una capa dada de la ionosfera; alcanza un máximo y cae por fin rápidamente si seguimos subiendo (Fig. 7.11). Un impulso de frecuencia dada ω_1 penetra en la capa sin reflejarse a causa del cambio lento de n_0. Sin embargo, cuando la densidad n_0 es bastante grande $\omega_p(h_1) \simeq \omega_1$. Entonces la constante dieléctrica [7.67] se anula y el impulso se refleja. La densidad n_0 a la cual tiene lugar la reflexión viene dada por las raíces del segundo miembro de [7.67]. Si observamos el intervalo de tiempo entre la transmisión

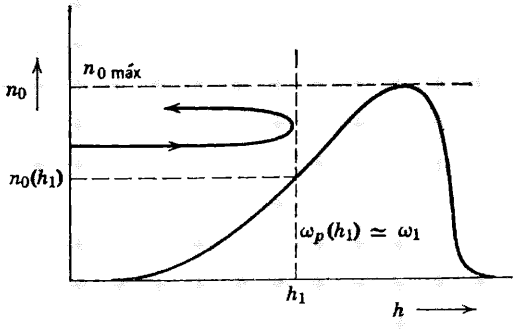


FIG. 7.11. Densidad electrónica como función de la altura en una capa de la ionosfera (esquemático).

inicial y la recepción de la señal reflejada, podemos hallar la altura h_1 a la que corresponde dicha densidad. Variando la frecuencia ω_1, y estudiando el cambio en los intervalos de tiempo, puede determinarse la densidad electrónica en función de la altura. Si la frecuencia ω_1 es demasiado alta, el índice de refracción no se anula y hay muy poca reflexión. La frecuencia por encima de la cual desaparecen las reflexiones determina la densidad electrónica máxima en una capa dada. Un tratamiento algo más cuantitativo utilizando la aproximación WKB se ve en el problema 7.9.

El comportamiento de $\epsilon_-(\omega)$ a bajas frecuencias es el responsable de un fenómeno peculiar de propagación magnetosférica, los llamados «silbidos». Cuando $\omega \to 0$, $\epsilon_-(\omega)$ tiende a más infinito como $\epsilon_- \simeq \epsilon_0(\omega_p^2/\omega\omega_B)$. Hay propagación, pero con un número de ondas [7.5]:

$$k_- \simeq \frac{\omega_p}{c}\sqrt{\frac{\omega}{\omega_B}}$$

Esto corresponde a un medio fuertemente dispersivo. El transporte de energía está gobernado por la velocidad de grupo [7.86] —véase la sección 7.8—, que es:

$$v_g(\omega) \simeq 2v_p(\omega) \simeq 2c\frac{\sqrt{\omega_B\omega}}{\omega_p}$$

Los impulsos de radiación de diferentes frecuencias viajan a velocidades diferentes; cuanto más baja seq la frecuencia, menor es la velocidad. Una tormenta en uno de los hemisferios genera un espectro de radiación amplio, parte del cual se propaga más o menos en la forma descrita por [7.67] a lo largo de las líneas del campo dipolar que es el campo magnético terrestre. Las componentes de alta frecuencia alcanzan el punto opuesto de la superficie antes, las frecuencias más bajas lo hacen después. Para 10^5 Hz o menos, esto da lugar a *silbidos,* así llamados porque la señal, al ser recibida en un receptor de radio, es un sonido parecido a un silbido que empieza con frecuencias elevadas y cae rápidamente a través del margen de frecuencias audible. Con los valores estimados más arriba para ω_p y ω_B y distancias del orden de 10^4 km, el lector puede verificar que la escala de tiempos para los silbidos se mide en segundos. Discusiones posteriores sobre el tema pueden encontrarse en las lecturas recomendadas al final del capítulo y en los problemas.

7.7. ONDAS EN UN MEDIO CONDUCTOR O DISIPATIVO

Hemos visto, en la sección 7.5, que la constante dieléctrica de un medio es en general compleja, tanto si el material es aislante como conductor. Para los aislantes la parte imaginaria de ϵ puede despreciarse para muchos propósitos, pero para los conductores esto dista de ser cierto. El comportamiento de las ondas en un medio conductor es de tal importancia práctica que lo consideraremos aquí separadamente, aun cuando la parte esencial ya se ha presentado en las secciones 7.5, *a)* y *c).* Se acostumbra a separar formalmente en dos partes la constante dieléctrica compleja del medio conductor, una «constante dieléctrica» real ϵ y una «conductividad» real σ. Esta separación puede considerarse meramente como un camino conveniente para expresar explícitamente las par-

tes real e imaginaria de la constante dieléctrica, pero tiene una base más intuitiva en el hecho de que la conductividad así definida es normalmente independiente de la frecuencia, al menos para las frecuencias de microondas o inferiores, como ya se ha discutido.

Si los campos en el conductor varían en el espacio y en el tiempo como $e^{ikx-i\omega t}$, el número de ondas k, según [7.56], [7.57] y [7.5] está dado por la expresión compleja:

$$k^2=\mu\epsilon\omega^2\left(1+i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \qquad [7.68]$$

El primer término corresponde a la contribución de la corriente de desplazamiento y el segundo a la de la corriente de conducción. Al extraer la raíz cuadrada para calcular k se eligen los signos de modo que se obtengan los resultados familiares para $\sigma=0$. Entonces, suponiendo que σ, μ y ϵ son reales, se encuentra:

$$k=\beta+i\frac{\alpha}{2}$$

donde

$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\}=\sqrt{\mu\epsilon}\,\omega\left[\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}\pm 1}{2}\right]^{1/2} \qquad [7.69]$$

Para un mal conductor $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\ll 1\right)$ tenemos, de forma aproximada:

$$k=\beta+i\frac{\alpha}{2}\simeq\sqrt{\mu\epsilon}\,\omega+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\,\sigma \qquad [7.70]$$

que es correcta hasta el primer orden en $(\sigma/\omega\epsilon)$. En este caso límite $\mathrm{Re}\,k\gg\mathrm{Im}\,k$, y la atenuación de la onda ($\mathrm{Im}\,k$) es independiente de la frecuencia, a no ser que se presente una posible variación de la conductividad con la frecuencia. Si se trata de un buen conductor $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\gg 1\right)$, y, por otra parte, $\alpha/2$ y β son aproximadamente iguales:

$$k\simeq(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \qquad [7.71]$$

sólo hemos tenido en cuenta los términos de menor orden en $(\omega\epsilon/\sigma)$.

Las ondas se propagan según $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t)$; son ondas transversales amortiguadas. Los campos pueden expresarse así:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_0e^{-\beta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}}\,e^{i\alpha\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t}\\ \boldsymbol{H}&=\boldsymbol{H}_0e^{-\beta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}}\,e^{i\alpha\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t}\end{aligned}\right\} \qquad [7.72]$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en la dirección $\boldsymbol{k}$. La ecuación de la divergencia para $\boldsymbol{E}$ nos dice que $\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{n}=0$, mientras que la ley de Faraday nos da:

$$\boldsymbol{H}_0=\frac{1}{\mu\omega}\left(\beta+i\frac{\alpha}{2}\right)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0 \qquad [7.73]$$

Esto nos dice que $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{E}$ no están en fase en un conductor. Si definimos el módulo y fase de k:

$$\left.\begin{aligned} |k| &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2} = \sqrt{\mu\epsilon}\,\omega\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4} \\ \phi &= \operatorname{tg}^{-1}\frac{\alpha}{2\beta} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [7.74]$$

la ecuación [7.73] puede escribirse así:

$$\boldsymbol{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4} e^{i\phi}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0 \qquad [7.75]$$

La interpretación de [7.75] es que $\boldsymbol{H}$ se retrasa respecto de $\boldsymbol{E}$ en el ángulo de fase ϕ, y la amplitud relativa es:

$$\frac{|\boldsymbol{H}_0|}{|\boldsymbol{E}_0|} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4} \qquad [7.76]$$

En los medios muy buenos conductores vemos que el campo magnético es muy grande comparado con el eléctrico, y que está retrasado casi 45 grados. La energía del campo es casi en su totalidad de naturaleza magnética.

Las ondas dadas en [7.72] muestran un amortiguamiento exponencial con la distancia. Esto quiere decir que una onda electromagnética que penetra en un conductor se amortigua al $1/e = 0{,}369$ de su amplitud inicial en una distancia:

$$\therefore\ \delta = \frac{1}{\beta} \simeq \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \qquad [7.77]$$

siendo la última forma una aproximación para los buenos conductores. La distancia δ se llama *profundidad* o *espesor de penetración*. Para un conductor como el cobre $\delta \simeq 0{,}85$ cm para las frecuencias de 60 c/s, y $\delta \simeq 0{,}71\times10^{-5}$ m para 100 Mc/s. Esta rápida atenuación de las ondas nos explica por qué en los circuitos de alta frecuencia la corriente circula solamente por la superficie de los conductores. Una consecuencia sencilla es que la inductancia a alta frecuencia de los elementos de un circuito es algo menor que la inductancia a baja frecuencia a causa de la expulsión de flujo del interior de los conductores.

El problema de la reflexión y refracción en una interfase entre medios conductores es bastante complicado y no será tratado por nosotros. El lector interesado en el tema puede consultar STRATTON, en la página 500 y siguientes para una discusión sobre este punto. Observaremos únicamente que, en la notación de la sección 7.3, la onda refractada tiene una variación espacial:

$$e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} = e^{i(k'\operatorname{sen} r)x + i(k'\cos r)z}$$

siendo el eje x paralelo a la superficie y el eje z normal a ella. Empleando la ley de Snell esto puede escribirse:

$$e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} = e^{i(k\operatorname{sen} i)x + i\sqrt{k'^2 - k^2\operatorname{sen}^2 i}\,z}$$

En un medio disipativo k'^2 es compleja (dada por [7.68]) y por ello el coeficiente de z es complejo. La onda se atenúa en la dirección z. Para un buen conductor, cuando se cumple [7.71], es $|k'^2| \gg k^2$ y la exponencial viene dada aproximadamente por

$$e^{ik' \cdot x} \simeq e^{-z/\delta}\, e^{i[(k \operatorname{sen} i)x + z/\delta]} \qquad [7.78]$$

La ecuación [7.78] representa una onda plana no homogénea, a la que nos habíamos referido al final de la sección 7.1, cuyas superficies de amplitud constante son paralelas a la superficie del conductor y cuyas superficies de fase constante están ligeramente inclinadas respecto a ésta, formando un ángulo (k sen i) con la superficie. En la sección 8.1 se examina de nuevo este problema con mayor detalle.

7.8. SUPERPOSICION DE ONDAS EN UNA DIMENSION. VELOCIDAD DE GRUPO

En las secciones anteriores se encontraron soluciones a las ecuaciones de Maxwell en forma de ondas planas y se discutieron sus propiedades. Se trataron sólo ondas monocromáticas, que tienen una frecuencia y un número de ondas definidos. En las circunstancias reales tales soluciones idealizadas no se presentan. Aun con la fuente de luz más monocromática, o el transmisor o receptor de radio mejor sintonizado, hemos de tratar con un conjunto de frecuencias, o longitudes de onda, finito (aunque posiblemente sea pequeño). Esta distribución puede originarse por la duración finita del impulso, por un ensanchamiento inherente a la fuente, o por muchas otras causas. Como las ecuaciones básicas son lineales, en principio resulta una cuestión elemental el construir la superposición lineal apropiada de soluciones con diferentes frecuencias. Sin embargo, hay, en general, varios aspectos nuevos a considerar.

1) Si el medio es dispersivo (esto es, si la constante dieléctrica es función de la frecuencia de los campos), la velocidad de fase no es la misma para cada una de las componentes en frecuencia de la onda. Como consecuencia, las diferentes componentes de la onda viajan con velocidades distintas y tienden a cambiar de fase unas con respecto a otras.

2) En un medio dispersivo, la velocidad de flujo de la energía puede diferir mucho de la velocidad de fase, o puede incluso carecer de significado preciso.

3) En un medio disipativo un impulso de radiación se atenúa a medida que se propaga con distorsión o sin ella, según que los efectos de disipación sean o no sean variables de forma sensible con la frecuencia.

Las ideas esenciales de estos efectos dispersivos y disipativos las encontramos implícitas en las series e integrales de Fourier (Sec. 2.8). Para mayor sencillez consideraremos ondas escalares en sólo una dimensión. Puede pensarse que la amplitud escalar $u(x, t)$ es una de las componentes del campo electromagnético. La solución fundamental de la ecuación de ondas [7.2] aparece de forma explícita en [7.6]. La relación entre frecuencia y número de ondas viene dada por [7.5] para el campo electromagnético. Cuando hacemos una superposición lineal podemos considerar bien a ω, bien a k como variable independiente. Al principio resulta más conveniente que sea k la variable independiente.

Para tomar en cuenta la posibilidad de dispersión, consideraremos que ω es en general una función de k:

$$\omega = \omega(k) \qquad [7.79]$$

Como las propiedades dispersivas son las mismas si la onda se propaga hacia la derecha o hacia la izquierda, ω deberá ser una función par de k, $\omega(-k)=\omega(k)$. Para casi todas las longitudes de onda ω es una función de variación suave con k. Pero, como hemos visto en la sección 7.5, en ciertas frecuencias hay regiones de «dispersión anómala» en que ω varía muy bruscamente en un intervalo estrecho de longitudes de onda. Utilizando la forma general [7.79] podemos aplicar igualmente bien la discusión que a continuación exponemos a las ondas electromagnéticas, ondas sonoras, ondas de materia de De Broglie, etc. Por el momento supondremos que k y $\omega(k)$ son reales, con lo cual excluimos los efectos disipativos.

Partiendo de las soluciones básicas [7.6] podemos construir una solución general de la forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t}\, dk \qquad [7.80]$$

El factor $1/\sqrt{2\pi}$ se ha incluido para que esté de acuerdo con la notación [2.44] y [2.45] de la integral de Fourier. La amplitud $A(k)$ es la que describe las propiedades de la superposición lineal de las distintas ondas. Viene dada por la transformada de la amplitud espacial $u(x, t)$, calculada en el instante $t=0$ *:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx}\, dx \qquad [7.81]$$

Si $u(x, 0)$ representa una onda armónica $e^{ik_0 x}$ para todos los valores de x, la relación de ortogonalidad [2.46] nos dice que

$$A(k) = \sqrt{2\pi}\, \delta(k - k_0),$$

lo que corresponde, tal como se requería, a una onda progresiva monocromática,

$$u(x, t) = e^{ik_0 x - i\omega(k_0)t}$$

Sin embargo, si para $t=0$, $u(x, 0)$ representa un tren de ondas finito de longitud del orden de Δx, como se indica en la figura 7.12, la amplitud $A(k)$ no es entonces una función delta. Más bien es una función en forma de campana, cuyo máximo está centrado en un número de ondas k_0 y cuya anchura es del orden de Δk. k_0 es el número de ondas predominante en la onda modulada $u(x, 0)$. Si Δx y Δk se definen como las desviaciones cuadráticas medias respecto a los valores medios de x y k [definidos en términos de las intensidades $|u(x, 0)|^2$ y $|A(k)|^2$] podemos llegar a la conclusión general:

$$\Delta x\, \Delta k \geqslant \tfrac{1}{2} \qquad [7.82]$$

* La discusión que sigue soslaya el problema de condiciones iniciales. Para una ecuación diferencial de segundo orden debemos especificar no sólo $u(x, 0)$, sino también $\partial u(x, 0)/\partial t$. Esta omisión no tiene consecuencias en lo que resta de la presente sección. En la siguiente, quedará remediado.

El lector puede comprobar con rapidez que para la mayor parte de los impulsos o paquetes de onda que no se interrumpen con demasiada violencia, el producto $\Delta x\,\Delta k$ está muy cerca del valor límite inferior de [7.82]. Esto quiere decir

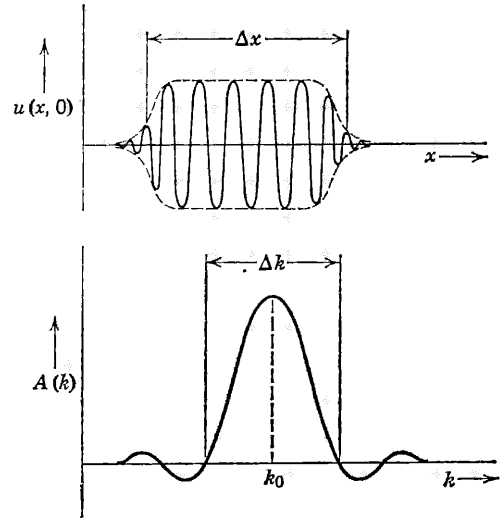


FIG. 7.12. Un tren de ondas armónicas de longitud finita y su espectro de Fourier en número de ondas.

que los trenes cortos, en que solamente están presentes unas pocas longitudes de onda, tienen una distribución muy ancha de números de ondas monocromáticas, y que, por el contrario, los trenes de ondas sinusoidales largos son casi monocromáticos. La relación [7.82] se aplica igualmente a distribuciones en tiempo y frecuencia.

Nos ocuparemos a continuación del comportamiento de un impulso o de un tren finito de ondas en función del tiempo. El impulso representado para $t=0$ en la figura 7.12 empieza a moverse en el transcurso del tiempo. Sus componentes de distinto número de ondas se moverán con velocidades de fase diferentes. Por tanto, hay una tendencia a que se pierda la coherencia inicial y el impulso se distorsionará variando su forma. Como mínimo, deberemos esperar que se propague con una velocidad bastante distinta de, p. ej., la media de las velocidades de fase de cada uno de sus componentes sinusoidales. En el caso general de tener un medio altamente dispersivo o un impulso muy agudo con una amplia distribución de números de onda presentes, el tratamiento del problema es muy complicado. Pero si consideramos un impulso con un espectro de números de onda no demasiado ancho, o bien un impulso en un medio para el que la frecuencia depende muy poco del número de ondas, podemos tratarlo de un modo aproximado como sigue. En el instante t, la onda viene dada por [7.80]. Si la distribución $A(k)$ es en forma de pico muy nítido alrededor de un valor k_0, podemos desarrollar la frecuencia alrededor de este valor de k:

$$\omega(k)=\omega_0+\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0(k-k_0)+\ldots \qquad [7.83]$$

Con lo que, sustituyendo en la integral, tenemos:

$$u(x, t) \simeq \frac{e^{i[k_0(d\omega/dk)|_0 - \omega_0]t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[x-(d\omega/dk)|_0 t]k}\, dk \qquad [7.84]$$

Según [7.81] y su inversa, vemos que la integral [7.84] es precisamente $u(x', 0)$, en donde $x' = x - (d\omega/dk)|_0\, t$:

$$u(x, t) \simeq u\left(x - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 t, 0\right) e^{i[k_0(d\omega/dk)|_0 - \omega_0]t} \qquad [7.85]$$

Lo cual nos muestra que, prescindiendo de un factor de fase global, el impulso se propaga sin distorsionar su forma con una velocidad llamada *velocidad de grupo*:

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 \qquad [7.86]$$

Si se asocia una densidad de energía con la amplitud de la onda (o con el cuadrado de su valor absoluto), resulta claro que según esta aproximación el transporte energético tiene lugar con la velocidad de grupo, ya que es ésta la velocidad con que se propaga el impulso.

Para las ondas luminosas la relación entre ω y k viene dada por:

$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)} \qquad [7.87]$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y $n(k)$ el índice de refracción expresado como función de k. La velocidad de fase es:

$$v_p = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)} \qquad [7.88]$$

que es mayor o menor que c, según que $n(k)$ sea menor o mayor que la unidad. Para la mayoría de las longitudes de onda ópticas $n(k)$ es mayor que la unidad en casi todas las sustancias. La velocidad de grupo [7.86] es:

$$v_g = \frac{c}{[n(\omega) + \omega(dn/d\omega)]} \qquad [7.89]$$

En esta ecuación es más conveniente considerar n como función de ω que de k. En la dispersión normal $(dn/d\omega) > 0$, y también $n > 1$; en este caso, la velocidad de flujo energético es menor que la velocidad de fase y menor también que c. No obstante, en las regiones de dispersión anómala $dn/d\omega$ puede hacerse grande y negativo, como puede deducirse de la figura 7.8. Entonces la velocidad de grupo difiere muchísimo de la velocidad de fase, haciéndose a menudo mayor que c *. En la figura 7.13 se muestra el comportamiento de las velocidades de grupo y fase como funciones de la frecuencia en las vecindades de una región de dispersión anómala.

* No hay motivo de alarma respecto a la violación de nuestras ideas sobre relatividad especial; aquí la velocidad de grupo ya no es un concepto útil. Un valor grande de $du/d\omega$ equivale a una variación rápida de ω como función de k. En consecuencia, las aproximaciones realizadas en [7.83] y siguientes ya no son válidas. El comportamiento del impulso es mucho más complicado.

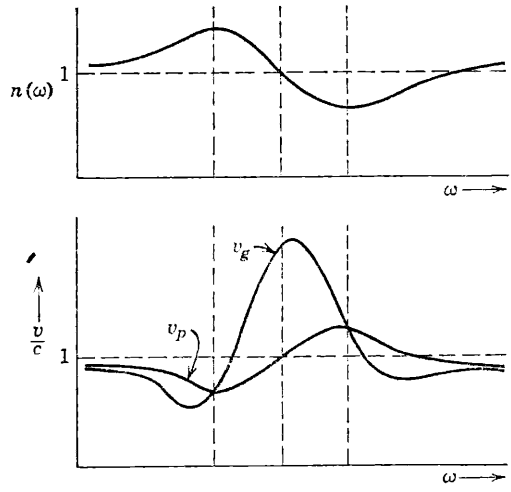


FIG. 7.13. Indice de refracción $n(\omega)$ como función de frecuencia ω en una región de dispersión anómala; velocidad de fase v_p y velocidad de grupo v_g como funciones de ω.

7.9. EJEMPLO DE LA DIFUSION DE UN IMPULSO AL PROPAGARSE EN UN MEDIO DISPERSIVO

Para ilustrar las ideas de la sección anterior y para apreciar la validez del concepto de velocidad de grupo, consideraremos ahora un modelo específico para la dependencia de la frecuencia con el número de ondas y calcularemos sin aproximaciones la propagación de un impulso en este medio modelo. Antes de concretar el modelo particular es necesario enunciar el problema de valores iniciales con más detalle de lo que se hizo en [7.80] y [7.81]. Como ya se observó, la especificación adecuada del problema de valores iniciales para la ecuación de onda exige los valores de la función $u(x, 0)$ y de la derivada temporal $\partial u(x, 0)/\partial t$. Si tomamos la parte real de [7.80] para obtener $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx - i\omega(k)t}\, dk + \text{c. c.} \qquad [7.90]$$

Entonces resulta fácil demostrar que $A(k)$ viene dado, en función de los valores iniciales, por:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\left[u(x, 0) + \frac{i}{\omega(k)}\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)\right] dx \qquad [7.91]$$

Como forma inicial del impulso, tomemos una oscilación modulada por una gaussiana:

$$u(x, 0) = e^{-x^2/2L^2}\cos k_0 x \qquad [7.92]$$

y supondremos por simplicidad que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \qquad [7.93]$$

Esto significa que en tiempos inmediatamente anteriores a $t=0$, la onda constaba de dos impulsos, ambos moviéndose hacia el origen, y tales que para $t=0$ se funden en la forma dada por [7.92]. Claro está que para tiempos posteriores será de esperar que cada impulso emerja nuevamente al otro lado del origen. Por consiguiente, la distribución inicial [7.92] debe esperarse que se desdoble en dos paquetes idénticos, uno moviéndose hacia la izquierda y el otro hacia la derecha. La amplitud de Fourier $A(k)$ para el impulso descrito por [7.92] y [7.93] es:

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\, e^{-x^2/2L^2}\cos k_0 x\, dx$$

$$=\frac{L}{2}\left[e^{-(L^2/2)(k-k_0)^2}+e^{-(L^2/2)(k+k_0)^2}\right] \qquad [7.94]$$

La simetría $A(-k)=A(k)$ es consecuencia de la presencia de dos impulsos que se alejan del origen, como se verá más adelante.

Si queremos calcular la forma de la onda en tiempos posteriores deberemos especificar $\omega=\omega(k)$. Utilizaremos un modelo que permite el cálculo exacto al tiempo que pone de manifiesto los efectos de dispersión esenciales. Supondremos:

$$\omega(k)=\nu\left(1+\frac{a^2k^2}{2}\right) \qquad [7.95]$$

donde ν es una frecuencia constante y a es una longitud constante, que es una longitud de onda típica para la cual los efectos de dispersión se hacen importantes. La ecuación [7.95] es una aproximación de la ecuación de dispersión correspondiente al plasma poco denso [7.59] o [7.61]. Como el impulso [7.92] es una onda modulada de número de ondas $k=k_0$, los argumentos aproximados de la sección anterior implican que los dos impulsos se desplazan con la velocidad de grupo:

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}(k_0)=\nu a^2 k_0 \qquad [7.96]$$

y permanecerán esencialmente sin cambiar de forma siempre que los impulsos no sean demasiado estrechos espacialmente.

El comportamiento exacto de la onda como función del tiempo viene dado por [7.90], en donde $A(k)$ se sustituye por [7.94]:

$$u(x,t)=\frac{L}{2\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-(L^2/2)(k-k_0)^2}+e^{-(L^2/2)(k+k_0)^2}\right]e^{ikx-i\nu t[1+(a^2k^2/2)]}\,dk \qquad [7.97]$$

Podemos llevar a cabo las integraciones completando apropiadamente los cuadrados en los exponentes. El resultado es:

$$u(x,t)=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\exp\left[-\dfrac{(x-\nu a^2k_0t)^2}{2L^2\left(1+\dfrac{ia^2\nu t}{L^2}\right)}\right]}{\left(1+\dfrac{ia^2\nu t}{L^2}\right)^{1/2}}\times\exp\left[ik_0x-i\nu\left(1+\frac{a^2k_0^2}{2}\right)t\right]+(k_0\to -k_0)\right\} \qquad [7.98]$$

La ecuación [7.98] representa dos impulsos que se desplazan en sentidos opuestos. La amplitud máxima de cada uno se propaga con la velocidad de grupo [7.96], y la envolvente moduladora conserva la forma de gaussiana. La anchura de la gaussiana no es constante, sino que aumenta con el tiempo. Esta anchura viene dada por:

$$L(t)=\left[L^2+\left(\frac{a^2vt}{L}\right)^2\right]^{1/2} \qquad [7.99]$$

Por tanto, los efectos de dispersión en un impulso son mayores (para un mismo tiempo) cuanto más aguda es la gaussiana. El criterio para que haya poco cambio de forma es que $L \gg a$. Por supuesto que para tiempos grandes la gaussiana aumenta su anchura linealmente en el tiempo:

$$L(t) \rightarrow \frac{a^2vt}{L} \qquad [7.100]$$

Pero el tiempo necesario para alcanzar esta forma asintótica depende de la razón (L/a). Se obtiene una medida de la rapidez con que se ensancha el impulso comparando $L(t)$, dado por [7.99], con $v_g t = va^2k_0t$. La figura 7.14 nos

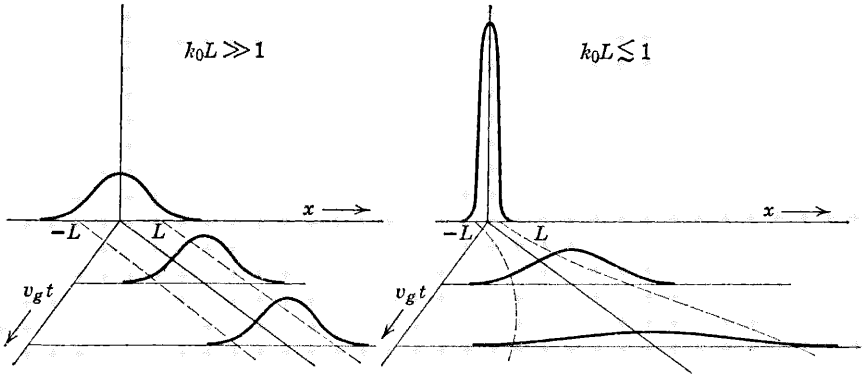


FIG. 7.14. Cambio de forma de un paquete de ondas al propagarse. El paquete ancho que contiene muchas longitudes de onda ($k_0L \gg 1$) se distorsiona poco, mientras que el paquete estrecho ($k_0L < 1$) se ensancha con rapidez.

presenta dos ejemplos en que aparecen como funciones del tiempo la posición de la amplitud máxima ($v_g t$) y las posiciones $v_g t \pm L(t)$, que indican el ensanche del impulso. A la izquierda, el impulso no es demasiado estrecho comparado con la longitud de onda k_0^{-1}; así, el ensanche no es demasiado rápido. Sin embargo, el impulso de la derecha es tan estrecho inicialmente que se ensancha con rapidez, de modo que, transcurrido un tiempo corto, apenas ya representa un impulso.

Aunque los resultados anteriores se hayan deducido para una forma inicial del impulso [7.92] y para una relación de dispersión [7.95], las deducciones cualitativas son de naturaleza general. En la sección 7.8 hemos visto que la velocidad media de un impulso es la velocidad de grupo $v_g = d\omega/dk = \omega'$. El ensanchamiento de un impulso se puede explicar notando que un impulso de anchura espacial inicial Δx_0 debe tener inherente en él un intervalo de núme-

ros de ondas $\Delta k \sim (1/\Delta x_0)$. Esto significa que la velocidad de grupo, cuando se calcula para varios valores de k del espectro correspondiente al impulso, presenta una dispersión de valores del orden de

$$\Delta v_g \sim \omega'' \Delta k \sim \frac{\omega''}{\Delta x_0} \qquad [7.101]$$

Transcurrido un tiempo t, esto implica que la posición puede estar en un intervalo del orden de $\Delta v_g t$. Si combinamos las distintas incertidumbres en la posición tomando la raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados, obtenemos para la anchura en el instante t:

$$\Delta x(t) \simeq \sqrt{(\Delta x_0)^2 + \left(\frac{\omega'' t}{\Delta x_0}\right)^2} \qquad [7.102]$$

Nótese que esta expresión [7.102] concuerda exactamente con la [7.99] si hacemos $\Delta x_0 = L$. La expresión [7.102] para $\Delta x(t)$ demuestra el resultado general de que, si $\omega'' \neq 0$, un impulso estrecho se disemina rápidamente debido a que posee un espectro en número de ondas muy amplio, y viceversa. Todas estas ideas pueden transportarse al campo de la mecánica cuántica de modo inmediato. Constituyen la base del principio de incertidumbre de Heisenberg. En mecánica ondulatoria, la frecuencia se identifica con el cociente entre la energía y la constante de Planck, mientras que el número de ondas es el ímpetu dividido por la constante de Planck.

El problema de los trenes de ondas en un medio que sea disipativo, a la vez que dispersivo, es bastante complicado. Algunos aspectos pueden discutirse analíticamente, pero las expresiones analíticas no resultan fácilmente interpretables desde el punto de vista físico. Los trenes de ondas se atenúan y distorsionan apreciablemente a medida que se propagan. El lector puede consultar el texto de STRATTON, páginas 301-309, donde encontrará una discusión del problema que incluye ejemplos numéricos.

7.10. LA CAUSALIDAD EN LA RELACION ENTRE D Y E. RELACIONES DE KRAMERS-KRONIG

a) *La no localidad en el tiempo*

Otra consecuencia de la dependencia con la frecuencia de $\epsilon(\omega)$ es que existe una relación no local en el tiempo entre el desplazamiento $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t)$ y el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$. Si las componentes monocromáticas de frecuencia ω están relacionadas por:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, \omega) = \epsilon(\omega) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, \omega) \qquad [7.103]$$

la dependencia con el tiempo puede construirse mediante superposición por el teorema de Fourier. Tratando como un parámetro la coordenada espacial, las integrales de Fourier en los dominios del tiempo y de la frecuencia pueden escribirse:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, \omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

y

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, \omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t')\, e^{i\omega t'}\, dt' \qquad [7.104]$$

Para $\boldsymbol{E}$ podemos escribir expresiones análogas. Sustituyendo $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, \omega)$ mediante [7.103], nos da:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\epsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, \omega)e^{-i\omega t}\, d\omega$$

Si ahora introducimos la representación de $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, \omega)$ en la integral obtenemos:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\, \epsilon(\omega)e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\, e^{i\omega t'}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t')$$

Haciendo la hipótesis de que podemos intercambiar el orden de las integraciones, esta última expresión puede escribirse:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t)=\epsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)+\int_{-\infty}^{\infty}G(\tau)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t-\tau)\, d\tau \qquad [7.105]$$

en la que $G(\tau)$ es la transformada de Fourier de $\epsilon_0\chi_e=\epsilon(\omega)-\epsilon_0$:

$$G(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\epsilon(\omega)-\epsilon_0]e^{-i\omega t}\, d\omega \qquad [7.106]$$

Las ecuaciones [7.105] y [7.106] dan una relación no local entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$, en la que $\boldsymbol{D}$ en el instante t depende del campo eléctrico en instantes distintos de t *. Si $\epsilon(\omega)$ es independiente de ω para cualquier ω, [7.106] conduce a que $G(\tau) \propto \delta(\tau)$ y se obtiene la relación instantánea, pero si $\epsilon(\omega)$ varía con ω, $G(\tau)$ no se anula para ciertos valores de τ distintos de cero.

b) *Modelo sencillo para $G(\tau)$. Sus limitaciones*

Para ilustrar el carácter de la relación que implican [7.105] y [7.106] consideraremos una variante del índice de refracción [7.51] que contenga una sola resonancia:

$$\epsilon(\omega)-\epsilon_0=\epsilon_0\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)^{-1} \qquad [7.107]$$

---

* Pueden reconocerse las ecuaciones [7.103] y [7.105] como un ejemplo del teorema de la convolución de las integrales de Fourier si $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $a(\omega)$, $b(\omega)$, $c(\omega)$ son dos conjunto de funciones relacionadas dos a dos por las fórmulas de inversión de Fourier [7.104], y es

$$c(\omega)=a(\omega)b(\omega)$$

entonces, con las condiciones adecuadas en lo relativo a la integrabilidad se cumple:

$$C(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(t')B(t-t')\, dt'$$

La transformada $G(\tau)$ de la susceptibilidad en este modelo es:

$$G(\tau)=\frac{\epsilon_0\omega_p^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\,d\omega \qquad [7.108]$$

La integral puede evaluarse en el plano complejo, considerando que el integrando tiene polos en la parte inferior del plano en

$$\omega_{1,2}=-\frac{i\gamma}{2}\pm\nu_0; \qquad \text{siendo } \nu_0^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4} \qquad [7.109]$$

Para $\tau<0$ puede cerrarse el contorno de integración en el semiplano superior sin afectar el valor de la integral. Como el integrando es regular dentro del contorno cerrado la integral será nula. Para $\tau>0$, el contorno se cierra en el semiplano inferior y la integral es igual a $-2\pi i$ veces los residuos de los dos polos. La función $G(\tau)$ es, pues:

$$G(\tau)=\epsilon_0\omega_p^2 e^{-\gamma\tau/2}\frac{\operatorname{sen}\nu_0\tau}{\nu_0}\theta(\tau) \qquad [7.110]$$

siendo $\theta(\tau)$ la función escalón unidad [$\theta(\tau)=0$ para $\tau<0$ y $\theta(\tau)=1$ para $\tau>0$]. Para la constante dieléctrica [7.51] la función $G(\tau)$ es justamente la superposición lineal de términos como los de [7.110]. El núcleo $G(\tau)$ es ondulatorio con la frecuencia característica del medio y está amortiguado con la constante de amortiguamiento de los osciladores electrónicos. La no localidad en el tiempo de la relación entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$ está, pues, confinada a tiempos del orden de γ^{-1}. Como γ es la anchura en frecuencia de las líneas espectrales y éstas son del orden de 10^7-10^9 s^{-1} típicamente, la separación de la simultaneidad es del orden de 10^{-7}-10^{-9} s. Para frecuencias por encima de la región de microondas contribuyen al desplazamiento $\boldsymbol{D}$ en un instante dado de tiempo muchos ciclos de las oscilaciones del campo eléctrico con la función $G(\tau)$ como peso.

La ecuación [7.105] es no local en el tiempo, pero no en el espacio. La aproximación es válida supuesto que la variación espacial de los campos aplicados tiene lugar en una escala que es grande comparada con las dimensiones que intervienen en la aparición de la polarizabilidad atómica o molecular. Para cargas ligadas, esta última escala es del orden de las dimensiones atómicas o menor, y, por consiguiente, el concepto de constante dieléctrica como función exclusivamente de ω podemos esperar que sea válido para frecuencias mucho más allá de la región visible. Sin embargo, para los conductores la presencia de cargas libres con recorridos libres medios de tamaño macroscópico hace que la hipótesis de una $\epsilon(\omega)$ o $\sigma(\omega)$ sencilla falle a frecuencias mucho más bajas. Para un buen conductor como el cobre hemos visto que el coeficiente de amortiguamiento (que corresponde a una frecuencia de colisión) es del orden de $\gamma_0\sim 3\times10^{13}$ s^{-1} a la temperatura ambiente. A la temperatura del helio líquido la constante de amortiguamiento puede ser 10^{-3} veces el valor correspondiente a la temperatura ambiente. Tomando la velocidad de Bohr en el hidrógeno ($c/137$) como típica para las velocidades de los electrones en los metales, encontramos recorridos libres medios del orden de $L\sim c/(137\gamma_0)$ $\sim 10^{-2}$ cm a la temperatura del helio líquido. Por otra parte, la profundidad de penetración ordinaria δ [7.77] puede ser mucho más pequeña, del orden de 10^{-5} o 10^{-6} cm para las frecuencias de microondas. En tales circunstancias

la ley de Ohm debe reemplazarse por una expresión no local. La conductividad se convierte en una magnitud tensorial que depende del número de ondas $\boldsymbol{k}$ y de la frecuencia ω. Las correspondientes separaciones de la conducta ordinaria se conocen colectivamente con el nombre de *efecto pelicular anómalo.* Pueden emplearse para trazar las superficies de Fermi de los metales *. Efectos no locales semejantes se presentan en los superconductores, en los que las propiedades electromagnéticas implican una longitud de coherencia del orden de 10^{-4} cm **. Con esta mención breve de las limitaciones de [7.105] y las áreas en que han sido fructíferas las generalizaciones, volvemos a la discusión sobre el contenido físico de [7.105].

c) *Causalidad y dominio de analiticidad de* $\epsilon(\omega)$

El aspecto más obvio y fundamental del núcleo [7.110] es que se anula para $\tau < 0$. Esto significa que en el instante t sólo los valores del campo eléctrico *anteriores* a dicho instante entran en la determinación del desplazamiento, de acuerdo con nuestras ideas fundamentales acerca de la causalidad en los fenómenos físicos. Por tanto, la ecuación [7.105] puede escribirse:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t) = \epsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) + \int_0^\infty G(\tau)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t-\tau)\, d\tau \qquad [7.111]$$

De hecho, esta es la relación causal, lineal y espacialmente local más general que puede escribirse entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$ en un medio isótropo y uniforme. Su validez va más allá de cualquier modelo específico para $\epsilon(\omega)$. A partir de [7.106], la constante dieléctrica puede expresarse en función de $G(\tau)$ en la forma:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \int_0^\infty G(\tau) e^{i\omega\tau}\, d\tau \qquad [7.112]$$

Esta relación tiene varias consecuencias interesantes. A partir de que $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ y, por consiguiente, $G(\tau)$ son reales en [7.111] podemos deducir de [7.112] que cuando ω sea compleja:

$$\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega^*) \qquad [7.113]$$

Además, si se considera [7.112] como una representación de $\epsilon(\omega)$ en el plano complejo ω, esto demuestra que $\epsilon(\omega)$ *es una función analítica de* ω *en el semiplano superior,* suponiendo que $G(\tau)$ es finita para todo τ. Es necesario invocar el requisito «físicamente razonable» de que sobre el eje real $G(\tau) \to 0$ cuando $\tau \to \infty$ para asegurar que $\epsilon(\omega)$ sea también analítica sobre él. Esto es cierto para los dieléctricos, pero no para los conductores, en los que $G(\tau) \to \sigma$ cuando $\tau \to \infty$ y $\epsilon(\omega)$ tiene un polo simple en $\omega = 0$ ($\epsilon \to i\sigma/\omega$ en $\omega \to 0$). Entonces, salvo un posible polo en $\omega = 0$, la constante dieléctrica $\epsilon(\omega)$ es analítica para $\mathrm{Im}\,\omega \geqslant 0$ como un resultado directo de la relación causal entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$. Estas

* A. B. PIPPARD, en *Reports on Progress in Physics,* **33**, 176 (1960), y el artículo titulado «The dynamics of conduction electrons» del mismo autor, en *Low Temperature Physics,* Les Houches 1961, editores; C. DE WITT, B. DREYFUS y P. G. DE GENNES, Gordon and Breach, Nueva York (1962). Este último artículo ha sido publicado por separado por la misma editorial.

** Véase por ejemplo el artículo «Superconductivity», de M. TINKHAM, en *Low Temperature Physics,* libro citado anteriormente.

propiedades pueden verificarse naturalmente para los modelos discutidos en las secciones 7.5, *a)* y 7.5, *c)*.

El comportamiento de $\epsilon(\omega)-\epsilon_0$ para valores ω grandes puede relacionarse con el comportamiento de $G(\tau)$ en las proximidades de $\tau=0$. Un desarrollo en serie de Taylor de G en [7.112] conduce a la serie asintótica:

$$\epsilon(\omega)-\epsilon_0=i\frac{G(0)}{\omega}-\frac{G'(0)}{\omega^2}+\ldots$$

en la que el argumento de G y sus derivadas es $\tau=0^+$. No resulta de carácter físico que $G(0^-)=0$, y, por el contrario, $G(0^+)\neq 0$. Por tanto, el primer término de la serie está ausente y $\epsilon(\omega)-\epsilon_0$ decae a altas frecuencias como ω^{-2}, justamente como se halló en [7.59] para el modelo del oscilador. La serie asintótica muestra, de hecho, que las partes real e imaginaria de $\epsilon(\omega)-\epsilon_0$ para valores reales y grandes de ω se comporta como:

$$\text{Re}\,[\epsilon(\omega)-\epsilon_0]=0\left(\frac{1}{\omega}\right);\qquad \text{Im}\,\epsilon(\omega)=0\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \qquad [7.114]$$

Estas formas asintóticas dependen solamente de que sea posible el desarrollo en serie de Taylor de $G(\tau)$ alrededor de $\tau=0^+$.

d) *Relaciones de Kramers y Kronig*

Que $\epsilon(\omega)$ sea analítica en el semiplano superior ω permite el empleo del teorema de Cauchy para relacionar las partes real e imaginaria de $\epsilon(\omega)$ sobre el eje real. El teorema de Cauchy, para cualquier punto z situado dentro de un contorno cerrado C en el semiplano superior ω, nos da:

$$\epsilon(z)=\epsilon_0+\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{[\epsilon(\omega)-\epsilon_0]}{\omega'-z}\,d\omega'$$

A continuación, el contorno C se escoge de modo que esté formado por el eje real y un gran semicírculo en el infinito del semiplano superior. Vemos en el desarrollo asintótico que acabamos de discutir, o en los resultados específicos de la sección 7.5, *d)*, que $\epsilon-\epsilon_0$ se anula de modo suficientemente rápido en el infinito para que no haya contribución a la integral a lo largo de la semicircunferencia. Por tanto, la integral de Cauchy puede escribirse:

$$\epsilon(z)=\epsilon_0+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\epsilon(\omega')-\epsilon_0]}{\omega'-z}\,d\omega' \qquad [7.115]$$

siendo ahora z cualquier punto del semiplano superior y estando la integral extendida a lo largo del eje real. Tomando el límite cuando la frecuencia se aproxima al eje real desde la parte superior, escribimos, para $z=\omega+i\epsilon$ en [7.115]:

$$\epsilon(\omega)=\epsilon_0+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\epsilon(\omega')-\epsilon_0]}{\omega'-\omega-i\epsilon}\,d\omega' \qquad [7.116]$$

Para ω real la presencia de $i\epsilon$ en el denominador es un recordatorio del hecho

de la distorsión del contorno a lo largo del eje real describiendo una semicircunferencia infinitesimal por *debajo* del punto $\omega' = \omega$. Formalmente, el denominador puede escribirse:

$$\frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} = P\left(\frac{1}{\omega - \omega'}\right) + \pi i \delta(\omega' - \omega) \qquad [7.117]$$

en la que P significa parte principal. La función delta sirve para extraer la contribución de la pequeña semicircunferencia que va en un sentido positivo alrededor del polo en $\omega' = \omega$. Empleando [7.117] y reajustando términos, [7.116] se convierte en:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\epsilon(\omega') - \epsilon_0]}{\omega' - \omega} d\omega' \qquad [7.118]$$

Las partes real e imaginaria de esta ecuación son:

$$\begin{aligned} \text{Re } \epsilon(\omega) &= \epsilon_0 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \text{Im } \epsilon(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\text{Re } \epsilon(\omega') - \epsilon_0]}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned} \qquad [7.119]$$

Estas relaciones y las reseñadas inmediatamente después, se denominan *relaciones de dispersión* o *relaciones de Kramers-Kronig*. Fueron deducidas por primera vez, independientemente, por H. A. KRAMERS (1927) y R. DE L. KRONIG (1926). La propiedad de simetría [7.113] demuestra que Re $\epsilon(\omega)$ es par en ω, mientras que Im $\epsilon(\omega)$ es impar. Las integrales de las [7.119] pueden, así, transformarse de modo que aparezcan únicamente frecuencias positivas en la forma:

$$\begin{aligned} \text{Re } \epsilon(\omega) &= \epsilon_0 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \, \text{Im} \epsilon(\omega)}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \text{Im } \epsilon(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{[\text{Re } \epsilon(\omega) - \epsilon_0]}{\omega'^2 - \omega} d\omega' \end{aligned} \qquad [7.120]$$

Al escribir [7.119] y [7.120] hemos supuesto tácitamente que $\epsilon(\omega)$ era regular para $\omega = 0$. Para los conductores el polo simple en $\omega = 0$ puede hacerse aparecer por separado sin demasiada complicación adicional.

Las relaciones de Kramers-Kronig resultan de validez muy general, se deducen casi exclusivamente de la hipótesis de existencia de la relación causal [7.111] entre la polarización y el campo eléctrico. El conocimiento experimental de Im $\epsilon(\omega)$ a partir de los estudios de absorción permite el cálculo de Re $\epsilon(\omega)$ a partir de la primera ecuación de las [7.120]. La relación entre absorción y dispersión anómala, indicada en la figura 7.8, está contenida en estas relaciones. La presencia de una línea o banda de absorción muy estrecha en $\omega = \omega_0$ puede aproximarse tomando

$$\text{Im } \epsilon(\omega') \simeq \epsilon_0 \frac{\pi K}{2\omega_0} \delta(\omega' - \omega_0) + \ldots$$

siendo K una constante; los puntos suspensivos indican las otras contribucio-

nes (que varían lentamente) a Im ϵ. Entonces la primera de las ecuaciones [7.120] da:

$$\text{Re } \epsilon(\omega) \simeq \bar{\epsilon} + \epsilon_0 \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad [7.121]$$

para el comportamiento de Re $\epsilon(\omega)$ cerca de, pero no exactamente en, $\omega = \omega_0$. El término $\bar{\epsilon}$ represeta la parte de Re ϵ lentamente variable que procede de contribuciones más remotas a Im ϵ. La aproximación [7.121] presenta la variación rápida de Re $\epsilon(\omega)$ en la proximidad de una línea de absorción dibujada en la figura 7.8 para líneas de anchura finita. Una descripción más realista de Im ϵ conduciría a una expresión para Re ϵ en acuerdo completo con el comportamiento descrito en la figura 7.8. La demostración de esto se deja para los problemas al final del capítulo.

Relaciones del tipo general de [7.119] o [7.120] que conectan los aspectos dispersivo y de absorción de un proceso son extremadamente útiles en todas las áreas de la física. Su amplia aplicabilidad surge de que para su deducción sólo son necesarias un número muy pequeño de hipótesis físicamente bien fundadas. Al final del capítulo se dan referencias de su aplicación en física de partículas, así como en física del estado sólido. Terminamos mencionando que de [7.120] pueden obtenerse dos *reglas de suma.* Se demostró en la sección 7.5, *d),* dentro del contexto de un modelo específico, que la constante dieléctrica a altas frecuencias viene dada por [7.59]. De hecho, la forma de [7.59] es muy general, como se demostró al final de la parte *c).* La frecuencia de plasma puede definirse, por consiguiente, por medio de [7.59] como:

$$\omega_p^2 = \lim_{\omega \to \infty} \left\{ \omega^2 \left[\frac{\epsilon_0 - \epsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] \right\}$$

Suponiendo que Im $\epsilon(\omega)$ caiga a altas frecuencias como da [7.114], la primera de las relaciones de Kramers-Kronig da una *regla de suma* para ω_p^2:

$$\omega_p^2 = \frac{2}{\epsilon_0 \pi} \int \omega \, \text{Im } \epsilon(\omega) \, d\omega \qquad [7.122]$$

Algunas veces esta relación se conoce como regla de suma para las intensidades de los osciladores. Puede demostrarse que es equivalente a [7.52] para la constante dieléctrica [7.51], pero obviamente es más general.

La segunda regla de suma se refiere a la integral extendida a la parte real de $\epsilon(\omega)$ y se deduce de la segunda de las relaciones [7.120]. Con la hipótesis de que Re $\epsilon(\omega') - \epsilon_0 = (-\epsilon_0 \omega_p^2/\omega'^2 + 0(1/\omega'^4)$ para todo $\omega' > N$, es inmediato demostrar que para $\omega > N$:

$$\text{Im } \epsilon(\omega) = \frac{2}{\pi\omega} \left\{ -\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{N} + \int_0^N [\text{Re } \epsilon(\omega') - \epsilon_0] \, d\omega' \right\} + 0\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$$

En la parte *c)* se demostró que, excluyendo los conductores y eliminando el resultado no físico de que $G(0^+) \neq 0$, Im $\epsilon(\omega)$ se comporta a frecuencias elevadas como ω^{-3}. Por consiguiente, se deduce que la expresión entre paréntesis debe anularse. Nos vemos, así, guiados a la *segunda regla de suma*:

$$\frac{1}{N} \int_0^N \text{Re } \epsilon(\omega) \, d\omega = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{N^2} \right) \qquad [7.123]$$

que establece, para $N \to \infty$, que el valor medio de Re $\epsilon(\omega)$ a todas las frecuencias es igual a la ϵ_0. Para los conductores, la regla de suma de la frecuencia de plasma [7.122] aún se cumple, pero la segunda regla de suma (llamada a veces *relación de superconvergencia*) tiene un término adicional $-2\pi\sigma(0)/N$, en el segundo miembro (véase el problema 7.15). ALTARELLI y otros * discuten estas reglas de suma ópticas, así como algunas otras.

7.11. LLEGADA DE UNA SEÑAL DESPUES DE SU PROPAGACION A TRAVES DE UN MEDIO DISPERSIVO

En las secciones previas se han considerado algunos de los efectos de la dispersión. Queda por tratar un aspecto importante, la llegada de un tren de ondas, que inicialmente tiene un principio bien definido, a un punto remoto. ¿Cómo se inicia y aumenta la señal? Si la velocidad de fase o la velocidad de grupo son mayores que la velocidad de la luz en el vacío para ciertas componentes importantes en el espectro de frecuencias, ¿se propaga la señal más rápidamente de lo permitido por la causalidad y la relatividad? ¿Puede darse una definición no ambigua para el tiempo de llegada? Estas preguntas fueron examinadas por SOMMERFELD y BRILLOUIN de modo autorizado en los trabajos publicados en los *Annalen der Physik,* en 1914 **. Los trabajos originales, más los trabajos subsiguientes de BRILLOUIN, han sido publicados por éste en su libro *Propagación de ondas y velocidad de grupo.* En la *Optica,* de SOMMERFELD, capítulo III, figura un resumen. La discusión completa es larga y técnicamente complicada. El lector puede obtener más detalles en la bibliografía citada.

Para concretar, consideremos un tren de ondas planas que incide normalmente desde el vacío sobre un medio semiinfinito y uniforme de índice de refracción $n(\omega)$ que ocupa la región $x > 0$. La amplitud del campo eléctrico de la onda, según las ecuaciones de Fresnel [7.42] y lo indicado en el problema 7.12, viene dada por:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{1+n(\omega)}\right] A(\omega) e^{ik(\omega)x - i\omega t}\, d\omega \qquad [7.124]$$

siendo:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_i(0, t) e^{i\omega t}\, dt \qquad [7.125]$$

la transformada de Fourier del campo eléctrico real incidente calculada para $x = 0^-$, justamente fuera del medio. El número de ondas $k(\omega)$ es:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) \qquad [7.126]$$

y en general es complejo, con una parte imaginaria positiva que corresponde

* M. ALTARELLI, D. L. DEXTER, H. M. NUSSENZVEIG y D. V. SMITH, *Phys. Rev.*, **136**, 4502 (1972).

** A. SOMMERFELD, *Ann. Phys.*, **44**, 177 (1914); I. BRILLOUIN, *Ann. Phys.*, **44**, 203 (1914).

a la absorción de energía durante la propagación. Muchos medios son lo bastante transparentes como para que el número de ondas pueda tratarse como real para la mayoría de los propósitos, pero siempre habrá cierto amortiguamiento presente. (Observemos entre paréntesis que en [7.124] se emplea la frecuencia y no el número de ondas como variable independiente. El cambio respecto a la práctica seguida en las secciones anteriores 7.8 y 7.9 está dictado porque ahora nos interesa el desarrollo *temporal* de la onda en un punto fijo del espacio.)

a) *Propiedades generales de* $A(\omega)$

Con el fin de discutir los aspectos generales de la propagación debemos conocer algo de $A(\omega)$ como función de ω compleja. Supóngase que la onda incidente tiene un frente bien definido que alcanza el punto $x=0$ en el instante $t=0$. Entonces es cierto que:

$$u_i(0, t)=0 \quad \text{para} \quad t<0 \tag{7.127}$$

Esta condición, junto con ciertos requisitos matemáticos que son razonables físicamente, es tanto necesaria como suficiente para asegurar que $A(\omega)$ es analítica en la mitad superior del plano ω. El razonamiento es completamente análogo a la demostración de que la representación [7.112] implica que $\epsilon(\omega)$ sea analítica en la mitad superior del plano ω. En la mitad inferior del plano ω, $A(\omega)$ tiene singularidades determinadas por la forma exacta de $u_i(x, t)$. El comportamiento para $|\omega| \to \infty$ está gobernado por el modo en que $u_i(x, t)$ varía en tiempos muy cortos. Por ejemplo, si

$$u_i(0, t) \to \frac{at^m}{m!} \quad \text{para } t \to 0$$

entonces:

$$A(\omega) \to \frac{a}{2\pi}\left(\frac{i}{\omega}\right)^{m+1} \quad \text{para } |\omega| \to \infty \tag{7.128}$$

b) *Propiedades generales de* $n(\omega)$ *en el plano complejo* ω

Las características de la propagación dependen evidentemente del índice de refracción $n(\omega)$ y para obtener resultados específicos es preciso escoger un modelo determinado. Sin embargo, algunos aspectos se deducen de propiedades generales de $n(\omega)$: el dominio en que es analítica y su comportamiento cuando $|\omega| \to \infty$. Por sencillez, discutiremos el modelo clásico simple para $n^2(\omega)$ descrito en la sección 7.5, con una sola frecuencia de resonancia. La constante dieléctrica $\epsilon(\omega)=\epsilon_0 n^2(\omega)$ es, pues, de la forma:

$$n^2(\omega)=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma} \tag{7.129}$$

siendo ω_0 la frecuencia de resonancia, γ la constante de amortiguamiento ($\gamma \geqslant 0$) y ω_p la frecuencia de plasma del medio [7.60]. La estructura de la singularidad de $n(\omega)$ está determinada por la localización de los polos y ceros de $n^2(\omega)$ en el plano ω. Los ceros de $n^2(\omega)$ están dados por:

$$\omega_a=\omega_1-\frac{i\gamma}{2}, \quad \omega_b=-\omega_1-\frac{i\gamma}{2}; \quad \text{siendo } \omega_1^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}$$

Los polos de $n(\omega)$ están situados en

$$\omega_c = \omega_2 - \frac{i\gamma}{2}; \qquad \omega_d = -\omega_2 - \frac{i\gamma}{2}, \qquad \text{siendo } \omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^4}{4}$$

Así, pues, el índice de refracción puede escribirse:

$$n(\omega) = \left[\frac{(\omega-\omega_a)(\omega-\omega_b)}{(\omega-\omega_c)(\omega-\omega_d)}\right]^{1/2} \qquad [7.130]$$

Las ramas de las raíces cuadradas se eligen de modo que $n(\omega) \to +1$ para $|\omega| \to \infty$; las líneas de ramificación se indican en la figura 7.15. El índice de refracción y también el número de ondas, como se ve, son analíticos en la mitad superior del plano ω *.

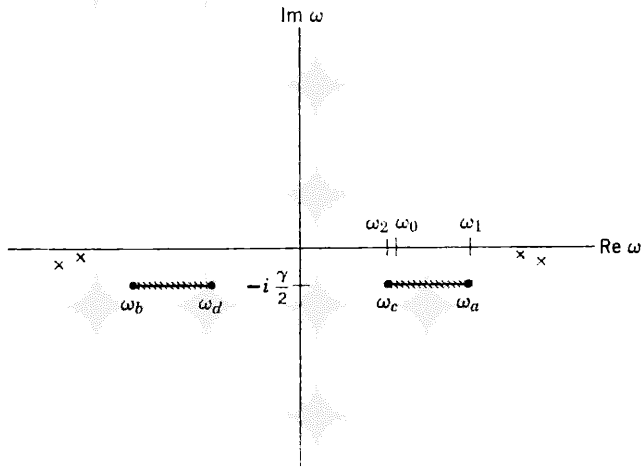


FIG. 7.15. Cortes que definen las singularidades del modelo de resonancia única [7.129] para el índice de refracción $n(\omega)$. Para medios transparentes las líneas de ramificación yacen mucho más próximas al eje real (pero aún por debajo) que lo aquí indicado. Modelos más realistas para $n(\omega)$ presentan estructuras más complicadas de cortes en todo el semiplano inferior ω. Las cruces marcan las posibles posiciones de las singularidades de $A(\omega)$.

La inspección de [7.129] muestra que para frecuencias grandes el índice de refracción varía como

$$n(\omega) \to 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}, \qquad \text{para } |\omega| \to \infty \qquad [7.131]$$

Este resultado es válido de modo más general de lo que indicaría el modelo, como se ha comentado en conexión con [7.59].

* Las líneas de ramificación se eligen de modo que $\text{Re}\, n(\omega) > 0$ en el eje real. Nótese que tanto $n(\omega)$ como $\epsilon(\omega)$ satisfacen las relaciones de Kramers-Kronig [7.120].

c) *Límite superior a la velocidad de propagación de la luz en la materia*

La prueba de que ninguna señal puede propagarse más rápidamente que la velocidad de la luz en el vacío, cualesquiera que sean en detalle las propiedades del medio, resulta ahora inmediata. Formalmente evaluaremos la amplitud [7.124] por integración en el plano complejo. Como $n(\omega) \to 1$ cuando $|\omega| \to \infty$, el argumento de la exponencial en [7.124] se convierte en $i\omega(x-ct)/c$ para valores de ω grandes, y se puede cerrar el contorno en la mitad superior del plano para $x > ct$ y en la mitad inferior para $x < ct$. Siendo $n(\omega)$ y $A(\omega)$ analíticas en el semiplano superior, el integrando completo de [7.124] es analítico allí, y el teorema de Cauchy demuestra que la integral se anula. Hemos demostrado que:

$$u(x, t) = 0, \quad \text{para } (x - ct) > 0 \qquad [7.132]$$

suponiendo que $A(\omega)$ y $n(\omega)$ sean analíticas para $\operatorname{Im} \omega > 0$ y que $n(\omega) \to 1$ cuando $|\omega| \to \infty$. No interviene el modelo específico escogido para $n(\omega)$. La ecuación [7.132] establece, en conjunción con [7.127], que ninguna señal se propaga con una velocidad mayor que c, cualquiera que sea el medio.

d) *Método de la fase estacionaria*

Con el fin de ir más allá de la prueba de causalidad, es necesario disponer de algún medio para calcular la amplitud [7.124] para varios instantes $t > x/c$. SOMMERFELD y BRILLOUIN emplearon el método de la *máxima pendiente* * para calcular [7.124] en varios regímenes. Nosotros utilizaremos el método de la *fase estacionaria,* menos riguroso y menos exacto para obtener una interpretación cualitativa. En el libro citado anteriormente, BRILLOUIN compara ambos métodos.

El método de la fase estacionaria se dirige por sí mismo al problema de calcular aproximadamente integrales del tipo general:

$$I = \int F(\omega) e^{i\phi(\omega)}\, d\omega \qquad [7.133]$$

siendo $F(\omega)$ una función que varía de modo relativamente lento con ω y $\phi(\omega)$ es una fase que en general es grande y variable rápidamente. Tanto $F(\omega)$ como $\phi(\omega)$ pueden depender de parámetros que se mantienen constantes durante la integración. Las oscilaciones rápidas de $e^{i\phi}$ en la mayor parte del intervalo de integración significan que el integrando por término medio se hace casi cero. Sólo se presentan excepciones a esta compensación cuando $\phi(\omega)$ es «estacionaria», esto es, cuando $\phi(\omega)$ tiene un extremo. Por consiguiente, la integral puede estimarse hallando los sitios en que $\phi(\omega)$ tiene una derivada nula, evaluando aproximadamente la integral en las proximidades de cada uno de estos puntos y sumando después las contribuciones.

Si $\phi(\omega)$ tiene nula la primera derivada en $\omega = \omega_s$, puede desarrollarse en serie de Taylor en las proximidades de dicho punto en la forma:

$$\phi(\omega) = \phi_s + \tfrac{1}{2}\phi_s''(\omega - \omega_c)^2 \qquad [7.134]$$

---

* Véase JEFFREYS y JEFFREYS, sección 17.04, o BORN y WOLF, apéndice III, para encontrar una discusión sobre este método, desarrollado originalmente por P. DEBYE.

Se ha utilizado el subíndice s para indicar que ϕ y su segunda derivada se calculan en $\omega=\omega_s$. Como $F(\omega)$ varía lentamente, la contribución a la integral del punto de fase estacionaria es, aproximadamente:

$$I_s \simeq F(\omega_s)e^{i\phi_s}\int e^{(i/2)\phi_s''(\omega-\omega_s)^2}\,d\omega$$

La integral restante puede reconocerse que es una integral de Fresnel (véase MAGNUS y OBERHETTINGER, pág. 96). El resultado es:

$$I \simeq \left(\frac{2\pi i}{\phi_s''}\right)^{1/2} F(\omega)e^{i\phi(\omega_s)} \qquad [7.135]$$

en la que ω_s se define mediante $(\partial\phi/\partial\omega)=0$ en $\omega=\omega_s$. Si hay más de un punto de fase estacionaria en el margen de integración, la integral se aproxima mediante una suma de términos como el [7.135].

La aproximación de fase estacionaria [7.135] concuerda con el término dominante del método de la máxima pendiente suponiendo que $\phi(\omega)$ sea real. Sin embargo, si ϕ es complejo, el método de la fase estacionaria puede conducir a resultados erróneos. En el presente problema ϕ contiene el índice de refracción, que, en general, es complejo. No obstante, emplearemos el método de la fase estacionaria para obtener una idea cualitativa de cómo se desarrolla la señal. Las consideraciones más cuidadas de Brillouin proporcionan una justificación *a posteriori* de nuestro procedimiento, que es algo superficial.

e) *Discusión cualitativa*

Puede considerarse que la amplitud [7.124] tiene la forma de [7.133] con una fase:

$$\phi(\omega)=k(\omega)x-\omega t \qquad [7.136]$$

en la que $k(\omega)$ está dado por [7.126]. Los puntos de fase estacionaria, definidos mediante $\partial\phi/\partial\omega=0$, satisfacen la condición:

$$\frac{cdk}{d\omega}=\frac{ct}{x}, \quad \text{para } ct>x \qquad [7.137]$$

La figura 7.16 presenta el primer miembro de [7.137] como función de la frecuencia para el modelo sencillo de una sola resonancia [7.129] con $\gamma=0$. El primer miembro de [7.137] es igual a c/v_g, siendo v_g la velocidad de grupo a la frecuencia ω. Siendo $\gamma=0$ la velocidad de grupo es menor que c para cualquier ω, excepto para $\omega_0<\omega<\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}$, en donde es imaginaria pura. Si $\gamma\neq 0$ el comportamiento en esta región es más complicado, como se indica en la figura 7.13, pero aquí ignoraremos esta complicación. También se muestra en la figura 7.16 $ck/\omega=c/v_p$.

La región de frecuencias que contribuye a la amplitud en el instante t se determina gráficamente hallando la intersección de una línea horizontal de ordenada $(ct/x)>1$ con la curva continua de la figura 7.16. Para instantes inmediatamente posteriores a $t_0=x/c$ se ve que el punto de fase estacionaria se halla en $\omega\to\infty$. Con la aproximación [7.131] para el comportamiento de $n(\omega)$

para ω grandes encontramos que el punto de fase estacionaria está dado por:

$$\omega_s \simeq \omega_p \sqrt{\frac{t_0}{2(t-t_0)}} \qquad [7.138]$$

y, naturalmente, es negativo. La aproximación de fase estacionaria [7.135] da:

$$u(x,t) \simeq \frac{a}{2\pi}\left(\frac{\pi}{\xi}\right)^{1/2}\left(\frac{t-t_0}{\xi}\right)^{(m/2)-(1/4)} e^{-2i\sqrt{\xi(t-t_0)}+i(\pi/2)(m+1/2)} + \text{c. c.} \qquad [7.139]$$

siendo:

$$\xi = \frac{\omega_p^2 x}{2c} = \frac{\omega_p^2 t_0}{2} \qquad [7.140]$$

Al escribir [7.139] hemos utilizado el comportamiento específico [7.128] de $A(\omega)$ para valores grandes de ω. Nos reservamos el comentario detallado de [7.139] hasta la próxima sección, en la que se deduce un resultado más exacto. Es sufi-

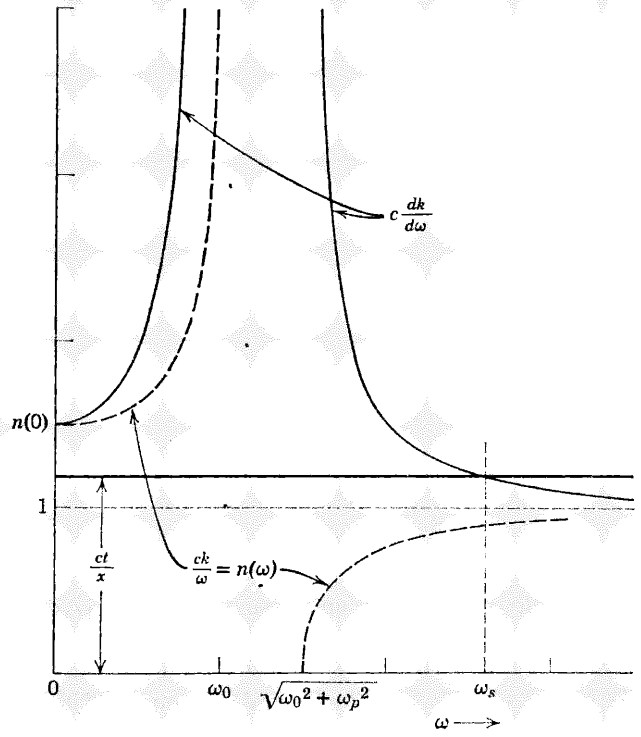


FIG. 7.16. Las funciones $cdek/d\omega = c/v_g$ y $n(\omega) = ck/\omega = c/v_p$, frente a la frecuencia para el modelo de resonancia única [7.129] sin amortiguamiento para el índice de refracción. El comportamiento lejos de la resonancia es razonable físicamente, pero no lo es en el intervalo $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ (este intervalo es el existente entre ω_2 y ω_1 en la figura 7.15). Los puntos de fase estacionaria están dados por la intersección de la línea horizontal (ct/x) con la curva continua $cdk/d\omega$. Para cada punto de fase estacionario $\omega = \omega_s$ hay también otro en $\omega = -\omega_s$, puesto que las funciones dibujadas son pares en ω.

ciente hacer notar que la amplitud inicial es muy pequeña, y que oscila con una frecuencia (normalmente muy grande) que depende sólo de las propiedades gruesas del medio (ω_p) y de la distancia recorrida ($x = ct_0$). Esta parte de la señal se denomina *primer precursor* o *precursor de Sommerfeld* y es la primera que llega.

En instantes posteriores, a medida que la línea horizontal ct/x de la figura 7.16 sube, el punto de fase estacionaria se desplaza hacia las frecuencias más bajas, a la región en que el comportamiento detallado de $n(\omega)$ y la localización de sus polos y puntos de corte de las ramas deben tomarse en cuenta para dar una descripción exacta de la amplitud. Sin embargo, en general, la amplitud sigue siendo muy pequeña. Sólo cuando el tiempo transcurrido alcanza el valor

$$t_1 = k'(0)x = \frac{n(0)x}{c} \qquad [7.141]$$

tiene lugar un cambio cualitativo. Este instante marca la llegada del *segundo precursor* o *precursor de Brillouin*. La razón de este cambio cualitativo puede deducirse de la figura 7.16. Para $t = t_1$ se corta por primera vez la región más baja de la curva $dk/d\omega$ y $\omega = 0$ *se convierte en un punto de fase estacionaria.* Esto, por sí mismo, causaría un cambio cualitativo, haciendo que la amplitud oscilara con un periodo considerablemente más largo que en instantes anteriores. Sin embargo, el aspecto más importante es que para $\omega = 0$ se *anula la segunda derivada de* $k(\omega)$ *. Esto significa que $\phi''_s = 0$. En tales circunstancias el resultado de la fase estacionaria [7.135] es que la respuesta es infinita. Naturalmente, la amplitud no se hace infinita, pero puede suponerse que es mucho mayor que antes y de periodo relativamente grande cuando $t \simeq t_1$. Para obtener un resultado, aunque sea aproximado, para el segundo precursor es necesario prolongar más allá el desarrollo cuadrático [7.134]. Más adelante examinaremos esta cuestión brevemente.

Después de la llegada del segundo precursor hay dos puntos de fase estacionaria, en nuestro modelo sencillo, de modo que la amplitud se hace más complicada. Resulta de mayor importancia el hecho de que $A(\omega)$ empiece a dominar el comportamiento de la integral [7.124]. Es inapropiado usar el método de la fase estacionaria. La señal ha llegado y, como veremos más adelante, su amplitud se comporta en el tiempo como si se tratara de la onda inicial que se propaga con la velocidad de fase apropiada.

Ahora quedan ya claros los aspectos cualitativos de la propagación de la señal. Cierta parte muy pequeña de la onda se propaga con la velocidad de la luz en el vacío. Esta señal inicial, llamada precursor primero, o de Sommerfeld, es muy pequeña y oscila muy rápidamente. En un instante posterior t_1 [7.141] tiene lugar un cambio brusco cuando $\omega = 0$ pasa a ser punto de fase estacionaria. Entonces, llega el precursor segundo, o de Brillouin, de amplitud y periodo mayores. La señal sólo alcanza el comportamiento de régimen estacionario en instantes posteriores que dependen de las particularidades de $n(\omega)$ y de la onda incidente. Resulta evidente que estudiar cómo crece la señal de modo exacto es una cuestión complicada, pero la causalidad y la relatividad resultan ser obedecidas independientemente de los detalles en las propiedades dispersivas del medio

* Para otros modelos más elaborados del índice de refracción la anulación de $d^2k/d\omega^3$ en un punto de fase estacionaria puede ocurrir para $\omega \neq 0$. La discusión puede modificarse para tratar estos casos, pero no nos molestaremos en hacerlo aquí. Se da al lector la oportunidad de hacerlo así en el problema 7.17.

y no puede darse una definición del instante de llegada de una señal que no sea ambigua. El uso general consiste en tomar la velocidad de grupo de aquella componente en frecuencia que sea dominante como velocidad de señal y de transporte de la energía. Esto es suficiente en la mayoría de los casos, pero es evidente que utilizando detectores lo bastante sensibles la velocidad de señal podría aproximarse para cualquier medio a la velocidad de la luz en el vacío.

f) *El primer precursor*

Siguiendo a SOMMERFELD podemos obtener una expresión más exacta que la [7.139] para la amplitud en los primeros instantes. Como hemos visto, la amplitud en instantes inmediatamente posteriores al $t=t_0$ está determinada por el comportamiento del integrando de [7.124] a frecuencias grandes. Así pues, resulta plausible deformar el camino de integración en [7.124] hasta convertirlo en una semicircunferencia de radio R grande en la mitad superior del plano ω. Con tal contorno pueden utilizarse los términos dominantes de $A(\omega)$ y $n(\omega)$, dados respectivamente en [7.128] y [7.131], para escribir la ecuación [7.124] en la forma aproximada:

$$u(x,t) \simeq \frac{ai^m}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{\omega^{m+1}} e^{-i[(t-t_0)\omega+\xi/\omega]} \qquad [7.142]$$

en la que el contorno se recorre en sentido positivo (contra las agujas del reloj) alrededor de *toda* la circunferencia de radio R. Se ve que, supuesto que $(t-t_0)>0$, la contribución adicional, añadida al extender el contorno a la circunferencia completa, es despreciable cuando R sea suficientemente grande. Haciendo el cambio de variable $w=-i(t-t_0)\omega$, la ecuación [7.142] se transforma en:

$$u(x,t) \simeq \frac{a}{2\pi i} (t-t_0)^m \oint \frac{dw}{w^{m+1}} e^{w-[\xi(t-t_0)/w]}$$

Esta integral puede identificarse, salvo un factor de proporcionalidad, con la representación integral de una función de Bessel con m entero. Su forma explícita es:

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^m \oint \frac{dw}{w^{m+1}} e^{w-(z^2/4w)} \qquad [7.143]$$

en la que el contorno es alrededor del origen. Por consiguiente, la amplitud [7.142] será:

$$u(x,t) \simeq a \left(\frac{t-t_0}{\xi}\right)^{m/2} J_m[2\sqrt{\xi(t-t_0)}] \qquad [7.144]$$

Al comparar esta expresión con la aproximación [7.139], que da el método de la fase estacionaria, se advierte que hay acuerdo si se sustituye en [7.144] la función de Bessel por su forma asintótica [3.91]. La ecuación [7.144] da una descripción correcta hasta $t=t_0$. El método de la fase estacionaria falla muy cerca de $t=t_0$ porque el punto de fase estacionaria se aleja al infinito y a partir de [7.133] las expresiones ya no son válidas.

Antes de examinar con detalle el comportamiento del primer precursor, hagamos notar por qué [7.144] es sólo aproximada. La confianza del lector en

el teorema de Cauchy puede ser tan grande que imagine que no se ha hecho aproximación alguna. ¡Todo lo que hicimos fue deformar el contorno y considerar el integrando en el límite apropiado para este contorno! Pero ahí está el defecto. Cuando $(t-t_0)$ o R son grandes, la exponencial de [7.142] se hace muy grande en el semiplano superior. Esto significa que existen contribuciones de otros términos de $A(\omega)$ y $n(\omega)$ que no pueden despreciarse. Por ejemplo, el término que sigue en el desarrollo de $u_i(0, t)$ en [7.128] varía como t^{m+1}. Esto da una contribución a $A(\omega)$ que varía como $(1/\omega)^{m+2}$ y conduce a un término análogo a [7.144], en el que m está reemplazado por $m+1$. Evidentemente, [7.144] sólo describe la amplitud para tiempos $(t-t_0)$ pequeños en comparación con el periodo dominante que esté presente en la onda incidente.

Como ya se ha destacado, el primer precursor es pequeño y oscila muy rápidamente, con una frecuencia que depende sólo de las propiedades gruesas del medio y de la distancia recorrida, y no depende en absoluto de la frecuencia de la onda incidente. La frecuencia de las oscilaciones del precursor decrece con el tiempo debido a que el argumento de la función de Bessel es una raíz cuadrada. Si se define la frecuencia local $\omega_1(t)$ en función del semiperiodo entre ceros sucesivos de la función de Bessel, se encuentra que $\omega_1(t) \simeq \sqrt{\xi/(t-t_0)}$, con el valor inicial, $\omega_1(0) \simeq \xi$. La amplitud crece muy lentamente con el tiempo, variando como $(t-t_0)^{1/4}$ para $m=1$. El parámetro de frecuencia ξ, dado por [7.140], depende de la frecuenca de plasma del medio. Si se supone que contribuyen todos los electrones de cada átomo, el cuadrado de la frecuencia de plasma es igual a

$$\omega_p^2 = \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m}$$

siendo Z el número atómico y N el número de átomos por unidad de volumen. En función de la densidad ρ, en kg/m^3, el número atómico Z y el peso atómico A, resulta:

$$\omega_p = 0{,}138\sqrt{\frac{Z\rho}{A}} \times 10^{16} \text{ seg}^{-1}$$

o

$$\hbar\omega_p = 0{,}91\sqrt{\frac{Z\rho}{A}} \text{ eV}$$

Son valores representativos:

Aire en condiciones normales de presión y temperatura:	$\omega_p \simeq 1{,}1 \times 10^{15}$ s^{-1} ($\hbar\omega_p \simeq 0{,}73$ eV)
Grafito:	$\omega_p \simeq 3{,}9 \times 10^{16}$ s^{-1} ($\hbar\omega_p \simeq 25{,}0$ eV)
Agua:	$\omega_p \simeq 3{,}3 \times 10^{16}$ s^{-1} ($\hbar\omega_p \simeq 21{,}0$ eV)

Tomando como valor típico de $\omega_p \simeq 10^{16}$ s^{-1} y una distancia de 1 mm (que corresponde a 2 000 longitudes de onda de luz visible), ξ es del orden de $\xi \simeq 1{,}7 \times \times 10^{20}$ s^{-1}. Esto corresponde a una longitud de onda de 10^{-9} cm, la décima parte de las dimensiones lineales de los átomos. Como nuestro tratamiento está basado en una descripción del medio como continuo, no puede esperarse que las oscilaciones rápidas contenidas en [7.144] sean seguras cuantitativamente. Al progresar el tiempo la frecuencia disminuye en forma de raíz cuadrada. A pesar de esta

disminución de frecuencia, es evidente, al menos para nuestro ejemplo, que antes de que transcurra una fracción apreciable del periodo de la onda incidente, tienen lugar muchísimos ciclos del precursor, con sólo suponer que la longitud de onda de aquella corresponde a la región óptica o mayor.

g) *El segundo precursor*

El precursor segundo, o de Brillouin, se presenta cuando el tiempo transcurrido corresponde a las proximidades de t_1 [7.141]. Como puede verse en la figura 7.16, este es el instante en que, en el método de la fase estacionaria, la contribución dominante a la integral procede de los alrededores de $\omega=0$ *. Como en el punto $\omega=0$ tanto ϕ'' como ϕ' se anulan, resulta inadecuado el resultado simple [7.135]. Para mejorarlo desarrollaremos $\phi(\omega)$, dado por [7.136], en las proximidades de $\omega=0$, conservando hasta términos en ω^3:

$$\phi(\omega)=\omega(t_1-t)+\frac{x}{6}\left(\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)_0\omega^3 \qquad [7.145]$$

Para el modelo sencillo [7.129] del índice de refracción la tercera derivada de $k(\omega)$ es:

$$\left(\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)_0=\frac{3\omega_p^2}{cn(0)\omega_0{}^4}$$

Por consiguiente, la amplitud [7.124] está dada aproximadamente por:

$$u(x,t)\simeq\frac{4A(0)}{1+n(0)}\left[\frac{3z}{x\left(\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)_0}\right]^{1/3}\int_0^\infty\cos\left[\frac{3}{2}z\left(\frac{v^3}{3}\pm v\right)\right]dv \qquad [7.146]$$

siendo:

$$z=\frac{2\sqrt{2}\,|t-t_1|^{3/2}}{3\left(x\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)^{1/2}} \qquad [7.147]$$

y se debe tomar el signo positivo (negativo) en el integrando cuando $t<t_1$ ($t>t_1$). La integral que figura en [7.146] es una integral de Airy, estudiada por primera vez por G. B. AIRY (1838) al analizar la intensidad de la luz en las proximidades de una cáustica (de interés para el arco iris). Puede expresarse en términos de funciones de Bessel de orden 1/3, en la forma siguiente:

$$\int_0^\infty\cos\left[\frac{3}{2}z\left(\frac{v^3}{3}\pm v\right)\right]dv=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{3}}K_{1/3}(z)\\[2ex]\dfrac{\pi}{3}[J_{1/3}(z)+J_{-1/3}(z)]\end{cases} \qquad [7.148]$$

Puede verse que, según las propiedades de las funciones de Bessel que aparecen en [7.148], el segundo precursor tiene un carácter exponencial decre-

* También hay un punto de fase estacionaria por encima de ω_0, pero la contribución de dicha región es mucho menor que la de $\omega=0$ y puede despreciarse.

ciente para instantes anteriores a $t=t_1$ [cuando (t_1-t) es creciente], y una naturaleza ondulatoria cuando $(t-t_1)$ es positivo *. En la figura 7.17 se ha dibujado la amplitud en las proximidades de $t=t_1$. El comportamiento es semejante al de una función de ondas mecanocuánticas en un punto clásico de retroceso

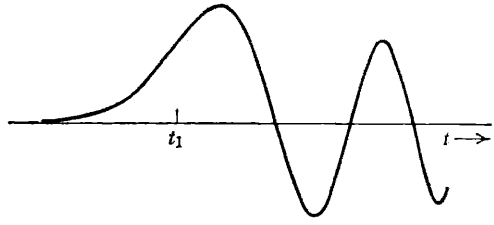


FIG. 7.17. El comportamiento del precursor segundo, o de BRILLOUIN, en función del tiempo. La amplitud está dada por [7.146]. La contribución que se desprecia del punto de fase estacionaria en $\omega > \sqrt{\omega_0^2+\omega^2}$ en la figura 7.16 introduciría un rizado de alta frecuencia superpuesto sobre el comportamiento aquí indicado del tipo integral de Airy.

del movimiento. De hecho, las matemáticas son esencialmente las mismas aunque la física sea diferente.

Puede estimarse, a partir de la posición del primer cero de la amplitud para $t > t_1$, que la frecuencia inicial del segundo precursor es $\omega_{II}(0) \sim \pi (9xk''')^{-1/3}$. Utilizando el modelo simple de una sola resonancia con $\omega_0 \simeq \simeq \omega_p \simeq 10^{16}$ s^{-1} y $x=1$ mm hallamos $\omega_{II}(0) \sim 10^{14}$ s^{-1}. Este valor es muy impreciso y específico del modelo y de los parámetros escogidos, pero ilustra que el segundo precursor es de frecuencia mucho menor que el primero. Como la dependencia con la distancia del primero y del segundo precursor es, respectivamente de la forma x y $x^{-1/3}$ la diferencia cualitativa resulta amplificada cuando las distancias recorridas en el medio son grandes.

h) *La señal en régimen estacionario*

Después de la llegada de los dos precursores la amplitud alcanza finalmente un estado estacionario que está directamente relacionado con la onda incidente. Para comprender cómo ocurre esto, considérese la estructura de singularidades indicada en la figura 7.15, e imagínese que se deforma el camino de

* Los resultados particulares [7.146] y [7.148] dependen de que $A(0) \neq 0$. Si $A(0)=0$, las expresiones se modifican en detalle, pero cualitativamente son las mismas. Concretamente, si $A'(0) \neq 0$, se reemplaza $A(0)$ en [7.146] por $iA'(0)$, el factor $(3z/xk''')$ está elevado a la potencia 2/3 en lugar de a la potencia 1/3 y la integral cambiada por

$$\int_0^\infty v \operatorname{sen}\left[\tfrac{2}{3} z \left(\frac{v^3}{3} \pm v\right]\right) dv = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(z) \\ \dfrac{\pi}{3}[J_{-2/3}(z) - J_{2/3}(z)] \end{cases}$$

El comportamiento de esta amplitud a ambos lados de $t=t_1$ es semejante al mostrado en la figura 7.17.

integración de [7.124] de modo que rodee las singularidades de $A(\omega)$ (las cruces en la figura 7.15) y los puntos de corte de $n(\omega)$. El integrando de [7.124] contiene el factor $e^{i\omega(t-t_0)}$. Por tanto, las contribuciones de las integrales de contorno alrededor de las líneas de ramificación de $n(\omega)$ deben contener el factor

$$e^{-(\gamma/2)(t-t_0)}$$

Si todas las singularidades de $A(\omega)$ están situadas más próximas al eje real que los cortes de $n(\omega)$ (lo que corresponde a que incidan una o más ondas cuasi-monocromáticas), tales singularidades acabarán por dominar en la integral sobre las de $n(\omega)$. Entonces, la amplitud vendrá dada con precisión por una integración a lo largo exclusivamente del contorno que rodee las singularidades de $A(\omega)$.

Por ejemplo, consideremos una onda incidente de la forma

$$u_i(0, t) = \theta(t) e^{-\epsilon t} \operatorname{sen} (\beta - \nu t) \qquad [7.149]$$

siendo $\theta(t)$ la función escalón, β y ν constantes y se supone que ϵ es infinitesimal. La transformada de Fourier de esta onda incidente es:

$$A(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{i\beta}}{\omega - \nu + i\epsilon} - \frac{e^{-i\beta}}{\omega + \nu + i\epsilon} \right) \qquad [7.150]$$

con polos simples en $\omega = \pm\nu - i\epsilon$. La contribución de estos polos a la integral [7.124] da la amplitud:

$$u(x, t) = \frac{e^{i[k(\nu)x - \nu t + \beta - (\pi/2)]}}{1 + n(\nu)} + \text{c. c.} \qquad [7.151]$$

Esta onda corresponde a una onda incidente monocromática de frecuencia ν que se está reduciendo en amplitud por la refracción en la superficie del medio y que después se propaga con su velocidad de fase $v_p = \nu/k(\nu)$. Si hay absorción la amplitud disminuye a medida que atraviesa el medio, de acuerdo con el carácter complejo de $n(\nu)$.

i) *Observaciones experimentales de los precursores*

Los resultados aproximados [7.144] para el primer precursor y [7.146] para el segundo, así como la llegada de la señal principal, han sido verificados mediante cálculos numéricos muy exactos en situaciones típicas cuando la onda incidente es sinusoidal y para el modelo sencillo de una sola resonancia para $\epsilon(\omega)$ con un amortiguamiento pequeño *. Muy al principio, la señal inicial está representada con gran precisión por la aproximación de Sommerfeld [7.144] con función de Bessel. La amplitud es muy pequeña y de alta frecuencia. El precursor de Brillouin, cuando llega en el instante t_1 [7.141], es de la forma [7.146], pero tiene superpuesto un rizado de alta frecuencia, como podría esperarse. La señal incidente, esto es, algo que se parezca a la forma de onda en $x = 0$, empieza a ser distinguible en un instante dado por $t = x/v_g$, siendo v_g la velocidad de grupo asociada con la frecuencia incidente y es plenamente visible poco después.

* R. N. CAHN, comunicación particular.

De mayor interés es la observación experimental de los precursores de Sommerfeld y Brillouin descrita por PLESHKO y PALÓCZ *. Una línea de transmisión coaxial rellena con un material ferrimagnético imanado longitudinalmente presenta una dispersión característica para su modo TEM que es casi la dibujada en la figura 7.16, supuesto que la velocidad del «vacío» se sustituya por $c' = c/\sqrt{\epsilon_r}$, siendo ϵ_r la constante dieléctrica relativa en ausencia de imanación. Las frecuencias de resonancia y de plasma son función del campo magnético interno H_i y de la imanación de saturación M_s dadas por $\omega_0^2 = \gamma^2(H_i + M_s)H_i$ y $\omega_p^2 = (M_s/H_i)\omega_0^2$, siendo γ la relación giromagnética. Así, pues, la variación del campo magnético aplicado puede emplearse para cambiar las propiedades de dispersión del sistema. El material empleado fue un granate de itrio con impurezas de aluminio. En una serie de experimentos se hacía incidir un tren de ondas sinusoidal con una frecuencia $\nu/2\pi$ (en la notación de [7.149]) de 0,625 GHz y tiempo de subida de aproximadamente 1 ns. En la figura 7.18 se

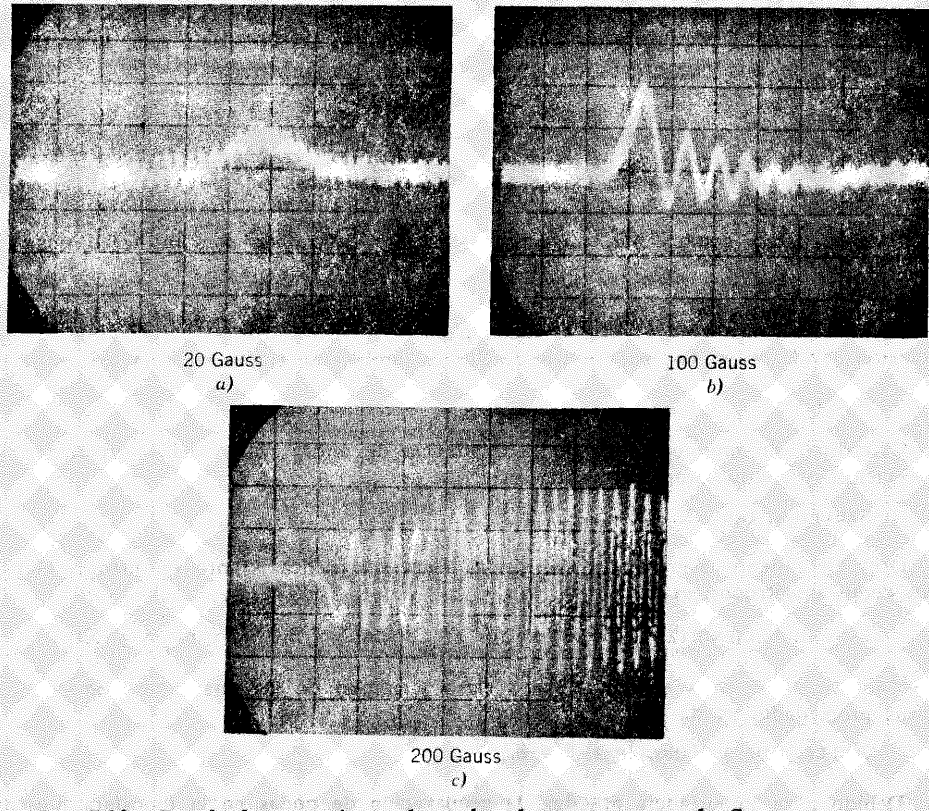


FIG. 7.18. Resultados experimentales sobre los precursores de SOMMERFELD y BRILLOUIN en medios dispersivos. Se aplica una señal sinusoidal con tiempo de subida muy corto a una línea de transmisión coaxial llena de un granate cuya dispersión es semejante a la de la figura 7.16. Las frecuencias ω_0 y ω_p dependen del campo magnético aplicado. *a)* Primero y segundo precursores visibles, con la señal sinusoidal en corte. *b)* Segundo precursor (compárese con la figura 7.17). La señal principal aún en corte. *c)* Segundo precursor seguido de la señal que se propaga. (Figura publicada por cortesía de P. PLESHKO e I. PALÓCZ.)

* P. PLESHKO e I. PALÓCZ, *Phys. Rev. Letters*, **22**, 1201 (1969); IBM Research Division, report RC 2488 (27 mayo 1969).

muestran los resultados para tres valores diferentes del campo magnético aplicado. Para 20 gauss la frecuencia ν yace entre ω_0 y $\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}$ y, por consiguiente, la señal principal no se propaga. Pero son visibles los precursores de Sommerfeld y Brillouin, como se muestra en la figura 7.18, *a*. Para 100 gauss, la señal principal todavía no se propaga: las condiciones son tales que, en tanto que el primer precursor se pierde entre el ruido de fondo, el segundo es visible claramente y se parece de modo satisfactorio a la forma de onda de la figura 7.17. El tiempo de llegada está de acuerdo dentro de los errores experimentales con el tiempo t_1. En la figura 7.17, *c*, se ve el segundo precursor seguido inmediatamente por la propagación de la señal principal.

Aunque hay pocas razones para cuestionar las bases fundamentales del tratamiento de la propagación de una señal en un medio dispersivo debido a SOMMERFELD y BRILLOUIN, no obstante resulta satisfactorio descubrir evidencias experimentales de que los métodos aproximados de solución (fase estacionaria o pendiente máxima) mantienen lo esencial de los aspectos físicos y matemáticos. Se deja para los problemas la aplicación de la teoría a la llegada de «silbidos» con sus características de dispersión no habituales.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

Toda la óptica como fenómeno electromagnético es tratada con autoridad por:

BORN y WOLF.

El primer capítulo se refiere a ondas planas y, entre otros aspectos, polarización, reflexión y refracción. Los parámetros de Stokes también se tratan en él, y asimismo en

STONE.

Una discusión muy completa de la incidencia de ondas planas sobre superficies de dieléctricos y conductores viene dada en:

STRATTON, cap. IX.

Otro tratamiento acertado de las ondas electromagnéticas, tanto en medios isótropos como anisótropos, es el de

LANDAU y LIFSHITZ, *Electrodynamics of Continuous Media*, caps. X y XI.

Un tratamiento más elemental, pero claro y amplio de las ondas electromagnéticas y sus propiedades se da en:

ADLER, CHU y FANO, caps. 7 y 8.

Debido a su importancia práctica, la propagación de ondas en la ionosfera presenta una bibliografía extensa. Los aspectos físicos y matemáticos se hallan en:

BUDDEN, *Radio waves in the ionosphere*;
BUDDEN, *Lectures on Magnetoionic theory*;
WAIT.

El tema especial de los silbidos se discute con detalle en

R. A. HELLIWELL, *Whistlers and Related Ionospheric Phenomena*, Stanford University Press (1965).

Un resumen de la física básica implicada en la interacción de la luz con la materia puede encontrarse en el artículo semipopular de

V. F. WEISSKOPF, *Scientific American*, **219**, 3, 60 (septiembre 1968).

La propagación de ondas en medios dispersivos se discute detalladamente en el libro de

BRILLOUIN.

La distorsión y atenuación de impulsos en materiales disipativos se estudian con detalle en:

STRATTON, págs. 301-309.

Las relaciones de dispersión de Kramers-Kronig y sus generalizaciones encuentran aplicaciones en muchas áreas de la física. Algunos ejemplos en física de altas energías son:

S. GASIOROWICZ, *Elementary Particle Physics*, Wiley, Nueva York (1965).
G. KALLEN, *Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1964).
G. R. SCREATON, ed., *Dispersion Relations* (Scottish Universities' Summer School, 1960), Oliver and Boyd, Edimburgo y Londres (1961).

Algunos ejemplos en física del estado sólido se discuten en el artículo de

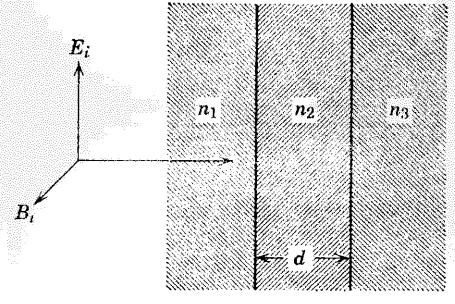
F. STERN, en *Solid State Physics*, vol. 15, editado por F. Seitz y D. Turnbull, Academic Press, Nueva York (1963), págs. 299-408.

PROBLEMAS

7.1. Para cada uno de los conjuntos de parámetros de Stokes dado más abajo, dedúzcase la amplitud del campo eléctrico, tanto en polarización lineal como circular como base y realícese un dibujo, semejante a la figura 7.4, que muestre las longitudes de los ejes de una de las elipses y sus orientaciones:

a) $s_0=3, \quad s_1=-1, \quad s_2=2, \quad s_3=-2$
b) $s_0=25, \quad s_1=0, \quad s_2=24, \quad s_3=7$

7.2. Sobre una interfase en forma de capas de la figura incide una onda plana. Los índices de refracción de los tres medios no permeables son n_1, n_2, n_3. El espesor de la capa intermedia es d. Los otros dos medios son semiinfinitos.



Problema 7.2.

a) Calcúlense los coeficientes de transmisión y reflexión (razones entre los flujos de Poynting, transmitido y reflejado, y el flujo incidente), y represéntese el comportamiento en función de la frecuencia para $n_1=1$, $n_2=2$, $n_3=3$; $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=1$, y $n_1=2$, $n_2=4$, $n_3=1$.

b) El medio n_1 forma parte de un sistema óptico (por ejemplo, una lente); el medio n_3 es aire ($n_3=1$). Se desea colocar otro medio n_2 en la superficie de separación, de modo que no haya onda reflejada para cierta frecuencia ω_0. ¿Qué espesor d y qué índice de refracción se requieren?

7.3. Dos bloques planos semiinfinitos del mismo dieléctrico uniforme, isótropo, no magnético y sin pérdidas, con índice de refracción n están situados paralelamente separados por una capa de aire ($n=1$) de espesor d. Desde uno de los bloques incide sobre la capa de aire una onda electromagnética plana de frecuencia ω y con un ángulo de incidencia i. Tanto para polarización lineal paralela como perpendicular al plano de incidencia:

a) Calcúlese la razón entre la potencia transmitida al segundo medio y la potencia incidente, y la razón de la potencia reflejada a la incidente.

b) Cuando i es mayor que el ángulo crítico de la reflexión total, represéntese la razón entre la potencia transmitida y la potencia incidente en función de d, expresado en unidades de longitud de onda en el aire.

7.4. Una onda electromagnética plana polarizada de frecuencia ω en el vacío incide normalmente sobre la superficie plana de un medio no permeable de conductividad σ y constante dieléctrica ϵ.

a) Calcúlense la amplitud y fase de la onda reflejada en función de los valores de la onda incidente para σ y ϵ arbitrarios.

b) Discútanse los casos límite de un conductor casi perfecto y otro de conductividad casi nula, y demuéstrese que en caso de un conductor casi perfecto, el coeficiente de reflexión (razón entre las intensidades reflejada e incidente) es aproximadamente

$$R \simeq 1-2\frac{\omega}{c}\delta$$

en donde δ es la profundidad de penetración.

7.5. Una onda electromagnética polarizada plana $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_i e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t}$ incide normalmente sobre una lámina plana uniforme de un *excelente* conductor ($\sigma \gg \omega$), cuyo espesor es D. Suponiendo que tanto en la lámina como fuera de ella es $\epsilon_r=\mu_r=1$, discútase la reflexión y transmisión de la onda incidente.

a) Demuéstrese que las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida, en un grado de aproximación hasta el primer orden en $(\omega/\sigma)^{1/2}$, son:

$$\frac{E_r}{E_i}=\frac{-(1-e^{-2\lambda})}{(1-e^{-2\lambda})+\gamma(1+e^{-2\lambda})}$$

$$\frac{E_t}{E_i}=\frac{2\gamma e^{-\lambda}}{(1-e^{-2\lambda})+\gamma(1+e^{-2\lambda})}$$

en donde

$$\gamma=\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}(1-i)=\frac{\omega\delta}{c}(1-i)$$

$$\lambda=(1-i)D/\delta$$

y $\delta=\sqrt{2/\mu\sigma\omega}$ es la profundidad de penetración.

b) Compruébese que para espesores cero e infinito se obtienen los resultados límite adecuados.

c) Demuéstrese que, exceptuando láminas de muy pequeño espesor, el coeficiente de transmisión es:

$$T=\frac{32(\mathrm{Re}\,\beta)^2 e^{-2D/\delta}}{1-2e^{-2D/\delta}\cos(2D/\delta)+e^{-4D/\delta}}$$

Represéntese $\log T$ en función de (D/δ), suponiendo que $\mathrm{Re}\,\beta=10^{-2}$. Defínase «espesor muy pequeño».

7.6. Una onda plana de frecuencia ω incide normalmente sobre una lámina semiinfinita de un material con índice de refracción *complejo* $n(\omega)$ $[n^2(\omega)=\epsilon(\omega)/\epsilon_0]$ desde el vacío.

a) Demuéstrese que la relación entre la potencia reflejada y la incidente es

$$R=\left|\frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}\right|^2$$

en tanto que la relación entre la potencia transmitida al medio y la incidente es

$$T=\frac{4\,\mathrm{Re}\,n(\omega)}{|1+n(\omega)|^2}$$

b) Calcúlese $\mathrm{Re}\,[i\omega(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^*)/2]$ en función de (x, y, z). Demuéstrese que este cambio de la energía por unidad de volumen da cuenta de la potencia relativa transmitida T.

c) Para un conductor con $n^2=1+i(\sigma/\omega\epsilon)$, siendo σ real, exprésense los resultados de las partes *(a)* y *(b)* en el límite $\omega\ll\sigma$. En tanto sea posible expresar la respuesta en función de δ. Calcúlese $\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{J}^*\cdot\boldsymbol{E})$ y compárese con el resultado de *b)*. ¿Corresponden ambos a la forma compleja del teorema de Poynting?

7.7. La dependencia temporal de las perturbaciones eléctricas en los buenos conductores está determinada por la conductividad [7.58], variable con la frecuencia. Considérese que en un conductor existen campos eléctricos longitudinales y, utilizando la ley de Ohm, la ecuación de continuidad y la forma diferencial de la ley de Coulomb:

a) demuéstrese que la transformada de Fourier temporal de la densidad de carga satisface a la ecuación:

$$[\sigma(\omega)-i\omega\epsilon_0]\rho(x,\omega)=0$$

b) utilizando la representación $\sigma(\omega)=\sigma_0/(1-i\omega\tau)$, siendo $\sigma_0=\omega_p^2\tau\epsilon_0$ y τ una constante de tiempo de amortiguamiento, demuéstrese que dentro de la aproximación $\omega_p^2\ll 1$ cualquier perturbación inicial oscilará con la frecuencia de plasma y se amortiguará con una constante de amortiguamiento $\lambda=\frac{1}{2}\tau$. Nótese que si se supone $\sigma(\omega)\simeq\sigma(0)=\sigma_0$ en la parte *a)* no se encuentran oscilaciones y hay un amortiguamiento extremadamente rápido con la constante de amortiguamiento (errónea) $\lambda_w=\sigma_0/\epsilon_0$ (W. M. SASLOW y G. WILKINSON, *Am. J. Phys.*, **39**, 1244 (1971).)

7.8. Un modelo estilizado de ionosfera es el medio descrito por la constante dieléctrica [7.59]. Supóngase a la Tierra como rodeada por un medio de tal naturaleza que empezara bruscamente a una altura h y se extendiera hasta el infinito. Para ondas con polarización tanto perpendicular al plano de incidencia (procedentes de una antena horizontal) como en el plano de incidencia (procedentes de una antena vertical):

a) Demuéstrese a partir de las ecuaciones de Fresnel para la reflexión y refracción que para $\omega > \omega_p$ hay un margen de ángulos de incidencia para los cuales la reflexión no es total, pero que para ángulos mayores hay reflexión total y son devueltas hacia la tierra.

b) Un radioaficionado que opera a la frecuencia de 21 metros encuentra que al principio de la tarde puede recibir estaciones que distan más de 1 000 km, pero no más próximas. Suponiendo que las señales se reflejen desde la capa *F* de la ionosfera situada a una altura efectiva de 300 km, calcúlese la densidad electrónica. Compárese con los valores conocidos de las densidades máxima y mínima de la capa *F* de $\sim 2\times 10$ cm^{-3} durante el día y $\sim(2\text{-}4)\times 10^{-5}$ cm^{-3} por la noche.

7.9. Un modelo simple de propagación de ondas de radio en la atmósfera terrestre o la ionosfera consiste en una tierra plana en $z=0$ y un medio no uniforme con $\epsilon=\epsilon(z)$ para $z>0$. Considérense las ecuaciones Maxwell en la hipótesis de que los campos son independientes de y y que pueden escribirse como funciones de z con el factor $e^{i(kx-\omega t)}$.

a) Demuéstrese que la ecuación de ondas que determina la propagación para $z>0$ es

$$\frac{d^2F}{dz^2}+q^2(z)F=0$$

siendo

$$q^2(z)=\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\epsilon(z)}{\epsilon_0}-k^2$$

y $F=E_y$ cuando la polarización es *horizontal*, y

$$q^2(z)=\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\epsilon(z)}{\epsilon_0}+\frac{1}{2\epsilon}\,\frac{d^2\epsilon}{dz^2}-\frac{3}{4\epsilon^2}\left(\frac{d\epsilon}{dz}\right)^2-k^2$$

con $F=\sqrt{\epsilon}E_z$ cuando la polarización es *vertical*.

b) Utilícese la aproximación WKB para tratar la propagación de ondas dirigidas verticalmente hacia la ionosfera ($k=0$), suponiendo que la constante dieléctrica está dada por [7.59] con una frecuencia de plasma $\omega_p(z)$ que está determinada por una densidad electrónica como la indicada en la figura 7.11. Verifíquese que los argumentos cualitativos de la sección 7.6 son válidos, salvo discrepancias de detalle cuando $\omega \sim \omega_{p,\,\text{máx}}$.

c) Utilizando los resultados de la parte *b)* y las ideas sobre la propagación de un impulso vistas en la sección 7.8, defínase una altura efectiva de la ionosfera $h'(\omega)$ calculando el tiempo T necesario para que un impulso cuya frecuencia dominante sea ω ascienda y sea reflejado de nuevo hacia abajo ($h'\omega=cT/2$). (La aproximación WKB se discute en la mayoría de los libros de mecánica cuántica.)

7.10. En un dieléctrico no permeable homogéneo pero *anisótropo*, se propagan ondas planas. El dieléctrico está caracterizado por un tensor ϵ_{ij}, pero si escogemos por ejes de coordenadas los ejes principales, las componentes del desplazamiento a lo largo de estos ejes vienen relacionadas con las componentes del campo eléctrico mediante $D_i=\epsilon_i E_i$ ($i=1, 2, 3$), siendo ϵ_i los valores propios de la matriz ϵ_{ij}.

a) Demuéstrese que las ondas planas, de frecuencia ω y vector ondas $\boldsymbol{k}$, deben satisfacer:

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})+\frac{\omega^2}{c^2}\,\epsilon_0\boldsymbol{D}=0$$

b) Demuéstrese que para un vector de ondas dado $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{n}$ hay dos modos distintos de propagación con diferentes velocidades de fase $v=\omega/k$ que satisfa-

cen la ecuación de Fresnel:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{n_i^2}{v^2 - v_i^2} = 0$$

en donde $v_i = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_i}$ recibe el nombre de velocidad principal, y n_i es el componente de $\boldsymbol{n}$ según el eje principal i.

c) Demuéstrese que $\boldsymbol{D}_a \cdot \boldsymbol{D}_b = 0$, donde $\boldsymbol{D}_a$, $\boldsymbol{D}_b$ son los desplazamientos asociados con los dos modos de propagación.

7.11. Un tren de ondas plano y aproximadamente monocromático y unidimensional tiene la forma instantánea $u(x, 0) = f(x)e^{ik_0 x}$, siendo $f(x)$ la envolvente moduladora. Para cada una de las formas de la función $f(x)$ indicadas más adelante, calcúlese el espectro $|A(k)|^2$ en número de ondas del tren, dibújese $|u(x, 0)|^3$ y $|A(k)|^2$, calcúlense explícitamente las desviaciones cuadráticas medias a partir de los valores Δx y Δk (definidos en función de las intensidades $|u(x, 0)|^2$ y $|A(k)|^2$) y demuéstrese la desigualdad [7.82].

a) $f(x) = Ne^{-\alpha|x|/2}$

b) $f(x) = Ne^{-\alpha^2 x^2/4}$

c) $f(x) = \begin{cases} N(1 - \alpha|x|) & \text{para } \alpha|x| < 1 \\ 0 & \text{para } \alpha|x| > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} N & \text{para } |x| < a \\ 0 & \text{para } |x| > a \end{cases}$

7.12. Un dieléctrico homogéneo, isótropo, no permeable está caracterizado por un índice de refracción $n(\omega)$ en general complejo, para describir los efectos de absorción.

a) Demuéstrese que la solución general para ondas planas en una dimensión se puede expresar así:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-i\omega t}[A(\omega)e^{i(\omega/c)n(\omega)x} + B(\omega)e^{-i(\omega/c)n(\omega)x}]$$

en donde $u(x, t)$ es una componente de $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{B}$.

b) Si $u(x, t)$ es real, demuéstrese que $n(-\omega) = n^*(\omega)$.

c) Demuéstrese que si $u(0, t)$ y $\partial u(0, t)/\partial x$ son valores de contorno de u y de su derivada para $x = 0$, los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son:

$$\left\{ \begin{matrix} A(\omega) \\ B(\omega) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{i\omega t} \left[u(0, t) \mp \frac{ic}{\omega n(\omega)} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \right]$$

7.13. Considérese la relación no local (en el tiempo) entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{D}(x, t)\epsilon_0 = \boldsymbol{E}(x, t) + \int d\tau \, G(\tau)\boldsymbol{E}(x, t - \tau)$$

con el valor de $G(\tau)$ adecuado para el modelo de una sola resonancia:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0[1 + \omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)^{-1}]$$

a) Conviértase la relación no local entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$ en una relación instantánea que contenga las derivadas de $\boldsymbol{E}$ respecto al tiempo desarrollando el campo eléc-

trico que aparece en la integral en serie de Taylor en τ. Calcúlense las integrales de $G(\tau)$ explícitamente al menos hasta el término en $\partial^2 \boldsymbol{E}/\partial t^2$.

b) Demuéstrese que la serie hallada en *a)* puede obtenerse formalmente transformando la relación en el dominio de la frecuencia $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, \omega)=\epsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, \omega)$ en una relación espacio-temporal:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t)=\epsilon\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$$

en la que la variable ω en $\epsilon(\omega)$ se ha reemplazado por $i(\partial/\partial t)$.

7.14. Utilícese la relación [7.120] de Kramers-Kronig para calcular la parte real de $\epsilon(\omega)$, dada la parte imaginaria de $\epsilon(\omega)$ cuando ω sea positiva en la forma:

a) $\operatorname{Im}\epsilon=\lambda[\theta(\omega-\omega_1)-\theta(\omega-\omega_2)], \qquad \omega_2>\omega_1>0$

b) $\operatorname{Im}\epsilon=\dfrac{\lambda\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)+\gamma^2\omega^2}$

Esquematícese en cada caso el comportamiento de $\operatorname{Im}\epsilon(\omega)$ y el resultado obtenido para $\operatorname{Re}\epsilon(\omega)$ como funciones de ω. Coméntense las razones de las analogías o diferencias entre los resultados obtenidos y las curvas de la figura 7.8.

7.15. Discútase la extensión de las relaciones de Kramers-Kronig [7.120] a un medio con conductividad eléctrica estática σ. Demuéstrese que la primera ecuación de las [7.120] no cambia, pero que la segunda resulta sustituida por:

$$\operatorname{Im}\epsilon(\omega)=\frac{\sigma}{\omega}-\frac{2\omega}{\pi}P\int_0^\infty\frac{\operatorname{Re}\epsilon(\omega')-\epsilon_0}{\omega'^2-\omega^2}\,d\omega'$$

(Ayuda: Considérese que $\epsilon(\omega)-\sigma i/\omega$ es analítica para $\operatorname{Im}\omega\geqslant 0$.)

7.16. *a)* Utilícese la relación [7.113] y el carácter analítico de $\epsilon(\omega)$ cuando $\operatorname{Im}\omega\geqslant 0$, para probar que $\epsilon(\omega)$ es real sobre la parte positiva del eje imaginario y que decrece monótonamente al alejarse del origen, tendiendo a la unidad cuando $\omega\to i\infty$, supuesto $\operatorname{Im}\epsilon\geqslant 0$ para las frecuencias reales y positivas.

b) Suponiendo que $\operatorname{Im}\epsilon$ se anula sólo para $\omega=0$ cuando ω es finita y real, demuéstrese que $\epsilon(\omega)$ no tiene ningún cero en la mitad superior del plano ω.

c) Escríbase una relación tipo Kramers-Kronig para $1/\epsilon(\omega)$ y dedúzcase una regla de suma semejante a [7.122], pero en forma de integral extendida a $\operatorname{Im}[1/\epsilon(\omega)]$.

d) Con el modelo de resonancia única [7.107] para $\epsilon(\omega)$ determínese $\operatorname{Im}\epsilon(\omega)$ e $\operatorname{Im}[1/\epsilon(\omega)]$ y verifíquese explícitamente que se cumplen la regla de suma [7.122] y la obtenida en la parte *c)*.

7.17. La ecuación [7.67] expresa el cuadrado del índice de refracción para ondas que se propaguen a lo largo de las líneas del campo a través de un plasma en un campo magnético externo uniforme. Utilizándolo como modelo para la propagación en la magnetosfera, considérese la llegada de un silbido (se trata en realidad del precursor de Brillouin y la señal subsiguiente, descritos en la sección 7.11).

a) Hágase un dibujo razonablemente cuidadoso de $c\,dk/d\omega$, siendo $k=\omega n(\omega)/c$, para la onda de helicidad positiva, suponiendo que $\omega_p/\omega_B\geqslant 1$. Indíquese el intervalo en que $c\,dk/d\omega$ es imaginario, ¡pero no se intente representarlo allí!

b) Demuéstrese que en el intervalo, $0<\omega<\omega_B$, el mínimo de $c\,dk/d\omega$ ocurre para $\omega_p/\omega_B\simeq 1/4$, supuesto que $\omega_p/\omega_B\geqslant 1$. Hállense expresiones aproximadas para $c\,dk/d\omega$ cuando ω es próxima a cero y cuando es próxima a ω_B.

c) Demuéstrese, utilizando el método de la fase estacionaria y la estructura general de la solución al problema 7.12, *a)*, que la llegada de un silbido está caracterizada por un aumento y una disminución de la frecuencia con el tiempo, el nombre tiene su origen en la componente de frecuencia decreciente.

d) (Optativa.) Considérese la forma de la señal en el precursor de Brillouin. Demuéstrese que consiste en una onda modulada cuya envolvente tiene la forma de la integral de Airy encontrada por BRILLOUIN y cuya alta frecuencia es $\omega_0=\omega_B/4$. Entonces esta señal evoluciona en pulsaciones a las dos frecuencias de la parte *c)*.

7.18. Una partícula cargada (con carga Ze) se mueve con velocidad constante $\boldsymbol{v}$ a través de un medio caracterizado por una constante dieléctrica $\epsilon(\boldsymbol{q}, \omega)$ o, lo que es equivalente, por una función conductividad $\sigma(\boldsymbol{q}, \omega)=i\omega[\epsilon_0-\epsilon(\boldsymbol{q}, \omega)]$. Se desea calcular la pérdida de energía por unidad de tiempo por la partícula en movimiento en función de la función dieléctrica $\epsilon(\boldsymbol{q}, \omega)$ dentro de la aproximación de que el campo eléctrico sea el gradiente cambiado de signo del potencial y que la corriente obedezca a la ley de Ohm, $\mathbf{J}(\boldsymbol{q}, \omega)=\sigma(\boldsymbol{q}, \omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}, \omega)$.

a) Demuéstrese que con una normalización adecuada, la transformada de Fourier de la densidad de carga de la partícula es:

$$\rho(\boldsymbol{q}, \omega)=\frac{Ze}{(2\pi)^3}\,\delta(\omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v})$$

b) Demuéstrese que las componentes de Fourier del potencial electrostático son:

$$\phi(\boldsymbol{q}, \omega)=\frac{1}{q^2}\,\frac{\rho(\boldsymbol{q}, \omega)}{4\pi\epsilon(\boldsymbol{q}, \omega)}$$

c) Partiendo de $dW/dt=\int \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\, d^3x$ demuéstrese que la energía perdida por unidad de tiempo puede escribirse.

$$-\frac{dW}{dt}=\frac{Z^2e^2}{4\pi^3}\int\frac{d^2q}{q^2}\int_0^\infty d\omega\,\omega\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\epsilon(\boldsymbol{q}, \omega)}\right]\delta(\omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v})$$

(Esto prueba que $\mathrm{Im}\,[\epsilon(\boldsymbol{q}, \omega]^{-1}$ está relacionada con la pérdida de energía y suministra información sobre el valor de $\epsilon(\boldsymbol{q}, \omega)$ en los sólidos, estudiando las pérdidas de energía características en láminas delgadas.)

7.19. El momento cinético de una distribución de campos electromagnéticos en el vacío está dado por:

$$\boldsymbol{L}=\epsilon_0\int d^3x\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$$

estando la integral extendida a todo el espacio.

a) Para campos que fueron producidos en un pasado finito (y, por consiguiente, se encuentran localizados en una región finita del espacio), demuéstrese que el momento cinético puede escribirse en la forma:

$$\boldsymbol{L}=\epsilon_0\int d^3x\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}+\sum_{j=1}^{3}E_j(\boldsymbol{x}\times\nabla)A_j\right]$$

supuesto que el campo magnético se elimina en función del potencial vector $\boldsymbol{A}$. Algunas veces el primer término se identifica con el «spin» del fotón y el se-

gundo con su momento cinético «orbital» debido a la presencia del operador momento cinético $\boldsymbol{L}_{\text{op}} = -i(\boldsymbol{x} \times \nabla)$.

b) Considérese un desarrollo del potencial vector en función de ondas planas en el contraste de radiación:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x} - i\omega t} + \text{c.c.}]$$

Conviene escoger como vectores polarización $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{k})$ los vectores con helicidad positiva y negativa $\boldsymbol{\epsilon}_\pm = (1/\sqrt{2})(\boldsymbol{\epsilon}_1 \pm i\boldsymbol{\epsilon}_2)$, siendo $\boldsymbol{\epsilon}_1$ y $\boldsymbol{\epsilon}_2$ vectores ortogonales reales en el plano x-y cuya normal positiva se halla en la dirección de $\boldsymbol{k}$.

Demuéstrese que la media temporal del primer término («spin») de $\boldsymbol{L}$ puede escribirse:

$$\boldsymbol{L}_{\text{spin}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{k}[|a_+(\boldsymbol{k})|^2 - |a_-(\boldsymbol{k})|^2]$$

¿Puede justificarse el término momento cinético de spin a partir de esta expresión? Calcúlese la energía del campo en función del desarrollo $\boldsymbol{A}$ en ondas planas y compárese.

7.20. Una onda plana polarizada circularmente que se desplaza en la dirección del eje z tiene una extensión finita en las direcciones x e y. Suponiendo que la modulación de amplitud varía lentamente (la onda abarca muchas longitudes de onda), demuéstrese que los campos eléctrico y magnético están dados aproximadamente por:

$$\boldsymbol{E}(x, y, z, t) \simeq \left[E_0(x, y)(\boldsymbol{e}_1 \pm i\boldsymbol{e}_2) + \frac{i}{k} \left(\frac{\partial E_0}{\partial x} \pm i \frac{\partial E_0}{\partial y} \right) \boldsymbol{e}_3 \right] e^{ikz - i\omega t}$$

$$\boldsymbol{B} \simeq \mp \sqrt{\mu\epsilon}\, \boldsymbol{E}$$

siendo $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ los vectores unitarios en las direcciones x, y, z, respectivamente.

7.21. Para la onda polarizada circularmente del problema 7.20, calcúlese la media temporal de la componente del momento cinético paralela a la dirección de propagación. Demuéstrese que la relación entre esta componente del momento cinético y la energía de la onda es

$$\frac{L_3}{U} = \pm\omega^{-1}$$

Interprétese este resultado en términos de los cuantos de radiación (fotones). Demuéstrese que para una onda plana finita con simetría cilíndrica se anulan las componentes transversales del momento cinético.

GUIAS DE ONDA Y CAVIDADES RESONANTES

Los campos electromagnéticos en presencia de contornos metálicos constituyen un aspecto práctico del tema de importancia considerable. El único procedimiento práctico de generar y transmitir radiación electromagnética a altas frecuencias, en las que las longitudes de onda son del orden de metros o menores, es el empleo de estructuras metálicas cuyas dimensones son comparables con las longitudes de onda en que se opera. En este capítulo consideramos primeramente los campos en las proximidades de un conductor y discutimos su penetración en la superficie y las pérdidas resistivas asociadas. Después se tratan, desde un punto de vista francamente general, los problemas de las ondas guiadas por conductos metálicos huecos y de las cavidades resonantes, incluyendo ejemplos concretos en el curso de la exposición. La atenuación en las guías de ondas y el factor Q en las cavidades se tratan desde dos puntos de vista diferentes. A continuación se estudia el sistema tierra-ionosfera como cavidad resonante, y después se discute brevemente el tema de las guías de onda dieléctricas. También se presenta el desarrollo en modos normales para un campo arbitrario en la guía, aplicándolo a los campos generados por una fuente localizada. El capítulo termina con aplicaciones adicionales del desarrollo en modos normales al tratamiento de obstáculos en guías de onda por métodos variacionales.

8.1. CAMPOS JUNTO A LA SUPERFICIE Y EN EL INTERIOR DE UN CONDUCTOR

Tal como se mencionó al final de la sección 7.7, el problema de la reflexión y refracción de ondas en la interfase entre dos medios conductores es algo complicado. Sin embargo, mediante un tratamiento aproximado, válido cuando uno de los medios es un buen conductor, pueden obtenerse los aspectos más importantes y útiles del fenómeno. Además, dentro de su margen de validez este método resulta aplicable a situaciones más generales que la correspondiente a la incidencia de ondas planas.

Considérese, en primer lugar, una superficie que separa un conductor perfecto de un medio no conductor, y sea $\boldsymbol{n}$ el vector unitario normal dirigido hacia fuera del conductor. Entonces, al igual que en el caso estático, no hay campo eléctrico en el interior del conductor. En efecto, se supone que las cargas existentes en el interior del conductor son tan móviles que, en respuesta a los cambios de los campos, no importa cuán rápidos sean, se desplazan instantáneamente y producen la densidad de carga superficial Σ correcta

(se utiliza la Σ mayúscula para evitar confusiones con la conductividad σ) para que resulte cero el campo eléctrico dentro del conductor:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\Sigma \qquad [8.1]$$

Análogamente, en presencia de campos magnéticos variables con el tiempo, las cargas superficiales se mueven en respuesta al campo magnético tangencial para producir en todo momento la corriente superficial correcta $\boldsymbol{K}$:

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{K} \qquad [8.2]$$

para que el campo magnético sea cero dentro del conductor perfecto. Las otras dos condiciones de contorno corresponden a la componente normal de $\boldsymbol{B}$ y la tangencial de $\boldsymbol{E}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_c)&=0\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_c)&=0\end{aligned} \qquad [8.3]$$

en las que el subíndice c hace referencia al conductor. Según estas condiciones vemos que en el exterior de un conductor perfecto y muy cerca de la superficie sólo puede haber campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ *normal* y magnético $\boldsymbol{H}$ *tangencial,* y que ambos caen abruptamente hasta el valor cero al pasar al interior del conductor. Esquemáticamente se indica este comportamiento en la figura 8.1.

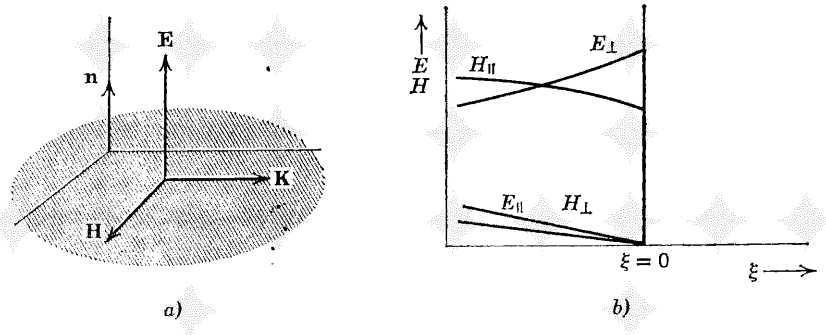


FIG. 8.1. Campos en la proximidad de la superficie de un conductor perfecto.

Para un conductor bueno, pero no perfecto, los campos deben comportarse de modo aproximadamente igual que para el conductor perfecto en la proximidad de su superficie. Hemos visto en la sección 7.7 que los campos en el interior de un conductor se atenúan exponencialmente con una longitud característica δ, llamada *profundidad de penetración*. Para los buenos conductores a frecuencias moderadas, δ es del orden de una pequeña fracción de centímetro. Por consiguiente, las condiciones [8.1] y [8.2] son aproximadamente válidas si prescindimos de una capa delgada de transición junto a la superficie.

Sin embargo, si deseamos estudiar precisamente esta región de transición hay que tener cuidado. En primer lugar, la ley de Ohm, $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$, nos demuestra que si tenemos una conductividad finita no puede haber en realidad una densidad superficial de corriente, como figura en [8.2]. En su lugar, la condición de contorno para el campo magnético es:

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}_c)=0 \qquad [8.4]$$

Para analizar los cambios que introduce el hecho de que la conductividad sea finita, en lugar de infinita, emplearemos un método de aproximaciones sucesivas. Inicialmente supondremos que justamente fuera del conductor solamente existe campo eléctrico normal $\boldsymbol{E}_\perp$ y campo magnético tangencial $\boldsymbol{H}_\parallel$, igual que si se tratase de un conductor perfecto. Los valores de estos campos se supone que han sido obtenidos de la solución a un problema de condiciones de contorno apropiado. A continuación hacemos uso de las condiciones en la superficie y de las ecuaciones de Maxwell en el conductor para hallar los campos en el interior de la capa de transición y pequeñas correcciones de los campos en el exterior. Para resolver las ecuaciones de Maxwell en el interior de un conductor aprovechamos el hecho de que la variación espacial de los campos en la dirección normal a la superficie es mucho más rápida que en la dirección paralela. Así, pues, podemos con cierta seguridad despreciar todas las derivadas respecto de coordenadas paralelas a la superficie frente a la derivada normal.

Si existe una componente $\boldsymbol{H}_\parallel$ tangencial fuera de la superficie, la ecuación [8.4] implica que exista la misma $\boldsymbol{H}_\parallel$ al otro lado de la superficie de separación. Suponiendo que los campos varíen en forma armónica $e^{-i\omega t}$ y despreciando la corriente de desplazamiento en el conductor, las ecuaciones de Maxwell con rotacional se convierten en:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_c &\simeq \frac{1}{\sigma}\nabla \times \boldsymbol{H}_c \\ \boldsymbol{H} &\simeq \frac{-i}{\mu_c \omega}\nabla \times \boldsymbol{E}_c \end{aligned}\right\} \qquad [8.5]$$

Si llamamos $\boldsymbol{n}$ al vector unitario normal dirigido *hacia fuera* del conductor y ξ la coordenada normal dirigida *hacia dentro,* el operador gradiente puede escribirse:

$$\nabla \simeq -\boldsymbol{n}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

despreciando las otras derivadas cuando operen sobre los campos en el interior del conductor. Con esta aproximación, [8.5] se convierte en:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_c &\simeq -\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{n} \times \frac{\partial \boldsymbol{H}_c}{\partial \xi} \\ \boldsymbol{H}_c &\simeq \frac{i}{\mu\omega}\boldsymbol{n} \times \frac{\partial \boldsymbol{E}_c}{\partial \xi} \end{aligned}\right\} \qquad [8.6]$$

Que puede combinarse para dar:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_c) + \frac{2i}{\delta^2}(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_c) \simeq 0 \\ \text{y} \qquad &\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H}_c \simeq 0 \end{aligned}\right\} \qquad [8.7]$$

en donde δ es la profundidad de penetración definida anteriormente:

$$\delta = \left(\frac{2}{\mu\omega\sigma}\right)^{1/2} \qquad [8.8]$$

La segunda de las ecuaciones [8.7] indica que dentro del conductor $\boldsymbol{H}$ es paralelo a la superficie, lo que concuerda con nuestras condiciones en la superficie límite.

La solución para $\boldsymbol{H}_c$ es:

$$\boldsymbol{H}_c = \boldsymbol{H}_{\parallel} e^{-\xi/\delta} e^{i\xi/\delta} \qquad [8.9]$$

donde $\boldsymbol{H}_{\parallel}$ es la componente tangencial del campo magnético en el exterior del conductor. Según [8.6], el campo eléctrico en el conductor es aproximadamente:

$$\boldsymbol{E}_c \simeq \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{2\sigma}} (1-i)(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_{\parallel}) e^{-\xi/\delta} e^{i\xi/\delta} \qquad [8.10]$$

Estas soluciones de $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{E}$ en el interior del conductor presentan las propiedades que vimos en la sección [7.7]: *a),* decrecimiento exponencial rápido; *b),* diferencia de fase; *c),* el campo magnético mucho mayor que el campo eléctrico. Además, demuestran que para un buen conductor los campos en su interior son paralelos a la superficie *, se propagan normalmente a ella y sus magnitudes dependen únicamente del campo magnético tangencial $\boldsymbol{H}$ que exista justamente fuera de la superficie.

De la condición [8.3] que satisface la componente tangencial de $\boldsymbol{E}$ deducimos que *justamente fuera* de la superficie hay un campo eléctrico tangencial pequeño $\boldsymbol{E}$ que viene dado por [8.10], calculada para $\xi = 0$:

$$\boldsymbol{E}_{\parallel} \simeq \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{2\sigma}} (1-i)(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_{\parallel}) \qquad [8.11]$$

En este orden de aproximación existe también justamente fuera de la superficie una pequeña componente normal de $\boldsymbol{B}$. Puede obtenerse a partir de la ley de inducción de Faraday y conduce a un $\boldsymbol{B}_{\perp}$ del mismo orden que $\boldsymbol{E}_{\parallel}$. Las amplitudes de los campos tanto dentro como fuera del conductor se representan esquemáticamente en la figura 8.2.

El hecho de que exista una pequeña componente tangencial de $\boldsymbol{E}$ en el exterior de la superficie, además de $\boldsymbol{E}$ normal y $\boldsymbol{H}$ tangencial, significa que hay un flujo de potencia hacia el interior del conductor. La potencia media temporal absorbida por unidad de área es:

$$\frac{dP_{\text{pérd}}}{da} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*] = \frac{\mu\omega\delta}{4} |\boldsymbol{H}_{\parallel}|^2 \qquad [8.12]$$

Este resultado puede interpretarse de modo sencillo como pérdidas óhmicas en la masa del conductor. Según la ley de Ohm, habrá una densidad de corriente

---

* Basándonos en la continuidad de la componente tangencial de $\boldsymbol{H}$ y en la ecuación que relaciona $\boldsymbol{E}$ con $\nabla \times \boldsymbol{H}$ a cada lado de la superficie, se puede demostrar que en el conductor existe una componente normal pequeña del campo eléctrico $\boldsymbol{E}_c \cdot \boldsymbol{n} \simeq (i\omega\epsilon/\sigma)\boldsymbol{E}_{\perp}$, pero se puede considerar como infinitésimo de orden superior en comparación con [8.10]. Nótese que la discusión que presentamos aquí presupone la componente tangencial de $\boldsymbol{H}$. En las situaciones en que el orden de aproximación más bajo es esencialmente electrostático, nuestro tratamiento deja de ser aplicable. Véase T. H. BOYER, *Phys. Rev.*, **A9**, 68 (1974).

en la proximidad de la superficie

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}_c=\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}\,(1-i)\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_{\parallel})\,e^{-\xi(1-i)/\delta} \qquad [8.13]$$

La velocidad media de disipación de energía por unidad de volumen debida a las pérdidas óhmicas es $\frac{1}{2}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}^*=(1/2\sigma)\,|\boldsymbol{J}|^2$, de modo que la disipación total

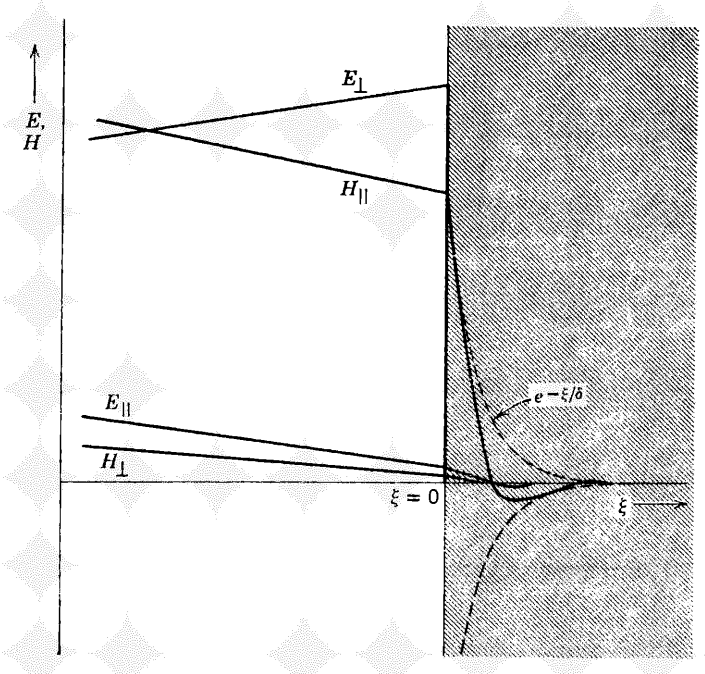


FIG. 8.2. Campos en la proximidad de la superficie de un conductor bueno, pero no perfecto. Para $\xi > 0$, las curvas de puntos corresponden a la envolvente de las oscilaciones amortiguadas de $\boldsymbol{H}_c$ [8.9].

de potencia en el conductor en el interior del volumen situado bajo el elemento de área ΔA es:

$$\frac{1}{2\sigma}\Delta A\int_0^\infty d\xi\,\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}^*=\Delta A\,\frac{\mu\omega}{2}\,|\boldsymbol{H}_{\parallel}|^2\int_0^\infty e^{-2\xi/\delta}\,d\xi=\Delta A\,\frac{\mu\omega\delta}{4}\,|\boldsymbol{H}_{\parallel}|^2$$

Este resultado es el mismo que el obtenido por el vector de Poynting [8.12].

La densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ está confinada a una capa tan estrecha justamente debajo de la superficie del conductor que prácticamente equivale a una densidad superficial de corriente efectiva $\boldsymbol{K}_{\text{el}}$:

$$\boldsymbol{K}_{\text{ef}}=\int_0^\infty \boldsymbol{J}\,d\xi=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_{\parallel} \qquad [8.14]$$

Comparando este resultado con [8.2] vemos que un buen conductor se comporta efectivamente como un conductor perfecto, pero con la densidad

superficial de corriente reemplazada por una densidad de corriente equivalente que, en realidad, está distribuida en una capa muy estrecha, pero de espesor finito junto a la superficie. Las pérdidas de potencia pueden expresarse mediante la densidad de corriente superficial efectiva.

$$\frac{dP_{\text{pérd}}}{da} = \frac{1}{2\sigma\delta} |\boldsymbol{K}_{\text{ef}}|^2 \qquad [8.15]$$

Vemos aquí que $1/\sigma\delta$ desempeña el papel de una resistencia superficial del conductor *. Las ecuaciones [8.15], utilizando el valor de $\boldsymbol{K}_{\text{ef}}$ dado por [8.14] u [8.12] nos permitirán calcular aproximadamente las pérdidas óhmicas en dispositivos prácticos como cavidades, líneas de transmisión y guías de ondas, siempre que hayamos resuelto previamente el problema de calcular los campos en el caso ideal de conductividad infinita.

8.2. CAVIDADES CILINDRICAS Y GUIAS DE ONDAS

Una situación que se presenta en la práctica, y que es de gran importancia, es la propagación o excitación de ondas electromagnéticas en cilindros metálicos huecos. Si el cilindro está limitado por unas bases recibe el nombre de cavidad; en el caso contrario, guía de ondas. En nuestra discusión del problema se supondrá que las superficies limitadoras son perfectamente conductoras. Las pérdidas que tienen lugar en la práctica pueden tomarse en consideración por los métodos descritos en la sección 8.1. En la figura 8.3 se ha

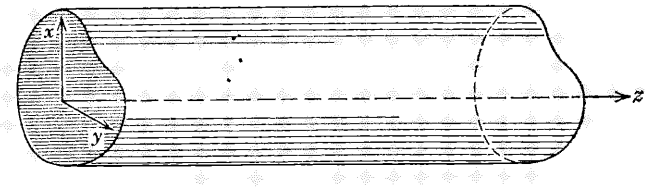


FIG. 8.3. Guía de ondas cilíndrica hueca con sección transversal de forma arbitraria.

dibujado una superficie cilíndrica S de sección transversal arbitraria. Se supone para simplificar que la forma y tamaño de dicha sección transversal son constantes a lo largo del cilindro. Si los campos en el interior del cilindro presentan una dependencia de tipo sinusoidal respecto del tiempo $e^{-i\omega t}$, las ecuaciones de Maxwell toman la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= i\omega\boldsymbol{B} & \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} &= -i\mu\epsilon\omega\boldsymbol{E} & \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [8.16]$$

en donde hemos supuesto que en el interior del cilindro hay un medio uni-

* El coeficiente de proporcionalidad que relaciona $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ y $\boldsymbol{K}_{\text{ef}}$ se denomina *impedancia superficial* Z_s. Para un buen conductor, la ecuación [8.11] da $Z_s = (1-i)/\sigma\delta$, pero evidentemente el concepto de impedancia superficial tiene mayor aplicabilidad.

forme no disipativo que tiene constante dieléctrica ϵ y permeabilidad μ. Se deduce que tanto $\boldsymbol{E}$ como $\boldsymbol{B}$ satisfacen la ecuación:

$$(\nabla^2+\mu\epsilon\omega^2)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}\end{Bmatrix}=0 \qquad [8.17]$$

Debido a la geometría cilíndrica resulta útil singularizar la variación espacial de los campos en la dirección z suponiendo

$$\left.\begin{matrix}\boldsymbol{E}(x,y,z,t)\\ \boldsymbol{B}(x,y,z,t)\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{E}(x,y)e^{\pm ikz-i\omega t}\\ \boldsymbol{B}(x,y)e^{\pm ikz-i\omega t}\end{matrix}\right. \qquad [8.18]$$

Podemos formar combinaciones lineales adecuadas para tener ondas progresivas o estacionarias en la dirección z. El número de ondas k es por el momento un parámetro desconocido que puede ser real o complejo. Así, supuesta esta dependencia en z de los campos, la ecuación de onda se reduce a la forma bidimensional.

$$[\nabla_t^2+(\mu\epsilon\omega^2-k^2)]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}\end{Bmatrix}=0 \qquad [8.19]$$

en que ∇_t^2 es la parte transversal del operador laplaciano.

$$\nabla_t^2=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad [8.20]$$

Es también conveniente separar los campos en componentes paralela y transversal al eje z:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_z+\boldsymbol{E}_t \qquad [8.21]$$

siendo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z&=\boldsymbol{e}_3E_z\\ \boldsymbol{E}_t&=(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \qquad [8.22]$$

y $\boldsymbol{e}_3$ es un vector unitario en la dirección z. Para el campo magnético $\boldsymbol{B}$ se cumplen expresiones análogas. Las ecuaciones de Maxwell [8.16] pueden ponerse en función de las componentes paralela y transversal en la forma:

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}_t}{\partial z}+i\omega\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{B}_t=\nabla_tE_z; \qquad \boldsymbol{e}_3\cdot(\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t)=i\omega B_z \qquad [8.23]$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}_t}{\partial z}-i\mu\epsilon\omega\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{E}_t=\nabla_tB_z; \qquad \boldsymbol{e}_3\cdot(\nabla_t\times\boldsymbol{B}_t)=-i\mu\epsilon\omega E_z \qquad [8.24]$$

$$\nabla_t\cdot\boldsymbol{E}_t=-\frac{\partial\boldsymbol{E}_z}{\partial z}; \qquad \nabla_t\cdot\boldsymbol{B}_t=-\frac{\partial B_z}{\partial z} \qquad [8.25]$$

Resulta evidente de las primeras ecuaciones de las [8.23] y [8.24] que si E_z y B_z son conocidos quedan determinadas las componentes transversales de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, supuesta la dependencia con z dada por las ecuaciones [8.18].

Antes de considerar los tipos de campos que pueden existir dentro de un cilindro hueco, señalemos las características de un tipo de solución especial

o degenerada, llamada onda *transversal electromagnética* (TEM). En esta solución sólo hay componentes de los campos transversales a la dirección de propagación. Se deduce de la segunda ecuación de las [8.23] y la primera de las [8.25] que si $E_z=0$ y $B_z=0$, el campo $\boldsymbol{E}_t=\boldsymbol{E}_{\text{TEM}}$ satisface:

$$\nabla_t \times \boldsymbol{E}_{\text{TEM}}=0; \qquad \nabla_t \cdot \boldsymbol{E}_{\text{TEM}}=0 \tag{8.26}$$

Esto significa que $\boldsymbol{E}_{\text{TEM}}$ es una solución de un problema *electrostático* en dos dimensiones. Hay tres conclusiones importantes. La primera es que el número de ondas a lo largo del eje es el valor correspondiente al medio infinito:

$$k=k_0=\omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{8.27}$$

como puede deducirse de [8.19]. La segunda consecuencia es que, según se deduce de la primera ecuación de [8.24], el campo magnético es:

$$\boldsymbol{B}_{\text{TEM}}=\pm\sqrt{\mu\epsilon}\,\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{E}_{\text{TEM}} \tag{8.28}$$

para ondas que se propaguen según $e^{\pm ikz}$. La relación entre $\boldsymbol{B}_{\text{TEM}}$ y $\boldsymbol{E}_{\text{TEM}}$ es precisamente la misma que para las ondas planas en un medio infinito. La consecuencia final es que el modo TEM no puede existir dentro de un conductor cilíndrico, único, hueco y de conductividad infinita. La superficie es una equipotencial, por tanto, el campo eléctrico se anula en su interior. Es necesario tener dos o más superficies cilíndricas para soportar el modo TEM. El familiar cable coaxial y la línea de transmisión de hilos paralelos constituyen estructuras para las cuales éste es el modo dominante (véanse los problemas 8.1 y 8.2). Una propiedad importante del modo TEM es la ausencia de frecuencia de corte. El número de ondas [8.27] es real para cualquier ω. Esto no es cierto para los modos que se presentan en cilindros huecos, como vamos a ver a continuación.

En cilindros huecos (y en líneas de transmisión a altas frecuencias) se presentan dos tipos de configuraciones de los campos. Su existencia puede descubrirse al considerar las ecuaciones de onda [8.19] que satisfacen las componentes longitudinales E_z y B_z y las condiciones de contorno que deben cumplir. Para un cilindro perfectamente conductor las condiciones en la superficie límite son:

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0; \qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$$

siendo $\boldsymbol{n}$ la normal unitaria a la superficie S. Es evidente que E_z debe cumplir la condición:

$$E_z|_S=0 \tag{8.29}$$

Considerando la componente paralela a $\boldsymbol{n}$ en la primera de las ecuaciones [8.24] puede concluirse que la condición de contorno correspondiente a B_z es:

$$\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_S=0 \tag{8.30}$$

en donde $\partial/\partial n$ es la derivada normal en un punto de la superficie. Las ecuaciones bidimensionales de ondas [8.19] en E_z y B_z, junto con las condiciones de contorno para E_z y B_z en la superficie del cilindro, constituyen un problema de valores propios del tipo usual. Para una frecuencia dada ω solamente habrá

algunos valores del número de ondas axial k que sean compatibles con la ecuación diferencial y con las condiciones de contorno (situación característica de guía de onda); o bien, para un valor dado de k, solamente habrá ciertas frecuencias ω permitidas (situación característica de cavidad resonante). Como las condiciones de contorno en E_z y B_z son distintas, *los valores propios serán, en general, diferentes*. De un modo natural, los campos se dividen en dos categorías distintas:

ONDAS TRANSVERSALES MAGNÉTICAS (TM)

$$B_z = 0 \text{ en todas partes; condición de contorno, } E_z|_S = 0$$

ONDAS TRANSVERSALES ELÉCTRICAS (TE)

$$E_z = 0 \text{ en todas partes; condición de contorno, } \left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_S = 0$$

Algunas veces se utilizan las denominaciones «ondas eléctricas» (u ondas E) y «ondas magnéticas» (u ondas H) en lugar de TM y TE, respectivamente, lo que corresponde a indicar la componente axial presente en los campos. Las distintas ondas TM y TE, más la onda TEM cuando puede existir, constituyen un conjunto completo de campos que permiten describir cualquier perturbación electromagnética en una guía de ondas o cavidad.

8.3. GUIAS DE ONDAS

Partiendo de las ecuaciones del rotacional en [8.23] y [8.24] se encuentra que, para la propagación de ondas dentro de una guía hueca de sección transversal uniforme, los campos transversales eléctrico y magnético están relacionados por:

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{\pm 1}{Z}\, \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{E}_t \qquad [8.31]$$

tanto para las ondas TM como las TE. La Z se denomina *impedancia de la onda*, y su valor es:

$$Z = \begin{cases} \dfrac{k}{\epsilon\omega} = \dfrac{k}{k_0}\sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}} & \text{(TM)} \\ \dfrac{\mu\omega}{k} = \dfrac{k_0}{k}\sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}} & \text{(TE)} \end{cases} \qquad [8.32]$$

donde, a su vez, k_0 está dada por [8.27]. El signo más (o menos) de [8.31] procede de la dependencia en z, e^{ikz} (o e^{-ikz}). Los campos transversales quedan determinados por los longitudinales mediante:

$$\text{ONDAS TM:} \quad \boldsymbol{E}_t = \pm\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t\psi$$
$$\text{ONDAS TE:} \quad \boldsymbol{H}_t = \pm\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t\psi \qquad [8.33]$$

en las que ψ es igual a E_z para las ondas TM (y a H_z para las TE) *, y γ^2 se define a continuación. La función escalar ψ satisface a la ecuación de ondas bidimensional [8.19]:

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)\psi = 0 \qquad [8.34]$$

en la que

$$\gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 - k^2 \qquad [8.35]$$

y está sujeta a la condición de contorno:

$$\psi|_S = 0, \quad \text{o} \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = 0 \qquad [8.36]$$

según se trate de ondas TM o TE.

La ecuación [8.34] en ψ, junto con la condición de contorno [8.36], especifica un problema de valores propios. Se ve fácilmente que la constante γ^2 debe ser no negativa. Vulgarmente hablando se interpreta esto diciendo que ψ debe ser oscilatoria para poder satisfacer la condición de contorno [8.36] en partes opuestas del cilindro. Habrá un espectro de valores propios γ_λ^2 a los que corresponderán las soluciones ψ_λ, $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, las cuales forman un conjunto ortogonal. Estas distintas soluciones reciben el nombre de *modos de la guía.* Para una frecuencia dada ω, el número de ondas para cada valor de λ queda determinado.

$$k_\lambda^2 = \mu\epsilon\omega^2 - \gamma_\lambda^2 \qquad [8.37]$$

Si definimos una *frecuencia de corte* ω_λ

$$\omega_\lambda = \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\epsilon}} \qquad [8.38]$$

podemos expresar el número de ondas en la forma:

$$k_\lambda = \sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2} \qquad [8.39]$$

Observemos que para $\omega > \omega_\lambda$, el número de ondas k_λ es real; por la guía se pueden propagar las ondas del modo λ. Para frecuencias inferiores a la de

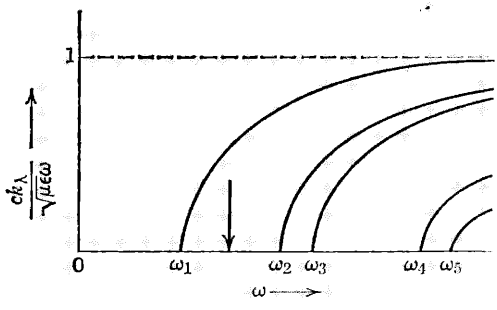


FIG. 8.4. Número de ondas k_λ en función de la frecuencia para varios modos $\lambda \cdot \omega_\lambda$ en la frecuencia de corte.

* Hemos cambiado de tomar ***E*** y ***B*** como campos básicos a tomar ***E*** y ***H*** para eliminar factores de μ cuando se utilizan las impedancias de onda. (Como la impedancia ordinaria, la impedancia de la onda implica tensiones e intensidades y de ahí que convengan ***E*** y ***H***.)

corte, k_λ es imaginario; tales modos no se pueden propagar y reciben el nombre de *modos de corte* o *evanescentes*. En la figura 8.4 se representa de forma cualitativa el comportamiento del número de ondas axial en función de la frecuencia. Vemos que para una frecuencia dada solamente se puede propagar un número finito de modos. A menudo es conveniente elegir las dimensiones de la guía de tal modo que a la frecuencia que se trabaja se propaga solamente el modo más bajo. Este caso se indica mediante una flecha vertical en la figura.

Como el número de ondas k_λ es siempre menor que el valor $\sqrt{\mu\epsilon}\,\omega$ correspondiente al espacio ilimitado, la longitud de onda en la guía es siempre mayor que la longitud de onda en el espacio libre. A su vez, la velocidad de fase es mayor que el valor correspondiente al espacio infinito:

$$v_p = \frac{\omega}{k_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2}} > \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \qquad [8.40]$$

La velocidad de fase se hace infinita exactamente en el punto de corte.

8.4. MODOS EN UNA GUIA DE ONDAS RECTANGULAR

Como ilustración importante de los aspectos generales descritos en la sección anterior, consideraremos la propagación de ondas TE en una guía rectan-

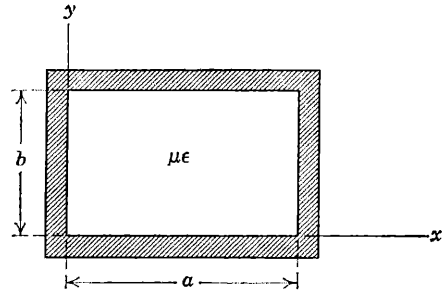


FIG. 8.5.

gular cuyas dimensiones interiores son a, b (Fig. 8.5). La ecuación de ondas para $\psi = H_z$ es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right)\psi = 0 \qquad [8.41]$$

con las condiciones de contorno $\partial\psi/\partial n = 0$ para $x = 0$, a e $y = 0$, b. La solución para ψ es, pues:

$$\psi_{mn}(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad [8.42]$$

donde

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \qquad [8.43]$$

Hemos reemplazado el índice único λ, que nos distinguía los modos, por los dos enteros positivos m, n. Para que no sean soluciones triviales, m y n no pueden ser ambos cero. La frecuencia de corte ω_{mn} viene dada por

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{1/2} \qquad [8.44]$$

Si $a > b$, la menor frecuencia de corte, la del modo TE dominante, tiene lugar para $m=1$, $n=0$

$$\omega_{10} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon a}} \qquad [8.45]$$

Corresponde a media longitud de onda en el espacio libre transversalmente a la guía. La forma explícita de los campos para este modo, que se designa como $TE_{1,0}$, es:

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t} \\ H_x &= -\frac{ika}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t} \\ E_y &= i\frac{\omega a \mu}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t} \end{aligned} \qquad [8.46]$$

en la que $k = k_{1,0}$ está dada por [8.39] si se hace $\omega_\lambda = \omega_{1,0}$. La presencia del factor i en B_x (y E_y) significa que hay una diferencia de fase espacial (o temporal) de 90 grados entre B_x (y E_y) y B_z en la dirección de propagación. Sucede que el modo $TE_{1,0}$ tiene la frecuencia de corte más baja entre los modos TE y TM*, y por ello es el que se usa en la mayoría de las situaciones prácticas. Para una elección particular $a = 2b$, la razón de las frecuencias de corte ω_{mn} respecto de ω_{10} para los primeros modos véase en la página siguiente.

Existe un intervalo de frecuencias desde la de corte al doble de la de corte, o hasta (a/b) veces el corte, según cuál de las dos sea menor, en el cual el modo $TE_{1,0}$ es el único modo que se propaga. Más allá de esta frecuencia empiezan a intervenir rápidamente otros modos. Las configuraciones de los campos del modo $TE_{1,0}$ y otros se representan en varios libros, por ejemplo, *American Institute of Physics Handbook*, ed. D. E. Gray, McGraw-Hill, Nueva York (1972[3]), págs. 5-54.

---

* Resulta evidente si observamos que para los modos TM, E_z es de la forma:

$$E_z = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

mientras que γ^2 viene aún dado por [8.43]. Al modo más bajo corresponde $m=n=1$. Su frecuencia de corte es mayor que la del modo $TE_{1,0}$ en un factor $\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

		$n \rightarrow$			
		0	1	2	3
	0		2,00	4,00	6,00
	1	1,00	2,24	4,13	
m	2	2,00	2,84	4,48	
$\downarrow$	3	3,00	3,61	5,00	
	4	4,00	4,48	5,66	
	5	5,00	5,39		
	6	6,00			

8.5. FLUJO DE ENERGIA Y ATENUACION EN LAS GUIAS DE ONDAS

La discusión general de la sección 8.3 para una guía cilíndrica de sección transversal arbitraria puede extenderse para considerar el flujo de energía a lo largo de la guía y la atenuación de las ondas a causa de las pérdidas en las paredes que presentan conductividad finita. Restringiremos nuestro tratamiento a un modo cada vez; los modos degenerados se mencionarán únicamente en forma breve. El flujo de energía se describe mediante el vector de Poynting complejo:

$$\boldsymbol{S} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*) \qquad [8.47]$$

cuya parte real nos da el flujo energético medio temporal. Si utilizamos [8.31] y [8.33] hallamos para los dos tipos de campo:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\omega k}{2\gamma^4} \begin{cases} \epsilon \left[\boldsymbol{e}_3 |\nabla_t \psi|^2 + i \dfrac{\gamma^2}{k} \psi \nabla_t \psi^* \right] \\ \mu \left[\boldsymbol{e}_3 |\nabla_t \psi|^2 - i \dfrac{\gamma^2}{k} \psi^* \nabla_t \psi \right] \end{cases} \qquad [8.48]$$

donde la ecuación superior (inferior) se refiere a los modos TM (TE). Como ψ es generalmente real *, vemos que la componente transversal de $\boldsymbol{S}$ representa energía reactiva y no contribuye al flujo energético medio temporal. Por otro lado, la componente axial de $\boldsymbol{S}$ nos da el flujo energético medio temporal a lo largo de la guía. Para calcular el flujo total de potencia P, integraremos la componente axial de $\boldsymbol{S}$ extendiéndola al área A de la sección transversal:

$$P = \int_A \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e}_3 \, da = \frac{\omega k}{2\gamma^4} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \mu \end{Bmatrix} \int_A (\nabla_t \psi)^* \cdot (\nabla_t \psi) \, da \qquad [8.49]$$

Aplicando la primera identidad de Green [1.34] en dos dimensiones, podemos escribir [8.49] en la forma:

$$P = \frac{\omega k}{2\gamma^4} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \mu \end{Bmatrix} \left[\oint_C \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dl - \int_A \psi^* \nabla_t^2 \psi \, da \right] \qquad [8.50]$$

* Es posible excitar la guía de tal manera que un modo dado, o una combinación lineal de modos, tenga una ψ compleja. Entonces, puede tener lugar un flujo medio de energía de tipo transversal. Sin embargo, como se trata de un flujo circulatorio, sólo representa energía almacenada y no es de gran importancia.

donde la primera integral se extiende a lo largo de la curva C que define la superficie límite del cilindro. Esta integral es nula para ambos tipos de campos debido a las condiciones de contorno [8.36]. Por medio de la ecuación de ondas [8.34], podemos reducir la segunda integral a la integral de normalización para ψ. La potencia transmitida es, pues,

$$P=\frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\left(1-\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\int_A \psi^*\psi\, da \qquad [8.51]$$

en donde la línea superior (inferior) se refiere a los modos TM (TE). La forma en que depende de la frecuencia se ha expresado explícitamente.

Resulta inmediato calcular la energía del campo por unidad de longitud de la guía, de modo análogo al utilizado en el cálculo del flujo de potencia. El resultado es:

$$U=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\int_A \psi^*\psi\, da \qquad [8.52]$$

Si lo comparamos con el flujo energético vemos que P y U son proporcionales. La constante de proporcionalidad tiene las dimensiones de una velocidad (velocidad del flujo energético), y es precisamente la velocidad de grupo,

$$\frac{P}{U}=\frac{k}{\omega}\frac{1}{\mu\epsilon}=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{1-\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}}=v_g \qquad [8.53]$$

como puede verificarse calculando directamente $v_g=d\omega/dk$ en [8.39], si se supone que el dieléctrico que llena la guía no es dispersivo. Observemos que v_g es siempre más pequeña que la velocidad de las ondas en un medio ilimitado y se hace cero en el punto de corte. El producto de la velocidad de fase [8.40] por la velocidad de grupo es constante:

$$v_p v_g=\frac{1}{\mu\epsilon} \qquad [8.54]$$

como consecuencia inmediata del hecho de que $\omega\,\Delta\omega \propto k\,\Delta k$. Nuestras consideraciones hasta este momento se han aplicado a guías de ondas con paredes perfectamente conductoras. El número de ondas axial k_λ era o real o imaginario puro. Si las paredes presentan una conductividad finita habrá pérdidas óhmicas y el flujo energético a lo largo de la guía se verá atenuado. Si la conductividad de las paredes es grande, el número de ondas tendrá un término adicional pequeño, con partes real e imaginaria:

$$k_\lambda=k_\lambda^{(0)}+\alpha_\lambda+i\beta_\lambda \qquad [8.55]$$

donde $k_\lambda^{(0)}$ es el valor correspondiente a paredes perfectamente conductoras. La modificación α_λ en la parte real del número de ondas no tiene en general importancia, excepto cerca del punto de corte, en el que $k_\lambda^{(0)}\to 0$. La constante de atenuación β_λ puede hallarse o bien resolviendo de nuevo el problema de contorno imponiendo condiciones apropiadas a una conductividad finita, o calculando las pérdidas óhmicas por los métodos expuestos en la sección 8.1 y apoyándonos en el principio de conservación de la energía. En primer lugar, utiliza-

remos esta última técnica. La potencia que fluye a lo largo de la guía será:

$$P(z)=P_0e^{-2\beta_\lambda z} \qquad [8.56]$$

Y la constante de atenuación será, pues,

$$\beta_\lambda=-\frac{1}{2P}\frac{dP}{dz} \qquad [8.57]$$

en donde $-dP/dz$ es la potencia disipada como pérdidas óhmicas por unidad de longitud de la guía. De acuerdo con los resultados de la sección 8.1, esta disipación de potencia es:

$$-\frac{dP}{dz}=\frac{1}{2\sigma\delta\mu^2}\oint_C |\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}|^2\,dl \qquad [8.58]$$

en donde la integral está extendida a todo el contorno de la guía. Utilizando como expresiones de los campos [8.32] y [8.33] resulta sencillo demostrar que para un modo dado se tiene:

$$-\frac{dP}{dz}=\frac{1}{2\sigma\delta\mu^2}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\oint_C \left\{\begin{array}{c} \dfrac{c^2}{\omega_\lambda^2}\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 \\ \dfrac{c^2}{\mu\epsilon\omega_\lambda^2}\left(1-\dfrac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)|\boldsymbol{n}\times\nabla_t\psi|^2+\dfrac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}|\psi|^2 \end{array}\right\} dl \qquad [8.59]$$

donde otra vez la línea superior (inferior) se refiere a los modos TM (TE).

Como las derivadas transversales de ψ están determinadas completamente por la forma y tamaño de la guía de ondas, la expresión [8.59] nos muestra de forma explícita la pérdida de potencia en función de la frecuencia. En efecto, las integrales de [8.59] pueden estimarse simplemente gracias al hecho de que, para cada modo,

$$(\nabla_t^2+\mu\epsilon\omega_\lambda^2)\psi=0 \qquad [8.60]$$

Esto significa que en cierto sentido de media, y salvo circunstancias excepcionales, las derivadas transversales de ψ deben ser del orden de magnitud de $\sqrt{\mu\epsilon}\,\omega_\lambda\psi$:

$$\left\langle\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2\right\rangle\sim\langle|\boldsymbol{n}\times\nabla_t\psi|^2\rangle\sim\mu\epsilon\omega_\lambda^2\langle|\psi|^2\rangle \qquad [8.61]$$

Por consiguiente, las integrales de línea [8.59] pueden relacionarse con la integral de normalización $|\psi|^2$ sobre la superficie. Por ejemplo:

$$\oint_C\frac{c^2}{\omega_\lambda^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 dl=\xi_\lambda\mu\epsilon\frac{C}{A}\int_A|\psi|^2\,da \qquad [8.62]$$

siendo C el perímetro y A el área de la sección transversal, mientras que ξ_λ es un número sin dimensiones cuyo orden de magnitud es la unidad. Sin mayor conocimiento de la forma de la guía, podemos obtener el orden de magnitud de

la constante de atenuación β_λ, y exponer de forma completa su dependencia con la frecuencia. Así, pues, usando [8.59] en combinación con [8.62] y [8.51], y la dependencia con la frecuencia de la profundidad de penetración [8.8], encontramos:

$$\beta_\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{\sigma\delta_\lambda} \left(\frac{C}{2A}\right) \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}} \left[\xi_\lambda + \eta_\lambda \left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2\right] \qquad [8.63]$$

donde σ es la conductividad (supuesta independiente de la frecuencia), δ_λ es el espesor de penetración a la frecuencia de corte y ξ_λ, η_λ son números adimensionales del orden de la unidad. Para los modos TM, $\eta_\lambda = 0$.

Dada la forma geométrica de la sección transversal, el calcular los parámetros sin dimensiones ξ_λ y η_λ de [8.63] es una cuestión inmediata. Para los modos TE con $n=0$ en una guía rectangular resultan los valores $\xi_{m,0} = a/(a+b)$ y $\eta_{m,0} = 2b/(a+b)$. Como era de esperar, si las dimensiones relativas son razonables estos parámetros son del orden de la unidad.

El comportamiento general de β_λ como función de la frecuencia se muestra en la figura 8.6. La atenuación mínima ocurre a una frecuencia bastante superior a la de corte. Para los modos TE las magnitudes relativas de ξ_λ y η_λ de-

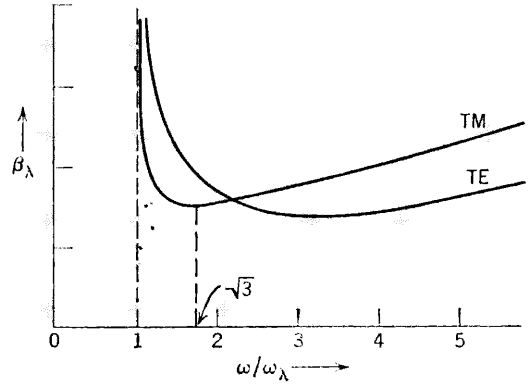


FIG. 8.6. Constante de atenuación β_λ en función de la frecuencia para modos TE y TM. En el caso de los modos TM, el mínimo de atenuación tiene lugar para $\omega/\omega_\lambda = \sqrt{3}$, independiente de la forma de la sección transversal.

penden de la forma de la guía y de λ. Por consiguiente, no se puede establecer de forma general la frecuencia para la cual es mínima la atenuación. En cambio, para los modos TM el mínimo siempre se halla para $\omega_{\text{mín}} = \sqrt{3}\omega_\lambda$. A altas frecuencias la atenuación aumenta como $\omega^{\frac{1}{2}}$. En la región de microondas los valores típicos de la constante de atenuación en guías de cobre son del orden de $\beta_\lambda \sim 10^{-4}\omega_\lambda/c$, lo que conduce a distancias entre 200 y 400 metros para una atenuación a $1/e$.

La aproximación empleada para obtener [8.63] falla en la proximidad del corte. El valor infinito que da [8.63] para $\omega = \omega_\lambda$, pone en evidencia este hecho, puesto que resulta físicamente imposible.

8.6. PERTURBACION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

El empleo del principio de conservación de la energía para determinar la constante de atenuación β_λ es directo y presenta una apariencia intuitiva, pero conduce a resultados sin sentido físico para el punto de corte y no permite calcular un valor para α_λ, el cambio en la parte real del número de ondas. Ambos defectos pueden remediarse utilizando una técnica denominada *perturbación de las condiciones de contorno.* En principio, al menos, el método es capaz de proporcionar resultados con el grado de precisión que se desee, aunque nosotros lo aplicaremos sólo al menor orden. Permite también estudiar la atenuación para los modos degenerados, como se mencionará brevemente al final de la presente sección.

Para concretar consideraremos un solo modo TM, que no esté acompañado por ningún otro modo (TE o TM) degenerado o cuasi-degenerado. El razonamiento para un modo TE aislado es semejante. Para reducir el número de sub- o superíndices designaremos a la solución para paredes perfectamente conductoras (la no perturbada) con un subíndice cero y a la solución para paredes de conductividad finita (la perturbada) sin subíndice o superíndice alguno. Por consiguiente, el campo eléctrico longitudinal en el problema no perturbado será $E_z=\psi_0$, siendo:

$$(\nabla_t^2+\gamma_0^2)\psi_0=0; \qquad \psi_0|_S=0 \tag{8.64}$$

y γ_0^2 real. Cuando la conductividad es grande, pero finita, $E_z=\psi$ ya no es cero sobre las paredes, sino que viene dado por [8.11]. Dentro del menor orden de aproximación, el primer miembro de [8.11] está representado por los campos no perturbados. Utilizando la primera de las ecuaciones [8.23] y la [8.33], la condición de contorno para la ψ perturbada puede expresarse en la forma:

$$\psi|_S \simeq f \frac{\partial \psi_0}{\partial n}\bigg|_S \tag{8.65}$$

en la que f es un parámetro pequeño y complejo de valor *:

$$f=(1+i)\frac{\mu_c \delta}{2\mu}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tag{8.66}$$

En esta expresión μ_c y μ son, respectivamente, las permeabilidades magnéticas de las paredes de la guía y del medio que la llena, δ es la profundidad de penetración [8.8] y ω_0 la frecuencia de corte del modo no perturbado. Por consiguiente, para el problema perturbado las ecuaciones equivalentes a [8.64] son:

$$(\nabla_t^2+\gamma^2)\psi=0; \qquad \psi|_S \simeq f \frac{\partial \psi_0}{\partial n}\bigg|_S \tag{8.67}$$

---

* De modo más general, f puede expresarse en función de la impedancia superficial Z_s en la forma: $f=(i\omega/\mu\omega_0^2)Z_s$.

Si sólo se desea el valor propio γ^2, puede emplearse el teorema de Green en dos dimensiones [1.35]:

$$\int_A [\phi \nabla_t^2 \psi - \psi \nabla_t^2 \phi]\, da = \oint_C \left[\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] dl$$

expresión en la que la normal correspondiente al primer miembro está dirigida hacia *dentro* (hacia el exterior del conductor, de conformidad con [8.11] y [8.65]). Haciendo $\psi = \psi$ y $\phi = \psi_0^*$, y utilizando las ecuaciones de ondas [8.64] y [8.67], así como sus condiciones de contorno, el enunciado del teorema de Green se convierte en:

$$(\gamma_0^2 - \gamma^2) \int_A \psi_0^* \psi \, da = f \oint_C \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right|^2 dl \qquad [8.68]$$

Como se supone que f es un parámetro pequeño, es permisible normalmente aproximar ψ en la integral del primer miembro por su valor no perturbado ψ_0. Esto conduce al resultado final:

$$\gamma_0^2 - \gamma^2 = k^2 - k^{(0)2} \simeq f \frac{\oint_C \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right|^2 dl}{\int_A |\psi_0|^2 \, da} \qquad [8.69]$$

Puede encontrarse, partiendo de las ecuaciones [8.51] y [8.59] de la sección anterior, que la relación de integrales que aparece en el segundo miembro de [8.69] interviene en la expresión:

$$2k^{(0)} \beta_{\mathrm{TM}}^{(0)} = \frac{\mu_c \delta}{2\mu} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{\oint_C \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right|^2 dl}{\int_A |\psi_0|^2 \, da} \qquad [8.70]$$

en la que $\beta^{(0)}$ está definida por [8.57] y [8.63]. Esto significa que [8.69] puede escribirse en la forma:

$$k^2 \simeq k^{(0)2} + 2(1+i) k^{(0)} \beta^{(0)} \qquad [8.71]$$

resultado que es válido tanto para los modos TM como para los TE, con el $\beta^{(0)}$ apropiado dado en la sección anterior. Cuando $k^{(0)} \gg \beta^{(0)}$, la ecuación [8.71] se reduce a la expresión primitiva [8.55] con $\alpha = \beta$. Sin embargo, en el corte y más allá, donde los resultados anteriores fallan, la ecuación [8.71] proporciona resultados perceptibles, puesto que la combinación $k^{(0)}\beta^{(0)}$ es finita y se comporta de modo suave en la proximidad de $k^{(0)} = 0$. Evidentemente, la transición entre un modo que se propaga y un modo que no lo hace no es brusca si las paredes no son conductores perfectos; sin embargo, la atenuación inmediatamente por encima y por debajo de la frecuencia de corte es lo suficientemente grande para que se cometa poco error al suponer que el corte es brusco.

La presente discusión, y la de la sección previa, están limitadas al caso en que sólo haya un modo a la vez. Esta aproximación es adecuada para modos no degenerados con pérdidas no demasiado grandes. Sin embargo, si sucede

que un modo TM y un modo TE son degenerados (como ocurre en la guía rectangular de ondas cuando $n \neq 0$, $m = 0$), entonces cualquier perturbación, por pequeña que sea, puede provocar una mezcla apreciable de los dos modos. En tales circunstancias, los métodos empleados hasta ahora fallan. El fallo del presente método tiene lugar en la condición de contorno perturbada [8.65]; en ella aparece ahora en el segundo miembro un término en el que figura la derivada tangencial del H_z no perturbado, además de la derivada normal de E_z. Y, naturalmente, hay una condición de contorno perturbada correspondiente a H_z en la que aparecen ambos campos longitudinales no perturbados. El problema es de teoría de perturbaciones con estados degenerados que resulta más familiar en el campo de la mecánica cuántica. Los modos perturbados son combinaciones lineales ortogonales de los modos TM y TE no perturbados, y las constantes de atenuación para los dos modos tienen la expresión característica:

$$\beta = \tfrac{1}{2}(\beta_{TM} + \beta_{TE}) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\beta_{TM} - \beta_{TE})^2 + 4|K|^2} \qquad [8.72]$$

en la que β_{TM} y β_{TE} son los valores hallados anteriormente y K es una constante de acoplamiento.

El tratamiento de la atenuación para modos degenerados empleando la perturbación de las condiciones de contorno ha sido realizado por varios autores *. La discusión de PAPADOPOULOS se presenta en el libro de COLLIN, sección 5.3.

8.7. CAVIDADES RESONANTES

Aunque una cavidad resonante electromagnética puede ser de cualquier forma, un tipo importante de cavidades se obtiene cerrando un trozo de guía de ondas cilíndricas con bases. Supondremos que estas bases extremas son planas y perpendiculares al eje del cilindro. Como de costumbre, supondremos que las paredes de la cavidad presentan una conductividad infinita y que en el interior hay un dieléctrico sin pérdidas cuyas constantes son μ, ϵ. A causa de las reflexiones en las superficies extremas la variación de los campos con z será la apropiada para la formación de ondas estacionarias:

$$A \operatorname{sen} kz + B \cos kz$$

Si las superficies planas se encuentran en las posiciones $z = 0$ y $z = d$, las condiciones de contorno solamente pueden ser satisfechas en cada una de las superficies si:

$$k = p\frac{\pi}{d}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots \qquad [8.73]$$

Para campos TM la anulación de $\boldsymbol{E}_t$ en $z = 0$ y $z = d$ requiere que:

$$E_z = \psi(x, y) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right), \qquad p = 0, 1, 2, \ldots \qquad [8.74]$$

* G. GOUBAU, *Electromagnetic Waveguides and Cavities*, Pergamon Press, Londres (1961), sección 25.
V. M. PAPADOPOULOS, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 7, 325 (1954).

Análogamente, para los campos TE, el hecho de que se anule H_z para $z=0$, $z=d$ requiere:

$$H_z=\psi(x, y)\,\text{sen}\left(\frac{p\pi z}{d}\right), \quad p=1, 2, 3, \ldots \qquad [8.75]$$

Así, por medio de [8.31] y [8.33], hallamos los campos transversales:

CAMPOS TM:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_t &= -\frac{p\pi}{d\gamma^2}\,\text{sen}\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\nabla_t\psi \\ \boldsymbol{H}_t &= \frac{i\epsilon\omega}{\gamma^2}\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\boldsymbol{e}_3\times\nabla_t\psi \end{aligned} \qquad [8.76]$$

CAMPOS TE:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_t &= -\frac{i\omega\mu}{\gamma^2}\,\text{sen}\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\boldsymbol{e}_3\times\nabla_t\psi \\ \boldsymbol{H}_t &= \frac{p\pi}{d\gamma^2}\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\nabla_t\psi \end{aligned} \qquad [8.77]$$

Ahora se satisfacen de forma explícita las condiciones de contorno en los extremos de la cavidad. Nos queda todavía, como anteriormente, el problema de valores propios [8.34]-[8.36]. Pero en este caso, la constante γ^2 es:

$$\gamma^2=\mu\epsilon\omega^2-\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \qquad [8.78]$$

Para cada valor de p el valor propio γ_λ^2 da lugar a una frecuencia de resonancia propia $\omega_{\lambda p}$:

$$\omega_{\lambda p}^2=\frac{1}{\mu\epsilon}\left[\gamma_\lambda^2+\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2\right] \qquad [8.79]$$

y a los campos correspondientes a este modo resonante. Las frecuencias de resonancia forman un conjunto discreto que se puede determinar gráficamente sobre la representación del número de ondas axial k en una guía, en función de la frecuencia (véase pág. 350), exigiendo que $k=p\pi/d$. Usualmente es recomendable elegir las distintas dimensiones de la cavidad de tal forma que la frecuencia de resonancia a la cual se opera esté bien separada de las otras frecuencias de resonancia. En estas condiciones, la cavidad será relativamente estable en el modo de operar e insensible a los efectos perturbadores asociados con los corrimientos de frecuencia, variaciones de carga, etc.

Una cavidad resonante muy importante en la práctica es el cilindro recto circular, a veces provisto de un pistón que permite sintonizarlo cambiando la altura. El cilindro, con radio interior R y longitud d, se ha dibujado en la figura 8.7. Para un modo TM la ecuación de ondas transversal para $\psi=E_z$, su-

jeta a la condición de contorno $E_z=0$ para $\rho=R$, tiene la solución

$$\psi(\rho, \phi)=J_m(\gamma_{mn}\rho)e^{\pm im\phi} \qquad [8.80]$$

donde

$$\gamma_{mn}=\frac{x_{mn}}{R}$$

x_{mn} es la raíz n-sima de la ecuación $J_m(x)=0$. Estas raíces se dan en la página 108, a continuación de la ecuación [3.92]. Los enteros m y n toman los va-

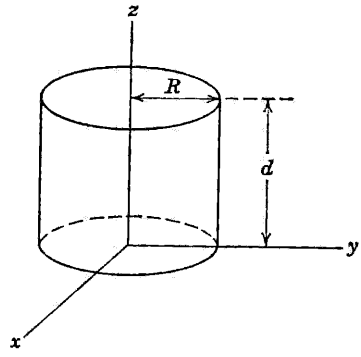


FIG. 8.7.

lores $m=0$, 1, 2, ... y $n=1$, 2, 3, ... Las frecuencias de resonancia vienen dadas por:

$$\omega_{mnp}=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\frac{x^2_{mn}}{R^2}+\frac{p^2\pi^2}{d^2}} \qquad [8.81]$$

El modo TM más bajo corresponde a $m=0$, $n=1$, $p=0$, y se designa mediante $TM_{0,1,0}$. Su frecuencia de resonancia es:

$$\omega_{010}=\frac{2{,}405}{\sqrt{\mu\epsilon}\,R}$$

Las expresiones explícitas de los campos son:

$$\left.\begin{aligned} E_z&=E_0J_0\left(\frac{2{,}405\rho}{R}\right)e^{-i\omega t} \\ H_\phi&=-i\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_0J_1\left(\frac{2{,}405\rho}{R}\right)e^{-i\omega t} \end{aligned}\right\} \qquad [8.82]$$

La frecuencia resonante para este modo es independiente de d. Por tanto, resulta imposible una sintonización sencilla.

Para los modos TE aún se aplica la solución básica [8.80], pero la condición

de contorno impuesta a $H_z\left(\left.\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right|_R=0\right)$ nos da:

$$\gamma_{mn}=\frac{x'_{mn}}{R}$$

donde x'_{mn} es la raíz enésima de $J'_m(x)=0$. A continuación tabulamos estas raíces para unos cuantos valores de m y n (para $m\neq 1$, $x=0$ es una raíz trivial):

Raíces de $J'_m(x)=0$

$m=0$:	$x'_{0n}=3{,}832,$	$7{,}016,$	$10{,}174,\ \ldots$
$m=1$:	$x'_{1n}=1{,}841,$	$5{,}331,$	$8{,}536,\ \ldots$
$m=2$:	$x'_{2n}=3{,}054,$	$6{,}706,$	$9{,}970,\ \ldots$
$m=3$:	$x'_{3n}=4{,}201,$	$8{,}015,$	$11{,}336,\ \ldots$

Las frecuencias de resonancia vienen dadas por:

$$\omega_{mnp}=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left(\frac{x'^2_{mn}}{R^2}+\frac{p^2\pi^2}{d^2}\right)^{1/2} \qquad [8.83]$$

donde $m=0, 1, 2, \ldots$, pero $n, p=1, 2, 3, \ldots$ Al modo TE más bajo corresponden $m=n=p=1$ y se designa por $TE_{1,1,1}$. Su frecuencia de resonancia es

$$\omega_{111}=\frac{1{,}841}{\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{1}{R}\left(1+2{,}912\frac{R^2}{d^2}\right)^{1/2} \qquad [8.84]$$

y los campos se derivan de

$$\psi=H_z=H_0J_1\left(\frac{1{,}841\rho}{R}\right)\cos\phi\ \text{sen}\left(\frac{\pi z}{d}\right)e^{-i\omega t} \qquad [8.85]$$

por medio de [8.77]. Si d es suficientemente grande ($d>2{,}03R$), la frecuencia de resonancia ω_{111} es más pequeña que la del modo TM más bajo. En tal caso, el modo $TE_{1,1,1}$ constituye la oscilación fundamental de la cavidad. Puesto que la frecuencia depende de la razón d/R, es posible una sintonización sencilla haciendo ajustable la separación entre las caras planas.

8.8. PERDIDAS DE POTENCIA EN UNA CAVIDAD; Q DE UNA CAVIDAD

Hemos visto en la sección anterior que las cavidades presentan frecuencias de oscilación discretas con una configuración de campo definida para cada frecuencia de resonancia. Esto implica que, si se intentara excitar por algún medio un modo particular de oscilación en una cavidad, no podrían desarrollarse los campos correctos a menos que la frecuencia de excitación fuera exactamente igual a la frecuencia de resonancia escogida. De hecho, en la realidad no existirá una singularidad del tipo de la función delta, sino que puede tener lugar una

excitación apreciable en una estrecha banda de frecuencias alrededor de la frecuencia propia. Una causa importante de esta dispersión en la agudeza de la frecuencia de oscilación es la disipación de energía en las paredes de la cavidad y posiblemente en el dieléctrico que llena la cavidad. El factor Q de la cavidad, definido como 2π veces la relación entre la energía media almacenada en la cavidad y la pérdida de energía por ciclo, constituye una medida de la agudeza de la respuesta de la cavidad a una excitación externa.

$$Q=\omega_0 \frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Potencia perdida}} \qquad [8.86]$$

Aquí ω_0 es la frecuencia de resonancia, suponiendo que no haya pérdidas. En virtud del principio de conservación de la energía, la potencia disipada a causa de las pérdidas óhmicas es la derivada con signo negativo de la energía almacenada U respecto del tiempo. Así, según [8.82], podemos expresar una ecuación que nos dé el comportamiento de U en función del tiempo.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dU}{dt}=-\frac{\omega_0}{Q}U \\ &\text{con la solución} \\ &U(t)=U_0 e^{-\omega_0 t/Q} \end{aligned}\right\} \qquad [8.87]$$

Si en la cavidad está almacenada inicialmente una cantidad de energía U_0, ésta decrece exponencialmente, siendo la constante de amortiguamiento inversamente proporcional a Q. La dependencia con el tiempo que aparece en [8.87] significa que las oscilaciones en la cavidad se atenúan de la forma siguiente:

$$E(t)=E_0 e^{-\omega_0 t/2Q} e^{-i(\omega_0+\Delta\omega_0)t} \qquad [8.88]$$

en la que hemos incluido una posible desviación $\Delta\omega$ en la frecuencia de resonancia además del amortiguamiento. Una oscilación amortiguada como ésta no tiene una frecuencia pura, sino que consta de una superposición de frecuencias alrededor de $\omega=\omega_0+\Delta\omega$. Así, pues:

$$\left.\begin{aligned} &E(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \\ &\text{donde} \\ &E(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} E_0 e^{-\omega_0 t/2Q} e^{i(\omega-\omega_0)t}\,dt \end{aligned}\right\} \qquad [8.89]$$

La integral [8.89] es elemental y conduce a una distribución de frecuencias para la energía en la cavidad que tiene la forma de una línea de resonancia:

$$|E(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega-\omega_0-\Delta\omega)^2+(\omega_0/2Q)^2} \qquad [8.90]$$

La forma de la resonancia [8.90], dibujada en la figura 8.8, tiene una anchura total Γ a la mitad del máximo (llamada confusamente semianchura) igual a ω_0/Q. Para una tensión de entrada constante, la energía de oscilación en la cavidad

varía con la frecuencia siguiendo la curva de resonancia en las proximidades de una frecuencia de resonancia particular. Por tanto, la separación en frecuencia $\delta\omega$ entre los puntos de potencia mitad determina la anchura Γ, la Q de la cavidad resulta:

$$Q=\frac{\omega_0}{\delta\omega}=\frac{\omega_0}{\Gamma} \qquad [8.91]$$

Para las cavidades de microondas resultan corrientes valores de Q de varios cientos o miles.

Para determinar la Q de una cavidad podemos calcular la energía media almacenada en ella y después determinar la potencia absorbida por las paredes.

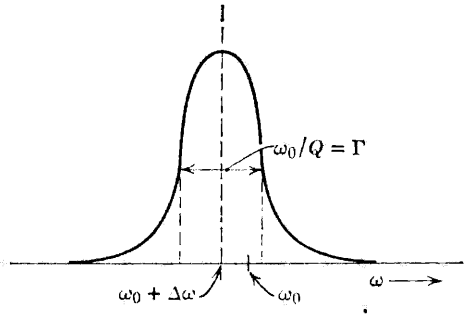


FIG. 8.8. Forma de la línea de resonancia. La anchura total Γ, a la que la potencia se reduce a la mitad del máximo, es igual a la frecuencia central ω_0 dividida por el factor Q de la cavidad.

Los cálculos son muy semejantes a los efectuados en la sección 8.5 para hallar la atenuación en las guías de onda. Aquí consideraremos solamente las cavidades cilíndricas de la sección 8.6, suponiendo que no hay degeneraciones. La energía almacenada en la cavidad para el modo λ, p es, según [8.74] y [8.77]:

$$U=\frac{d}{4}\left\{\begin{matrix}\epsilon\\ \mu\end{matrix}\right\}\left[1+\left(\frac{p\pi}{\gamma_\lambda d}\right)^2\right]\int_A |\psi|^2\,da \qquad [8.92]$$

en donde la línea superior (inferior) se refiere a los modos TM (TE). Para los modos TM en que $p=0$ deberemos multiplicar el resultado por 2.

Las pérdidas de potencia pueden calcularse modificando [8.58]:

$$P_{\text{pérd}}=\frac{1}{2\sigma\delta\mu^2}\left[\oint_C dl\int_0^d dz|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}|^2_{\text{lados}}+2\int_A da|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}|^2_{\text{bases}}\right] \qquad [8.93]$$

Para los modos TM con $p\neq 0$, resulta fácil probar que

$$P_{\text{pérd}}=\frac{\epsilon}{\sigma\delta\mu}\left[1+\left(\frac{p\pi}{\gamma_\lambda d}\right)^2\right]\left(1+\xi_\lambda\frac{Cd}{4A}\right)\int_A |\psi|^2\,da \qquad [8.94]$$

en donde el número sin dimensiones ξ_λ es el mismo que aparece en [8.62], C es la longitud de la circunferencia de la cavidad, y A el área transversal. Para $p=0$, ξ_λ debe reemplazarse por $2\xi_\lambda$. Combinando [8.92] y [8.94] de acuerdo con [8.86], y usando la definición [8.8] de la profundidad de penetración δ, tenemos

que el factor Q de la cavidad es:

$$Q=\frac{\mu}{\mu_c}\frac{d}{\delta}\frac{1}{2\left(1+\xi_\lambda\dfrac{Cd}{4A}\right)} \qquad [8.95]$$

donde μ_c es la permeabilidad de las paredes metálicas de la cavidad. Para los modos en que $p=0$, deberemos multiplicar la expresión [8.95] por 2 y sustituir ξ_λ por $2\xi_\lambda$. Si escribimos Q en la forma:

$$Q=\frac{\mu}{\mu_c}\left(\frac{V}{S\delta}\right)\times(\text{Factor geométrico}) \qquad [8.96]$$

se le puede dar una interpretación física intuitiva; V es el volumen de la cavidad y S la superficie total. La Q de la cavidad es, salvo un factor geométrico, la relación entre el volumen ocupado por los campos y el volumen del conductor en el cual penetran los campos debido a la conductividad finita. Para los modos TM en cavidades cilíndricas el factor geométrico es:

$$\frac{\left(1+\dfrac{Cd}{2A}\right)}{\left(1+\xi_\lambda\dfrac{Cd}{2A}\right)} \qquad [8.97]$$

para $p\neq 0$, y

$$\frac{2\left(1+\dfrac{Cd}{2A}\right)}{\left(1+\xi_\lambda\dfrac{Cd}{2A}\right)} \qquad [8.98]$$

para $p=0$. Para los modos TE en la cavidad cilíndrica, el factor geométrico es algo más complicado, pero del mismo orden de magnitud. Para el modo $TM_{0,1,0}$ en una cavidad cilíndrica de sección *circular* con los campos [8.82], $\xi_\lambda=1$ (válido para todos los modos TM), así que el factor geométrico es 2 y Q es:

$$Q=\left(\frac{\mu}{\mu_c}\right)\frac{1}{\left(1+\dfrac{d}{R}\right)}\frac{d}{\delta} \qquad [8.99]$$

Para el modo $TE_{1,1,1}$, el factor geométrico calculado es *:

$$\left(1+\frac{d}{R}\right)\frac{\left(1+0{,}344\dfrac{d^2}{R^2}\right)}{\left(1+0{,}209\dfrac{d}{R}+0{,}242\dfrac{d^3}{R^3}\right)} \qquad [8.100]$$

* Nótese que este factor varía desde la unidad cuando $d/R=0$ hasta un máximo de 2,13 para $d/R=1{,}91$, y después disminuye tendiendo a 1,42 cuando $d/R\to\infty$.

y la Q:

$$Q=\frac{\mu}{2\mu_c}\left(\frac{d}{\delta}\right)\frac{\left(1+0{,}344\,\frac{d^2}{R^2}\right)}{\left(1+0{,}209\,\frac{d}{R}+0{,}242\,\frac{d^3}{R^3}\right)} \qquad [8.101]$$

La expresión [8.96] de Q se aplica no sólo a las cavidades cilíndricas, sino también a cavidades de forma arbitraria con un factor geométrico adecuado del orden de la unidad.

El empleo del principio de conservación de la energía para describir las pérdidas en una cavidad tiene las mismas ventajas y desventajas que en las guías de ondas. Pueden calcularse los valores de Q, pero las posibles desviaciones de frecuencia caen fuera de las posibilidades del método. La técnica de perturbación de las condiciones de contorno, descrita en la sección 8.6, elimina también estos defectos. De hecho, la analogía es tan grande con la situación en las guías de ondas que los resultados pueden deducirse sin realizar explícitamente los cálculos. El problema sin perturbación de las frecuencias resonantes en la cavidad con paredes perfectamente conductoras está determinado por [8.64] o su equivalente para los modos TE. Análogamente, el problema con perturbaciones comprende la solución de [8.67] o su equivalente. Surge un resultado equivalente al [8.69] de modo evidente. La diferencia $(\gamma_0^2-\gamma^2)$ es proporcional a $(\omega_0^2-\omega^2)$ siendo ahora ω_0 la frecuencia de resonancia no perturbada en lugar de la frecuencia de corte de la guía de ondas y ω es la frecuencia resonante perturbada. Así, la análoga de [8.69] toma la forma:

$$\omega_0^2-\omega^2 \simeq (1+i)I \qquad [8.102]$$

siendo I la relación entre las integrales apropiadas. En el límite en que $I\to 0$, la parte imaginaria de ω es $-iI/2\omega_0$. Según [8.88] esto debe identificarse con $-i\omega/2Q$; por consiguiente, $I=\omega_0^2/Q$. La ecuación [8.102] puede, pues, escribirse:

$$\omega^2 \simeq \omega_0^2\left[1-\frac{(1+i)}{Q}\right] \qquad [8.103]$$

donde Q es la magnitud definida en [8.86] y [8.92], [8.93]. Se ve que el amortiguamiento da lugar a modificaciones iguales en las partes real e imaginaria de ω^2. Para valores de Q grandes, el cambio en la frecuencia de resonancia, y no su cuadrado, es:

$$\Delta\omega \simeq \operatorname{Im}\omega \simeq -\frac{\omega_0}{2Q}$$

La frecuencia de resonancia siempre se hace menor por la presencia de pérdidas resistivas. La casi igualdad entre las partes real e imaginaria del cambio de ω^2 es consecuencia de la condición de contorno [8.11] que es válida para conductores relativamente buenos. Para sistemas con muchas pérdidas, o límites con impedancias superficiales diferentes, las magnitudes relativas de las partes real e imaginaria de ω^2 pueden ser diferentes de las dadas por [8.103].

En esta sección, al igual que en la 8.6, la discusión se ha limitado a modos no degenerados. Al final de la sección 8.6 se han dado referencias de tratamientos que remedian este defecto.

8.9. LA TIERRA Y LA IONOSFERA COMO UNA CAVIDAD RESONANTE: RESONANCIAS DE SCHUMANN

Un ejemplo poco común de cavidad resonante lo constituye el sistema formado por la tierra misma como una de las superficies límite y la ionosfera como la otra. Los modos resonantes inferiores de tal sistema evidentemente son de muy baja frecuencia, puesto que su longitud de onda característica debe ser del orden de magnitud del radio terrestre. En tales circunstancias, la ionosfera y la tierra se comportan ambas como conductores con conductividades reales. El agua del mar tiene una conductividad $\sigma \sim 0{,}1$ mho/m, mientras que la ionosfera tiene $\sigma \sim 10^{-7} - 10^{-4}$ mhos/m. Las paredes de la cavidad distan, pues, de ser conductores perfectos, especialmente la exterior. No obstante, vamos a idealizar la situación física considerando como modelo dos esferas concéntricas, perfectamente conductoras, de radios a y $b = a + h$, siendo a el radio de la tierra ($a \simeq 6\,400$ km) y h la altura a que se halla la ionosfera por encima de la superficie ($h \simeq 100$ km). Además, si estamos interesados sólo en las más bajas frecuencias, podemos enfocar nuestra atención sobre los modos TM, que tienen campos magnéticos sólo tangenciales *. La razón para ello es que los modos TM, con el campo eléctrico dirigido radialmente, pueden satisfacer la condición de contorno, anulación de la componente tangencial del campo eléctrico, en $r = a$ y $r = b$ sin variación radial apreciable de los campos. Por otra parte, los modos TE, que tienen campos eléctricos puramente tangenciales, deben presentar una variación radial de aproximadamente media longitud de onda entre $r = a$ y $r = b$. Las frecuencias más bajas, para los modos TE, son del orden de $\omega \sim \pi c/h$, en tanto que para los modos TM más bajos, $\omega \sim c/a$.

El problema general de los modos con geometría esférica es lo bastante complicado para que lo dejemos hasta el capítulo 16. Aquí vamos a considerar solamente modos TM y suponer que los campos son independientes del ángulo acimutal ϕ. Esto último no es una restricción real; como es sabido, al considerar los armónicos esféricos la magnitud importante es l y no m. Si la componente radial de $\boldsymbol{B}$ se anula y las otras componentes no dependen de ϕ, la anulación de la divergencia de $\boldsymbol{B}$ exige que sólo sea diferente de cero B_ϕ si los campos son finitos en $\theta = 0$. La ley de Faraday entonces requiere que $E_\phi = 0$. Por consiguiente, las ecuaciones homogéneas de Maxwell determinan que los modos TM que no dependan de ϕ tienen únicamente E_r, E_θ y B_ϕ. Suponiendo que la dependencia temporal es de la forma $e^{-i\omega t}$, las dos ecuaciones de Maxwell con rotacionales pueden combinarse para dar:

$$\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{B} - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B} = 0 \qquad [8.104]$$

tomando iguales a la unidad las permeabilidades relativas del medio existente entre las esferas. La componente ϕ de [8.104] es:

$$\frac{\omega^2}{c^2}(rB_\phi) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rB_\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta\, rB_\phi)\right] = 0 \qquad [8.105]$$

* Con geometría esférica la notación TE (o TM) indica la ausencia de componente *radial* del campo eléctrico (o magnético).

La parte angular de [8.105] puede transformarse en:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\, r\theta_\phi)\right]=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial(rB_\phi)}{\partial\theta}\right)=\frac{rB_\phi}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

que demuestra, al comparar con [3.6] o [3.9], que la dependencia con θ está dada por los polinomios asociados de Legendre $P_l^m(\cos\theta)$ con $m=\pm 1$. Por tanto, resulta natural escribir la solución en forma factorizada:

$$B_\phi(r,\theta)=\frac{u_l(r)}{r}P_l^1(\cos\theta) \qquad [8.106]$$

Al sustituir en [8.105] nos da, como ecuación diferencial para $u_l(r)$:

$$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l(r)=0 \qquad [8.107]$$

en la que $l=1, 2, \ldots$ define la dependencia angular de los modos.

Las frecuencias características salen de [8.107] cuando se imponen las condiciones de contorno apropiadas para la existencia de paredes conductoras en $r=a$ y $r=b$. Los campos eléctricos radial y tangencial son:

$$E_r=\frac{ic^2}{\omega r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta B_\phi)=-\frac{ic^2}{\omega r}l(l+1)\frac{u_l(r)}{r}P_l(\cos\theta)$$

$$E_\theta=-\frac{ic^2}{\omega r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi)=-\frac{ic^2}{\omega r}\frac{\partial u_l(r)}{\partial r}P_l^1(\cos\theta)$$

La anulación de E_θ en $r=a$ y $r=b$ implica que las condiciones de contorno para $u_l(r)$ son:

$$\frac{du_l(r)}{dr}=0 \quad \text{para } r=a \text{ y } r=b \qquad [8.108]$$

Las soluciones de [8.107] son las funciones esféricas de Bessel (véase la sección 16.1) multiplicadas por r. Las condiciones de contorno [8.108] conducen a ecuaciones trascendentes para las frecuencias características. Se deja como problema un ejemplo concreto, pero para nuestros propósitos actuales resulta suficiente un caso límite. La altura h de la ionosfera es lo suficientemente pequeña comparada con el radio a para que pueda tomarse el límite $h/a \ll 1$. Los términos $l(l+1)/r^2$ en [8.107] pueden aproximarse por su valor en $r=a$. Entonces las soluciones de [8.107] son sen (qr) y cos (qr), siendo q^2 el valor calculado para el corchete de [8.107] en $r=a$. Tomando las condiciones de contorno [8.108], la solución es:

$$u_l(r)=A\cos(q(r-a))$$

siendo $qh=n\pi$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Cuando $n=1, 2, \ldots$ las frecuencias de los modos son evidentemente mayores que $\omega=n\pi c/h$ y caen en el dominio de frecuencias de los modos TE. Solamente para $n=0$ hay modos de muy baja frecuencia. La

condición $q=0$ resulta equivalente a $u_l(r)=$constante, y

$$\omega_l \simeq \sqrt{l(l+1)}\,\frac{c}{a} \qquad [8.109]$$

en la que la igualdad es exacta en el límite $h/a \to 0$. La solución completa nos diría que hasta el primer orden en h/a el resultado correcto se obtiene reemplazando a por $(a+\frac{1}{2}h)$. Los campos son $E_\theta=0$, $r^2E_r \propto P_l(\cos\theta)$ y $rB_\phi \propto P_l^1(\cos\theta)$.

Las frecuencias resonantes [8.109] se denominan *resonancias de Schumann* *. Tienen frecuencias extremadamente bajas; con $a=6\,400$ km las cinco primeras frecuencias de resonancia son $\omega_l/2\pi=10{,}6$, 18,3, 25,8, 33,4 y 40,9 Hz. Las resonancias de Schumann se manifiestan, cuando se propagan alrededor de la tierra frecuencias extremadamente bajas, como picos en el espectro de ruido. Los rayos, que contienen un amplio espectro de frecuencias, actúan como fuentes de campos eléctricos radiales. Las componentes de frecuencia próxima a las resonancias de Schumann se propagan preferentemente debido a que son modos normales de la cavidad tierra-ionosfera. Las primeras observaciones definitivas de estos picos en el espectro de potencia de ruido se realizaron en 1960 **, aunque hay evidencias de que NIKOLA TESLA *pudo* haberlos observado antes de 1900 ***. En la figura 8.9 se indica un espectro de ruido típico. En él las resonancias son visibles claramente. Se presentan desviaciones ligeras y cambios de forma de día en día, pero tienen frecuencias medias de 8, 14, 20, 26, 32, 37 y 43 Hz para los siete primeros picos. Estas frecuencias resultan dadas muy exactamente por la expresión $5{,}8\times\sqrt{l(l+1)}$ Hz, cuyo coeficiente es 0,78 veces $c/2\pi a$ ($=7{,}46$ Hz). La falta de exacto acuerdo no es sorprendente, puesto que, como ya hemos notado, la hipótesis de paredes perfectamente conductoras dista mucho de ser cierta. Se estima que los valores de Q son del orden de 4 a 10 para unas pocas de las primeras resonancias, lo que corresponde a un amortiguamiento bastante acentuado. El efecto del amortiguamiento sobre la frecuencia de resonancia es en el sentido correcto para reducir las diferencias entre los valores observados y los de la ecuación [8.109], pero el desplazamiento simple dado por [8.103] es sólo del orden de la mitad del que se observa. Sin embargo, la variación de la frecuencia de resonancia a través de $\sqrt{l(l+1)}$ es sorprendente.

La sencilla imagen de una cavidad resonante con paredes bien definidas, aunque con pérdidas, da cuenta de los aspectos principales de las resonancias de Schumann, aunque falla en algunos detalles cuantitativos. En una revisión realizada por GALEJS ****, así como en su monografía, pueden encontrarse modelos más realistas y detallados y una discusión de las observaciones. En los libros de BUDDEN y WAIT reseñados al final de este capítulo se discute el empleo de los conceptos propios de las guías de ondas y las cavidades en el tratamiento de la propagación de ondas electromagnéticas alrededor de la tierra. Citemos aquí una curiosidad. El 9 de julio de 1962 se hizo detonar una bomba atómica

* W. O. SCHUMANN, *Z. Naturforschung*, **72**, 149, 250 (1952).

** M. BALSER y C. A. WAGNER, *Nature*, **188**, 638 (1960).

*** En la patente U.S. núm. 787.412 (18 abril 1905), recogida en NIKOLA TESLA, *Lectures and Patents and Articles*, Nikola Tesla Museum, Belgrado, Yugoslavia (1956), este notable genio desarrolla claramente la idea de la tierra como un circuito resonante más baja en unos 6 Hz (próxima a los 6,6 Hz que resultan para una esfera perfectamente conductora) y describe la generación y detección de estas ondas de baja frecuencia. Agradezco a V. L. FITCH este fascinante fragmento de historia.

**** J. GALEJS, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 69D, 1043 (1965). Véase también T. MADDEN y W. THOMPSON, *Rev. Geophys.*, **3**, 211 (1965), y F. W. CHAPMAN, D. L. JONES, J. D. W. TODD y R. A. CHALLINOR, *Radio Sci.*, **1**, 1273 (1966).

a gran altura sobre la isla Johnston, en el Pacífico. Una de las consecuencias de esta prueba fue provocar alteraciones observables en la ionosfera y en los cinturones de radiación a escala mundial. En Francia, y en otras estaciones, se observaron disminuciones bruscas entre el 3 y el 5 por 100 en las frecuencias de resonancia de Schumann inmediatamente después de la explosión; los cambios desaparecieron en un periodo de varias horas. Esto se recoge en la figura 17 del trabajo de GALEJS.

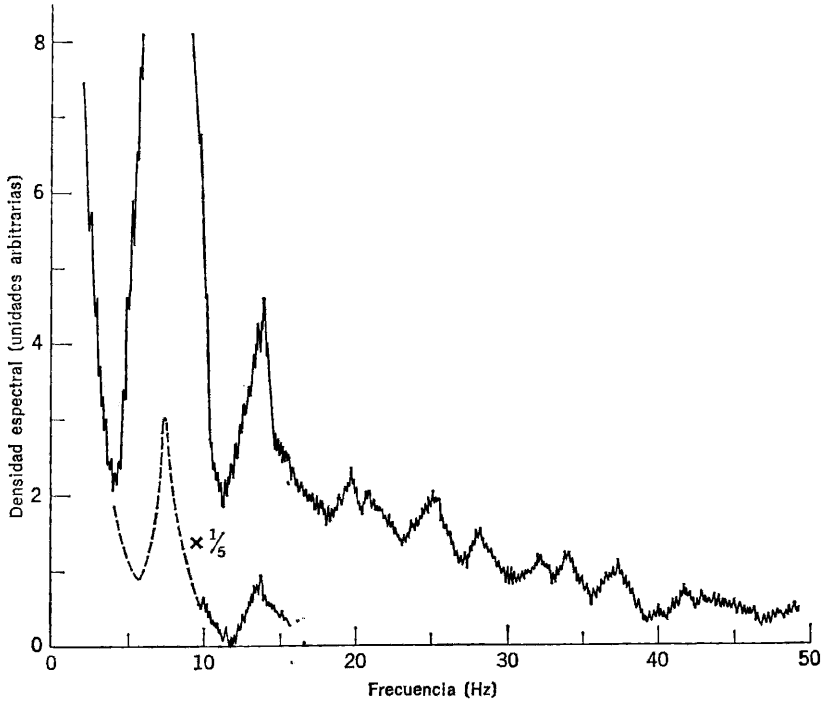


FIG. 8.9. Espectro de potencia de ruido típico a bajas frecuencias (integrado durante treinta seg), observado en Lavangsdalen, Noruega, el 19 de junio de 1965. Resultan visibles las destacadas resonancias de Schumann en 8, 14, 20 y 26 Hz, además de los picos a 32, 37 y 43 Hz, así como detalles más finos [según A. EGELAND y T. R. LARSEN, *Physica Norvegica*, **2**, 85 (1967)].

8.10. GUIAS DE ONDAS DIELECTRICAS

En las secciones 8.2 a 8.6 hemos considerado guías de ondas construidas con cilindros metálicos huecos en los que los campos sólo estaban dentro del hueco. Son posibles otras estructuras de guiado. La línea de transmisión de dos hilos constituye un ejemplo. El requisito general para tener una guía de ondas electromagnéticas es que haya flujo de energía, solamente a lo largo de la estructura y no perpendicularmente a ella. Esto exige que los campos sean apreciables solamente en la inmediata proximidad de la estructura misma. Esta condición se satisface de modo trivial en el caso de guías de onda huecas. Pero en una estructura abierta como la línea de alambres paralelos, los campos se extienden algo a regiones alejadas de los conductores y decrecen según ρ^{-2} para el modo TEM y para los modos superiores el decrecimiento es exponencial.

Un cilindro dieléctrico, tal como se muestra en la figura 8.10, puede servir como guía de ondas con propiedades análogas a las de una guía hueca de metal si su constante dieléctrica es suficientemente grande. No obstante, hay diferencias características que se presentan a causa de que las condiciones de contorno en la superficie del cilindro son muy diferentes. Las consideraciones generales

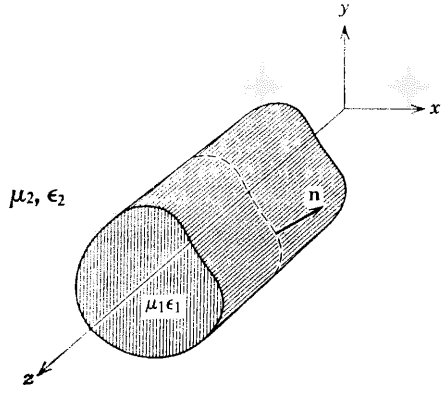


FIG. 8.10. Sección de una guía dieléctrica.

de la sección 8.2 aún resultan aplicables, excepto en que ahora el comportamiento transversal de los campos está regido por dos ecuaciones análogas a la [8.19], una para el interior del cilindro y la otra para el exterior.

INTERIOR:

$$[\nabla_t^2 + (\mu_1\epsilon_1\omega^2 - k^2)] \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{matrix} \right\} = 0 \qquad [8.110]$$

EXTERIOR:

$$[\nabla_t^2 + (\mu_2\epsilon_2\omega^2 - k^2)] \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{matrix} \right\} = 0 \qquad [8.111]$$

Se supone que tanto el dieléctrico (μ_1, ϵ_1) como el medio que lo rodea (μ_2, ϵ_2) son uniformes e isótropos. La constante de propagación axial k debe ser la misma dentro y fuera del cilindro, ya que las condiciones de contorno deben ser satisfechas en todos los puntos de la superficie y en cualquier instante de tiempo.

Como es habitual, en el interior del cilindro dieléctrico, la laplaciana transversal de los campos debe ser negativa, de modo que la constante

$$\gamma^2 = \mu_1\epsilon_1\omega^2 - k^2 \qquad [8.112]$$

sea positiva. Sin embargo, como se requiere que fuera del cilindro no haya flujo transversal de energía, los campos deben decrecer de forma exponencial. (Para una guía dieléctrica no hay modo TEM.) Por tanto, la magnitud de [8.111] equivalente a γ^2 debe ser negativa. Así definimos una magnitud β^2:

$$\beta^2 = k^2 - \mu_2\epsilon_2\omega^2 \qquad [8.113]$$

y exigimos que las soluciones aceptables para la guía de ondas tengan β^2 positivo (β real).

En la superficie del cilindro dieléctrico, las soluciones ondulatorias (en el interior) deben estar acopladas a las soluciones exponenciales en el exterior.

Las condiciones en el contorno son continuidad de las componentes normales de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{D}$ y de las tangenciales de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, en lugar de para las guías huecas de paredes conductoras en que se anulaban la componente normal de $\boldsymbol{B}$ y la tangencial de $\boldsymbol{E}$. Debido a que las condiciones de contorno son más complicadas, los campos no se separan en modos TE y modos TM, salvo en circunstancias especiales, como es el caso de simetría acimutal que estudiaremos después, los cilindros circulares. En general, hay componentes axiales tanto de $\boldsymbol{E}$ como de $\boldsymbol{B}$. Tales ondas se denominan a veces modos HE.

Para ilustrar algunos de los aspectos de la guía de ondas dieléctrica, consideremos un cilindro circular de radio a, de dieléctrico no permeable con constante dieléctrica ϵ_1 sumergido en un medio exterior también no permeable de constante dieléctrica ϵ_2. Para mayor sencillez supondremos que los campos no *presentan variación acimutal*. Las ecuaciones radiales para E_z y B_z en coordenadas cilíndricas, son las ecuaciones de Bessel:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}+\gamma^2\right)\psi=0, \qquad \rho \leqslant a \\ \left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\beta^2\right)\psi=0, \qquad \rho > a \end{aligned}\right\} \qquad [8.114]$$

Según la sección 3.7, la solución que satisface los requisitos de ser finita en el origen y en el infinito es:

$$\psi=\left\{\begin{aligned} &J_0(\gamma\rho), && \rho \leqslant a \\ &AK_0(\beta\rho), && \rho > a \end{aligned}\right\} \qquad [8.115]$$

Las restantes componentes de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ pueden hallarse por medio de [8.23] y [8.24] cuando se conocen las proporciones relativas de E_z y B_z. Con campos independientes de ϕ se reducen a:

INTERIOR

$$\left.\begin{aligned} B_\rho&=\frac{ik}{\gamma^2}\frac{\partial B_z}{\partial\rho}, & B_\phi&=\frac{i\epsilon_1\omega}{\gamma^2c^2}\frac{\partial E_z}{\partial\rho} \\ E_\phi&=-\frac{\omega}{k}B_\rho, & E_\rho&=\frac{c^2k}{\epsilon_1\omega}B_\phi \end{aligned}\right\} \qquad [8.116]$$

Para $\rho > a$ tenemos expresiones análogas. El hecho de que los campos se ordenen ellos mismos en dos grupos (B_ρ, E_ϕ) dependientes de B_z y (B_ϕ, E_ρ) que dependen de E_z, nos sugiere que podemos tratar de obtener soluciones de los tipos TE o TM como hacíamos en las guías metálicas. Para los modos TE tenemos, como expresiones explícitas de los campos:

$$\left.\begin{aligned} B_z&=J_0(\gamma\rho) \\ B_\rho&=-\frac{ik}{\gamma}J_1(\gamma\rho) \\ E_\phi&=\frac{i\omega}{\gamma}J_1(\gamma\rho) \end{aligned}\right\} \quad \rho \leqslant a \qquad [8.117]$$

y

$$\left.\begin{aligned} B_z &= AK_0(\beta\rho) \\ B_\rho &= \frac{ikA}{\beta} K_1(\beta\rho) \\ E_\phi &= -\frac{i\omega A}{\beta} K_1(\beta\rho) \end{aligned}\right\} \quad \rho > a \qquad [8.118]$$

Estos campos deben satisfacer las condiciones de contorno habituales para $\rho = a$. Así, tenemos las dos condiciones:

$$\left.\begin{aligned} AK_0(\beta a) &= J_0(\gamma a) \\ -\frac{A}{\beta} K_1(\beta a) &= \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad [8.119]$$

Por eliminación de la constante A, obtenemos las ecuaciones que determinan γ, β y, por tanto, k:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0 \\ &\text{y de [8.112] y [8.113],} \\ &\gamma^2 + \beta^2 = (\epsilon_1 - \epsilon_2)\omega^2 \end{aligned}\right\} \qquad [8.120]$$

En la figura 8.11 se han dibujado las dos partes de la primera de las ecuaciones [8.120], superponiendo las dos curvas de acuerdo con lo que indica la segunda de dichas ecuaciones. Se supone que la frecuencia es lo bastante alta para que existan dos modos, señalados con círculos en las intersecciones de las dos curvas. Las asíntotas verticales vienen dadas por las raíces de $J_0(x) = 0$. Si el máximo valor de γa es menor que la primera raíz ($x_{01} = 2{,}405$) no puede haber intersección de las dos curvas para valores reales de β. Por consiguiente, la frecuencia de «corte» más pequeña para las ondas $TE_{0,n}$ viene dada por:

$$\omega_{01} = \frac{2{,}405c}{\sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}\, a} \qquad [8.121]$$

Para esta frecuencia $\beta^2 = 0$, pero el número de ondas axial k todavía es real e igual al valor correspondiente al espacio libre $\sqrt{\epsilon_2}\omega$. Inmediatamente por debajo de esta frecuencia de «corte», el sistema ya no actúa como una guía, sino como una antena que radia energía radialmente. Para las frecuencias muy por encima de la de corte, β y k son del mismo orden de magnitud y son además grandes frente a γ, siempre que ϵ_1 y ϵ_2 no sean aproximadamente iguales.

Para las ondas TM reemplazamos la primera ecuación [8.120] por:

$$\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0 \qquad [8.122]$$

Es evidente que para las ondas TM son válidos todos los aspectos cualitativos que aparecen en la figura 8.11. La frecuencia de corte más baja para las ondas $TM_{0,n}$ es evidentemente la misma que para las ondas $TE_{0,n}$. Cuando $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$, la

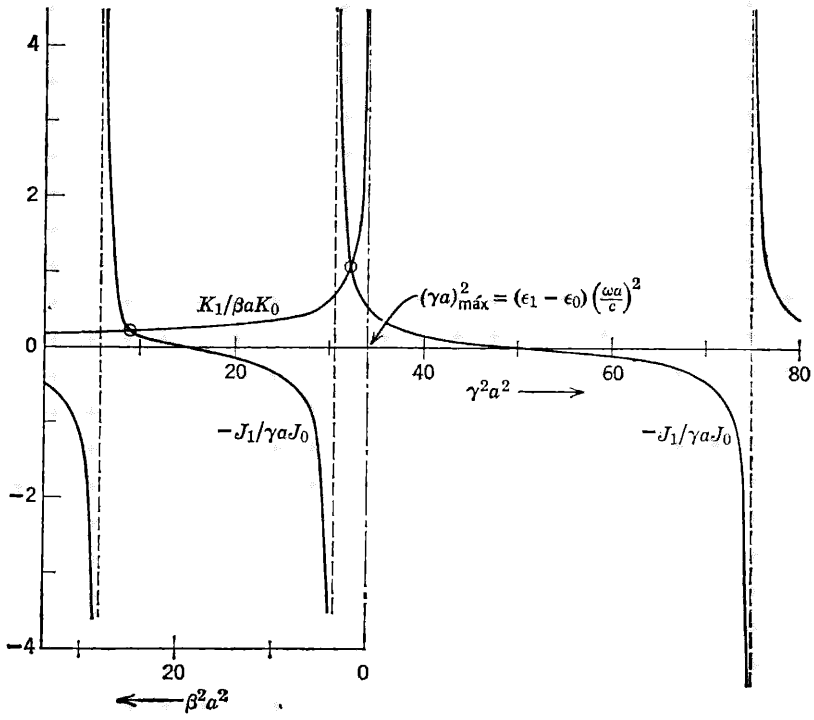


FIG. 8.11. Determinación gráfica de la constante de propagación axial en una guía dieléctrica.

ecuación [8.122] y la figura 8.11 muestran que, salvo posiblemente para el modo con mayor γ (menor β), las constantes de propagación vienen determinadas por $J_1(\gamma a) \simeq 0$. Es ésta precisamente la ecuación que las determina en una guía metálica para las *ondas* TE. La razón de la equivalencia entre los modos TM de una guía dieléctrica y los modos TE de una guía metálica hueca, debe atribuirse a la simetría de las ecuaciones de Maxwell al intercambiar $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ (con los cambios de signos adecuados y factores $\sqrt{\mu\epsilon}$), así como a la equivalencia entre que la componente normal de $\boldsymbol{B}$ se anula en la superficie metálica, y que la componente normal de $\boldsymbol{E}$ en la superficie del dieléctrico casi se anule (a causa de la continuidad de la componente normal de D cuando $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$).

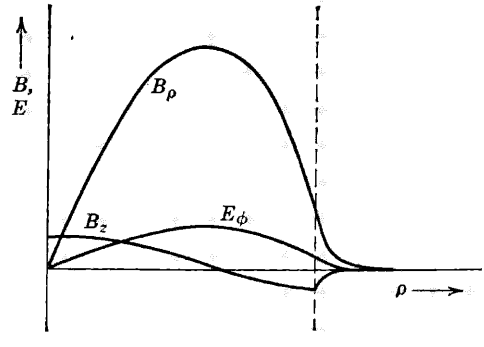


FIG. 8.12. Variación radial de los campos del modo $TE_{0,1}$ en una guía dieléctrica. Cuando $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$, los campos están confinados en su mayor parte en el interior de la guía.

Si $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$ según [8.112] y [8.113], resulta que la constante de amortiguamiento exterior β es mucho mayor que γ, excepto cerca del corte. Esto nos dice que los campos no se extienden apreciablemente fuera del cilindro dieléctrico. La figura 8.12 nos presenta de forma cualitativa el comportamiento de los campos para el modo $TE_{0,1}$. Los otros modos se comportan de manera análoga. Como ya se dijo antes, los modos en los que los campos dependen del azimut presentan componentes longitudinales tanto de $\boldsymbol{E}$ como de $\boldsymbol{B}$. Aunque la matemática sea ahora algo más complicada (véase el problema 8.8), los aspectos cualitativos de la propagación, tales como la longitud de onda corta a lo largo del cilindro, rápido decrecimiento de los campos en el exterior, etc., son los mismos que para los modos con simetría circular.

Las guías dieléctricas no se han utilizado en la propagación de microondas, salvo aplicaciones especiales. Una de las razones es la dificultad de obtener guías adecuadas con pérdidas suficientemente bajas a la frecuencia de las microondas. Una reciente aplicación a las frecuencias ópticas es la utilización de filamentos muy finos de dieléctrico recubierto cada uno con una capa fina de material de índice de refracción muy inferior y agrupados todos ellos de forma compacta con el fin de tener dispositivos de transmisión de imágenes *. El diámetro de los filamentos es lo suficientemente pequeño ($\sim$ 10 micras) para que se le pueda aplicar todo lo que sabemos de las guías de onda, aunque la propagación sea, por lo general, una mezcla de varios modos.

8.11. DESARROLLO EN MODOS NORMALES. CAMPOS GENERADOS POR UNA FUENTE LOCALIZADA EN LA GUIA

Dada la sección transversal de una guía de ondas y la frecuencia ω, los campos electromagnéticos en una guía hueca están descritos por un conjunto infinito de modos normales o característicos que consisten en ondas TE y TM, cada una de las cuales tiene una frecuencia de corte específica. Para cualquier frecuencia finita dada, sólo un número finito de modos pueden propagarse; el resto son modos en corte o evanescentes. Lejos de cualquier fuente, obstáculo o abertura en la guía, los campos son relativamente simples, solamente están presentes con amplitud apreciable los modos que se propagan (con frecuencia uno solo). Sin embargo, cerca de una fuente u obstáculo deben superponerse muchos modos, tanto propagables como evanescentes, para poder describir los campos correctamente. Los modos en corte sólo tienen amplitudes significativas en la proximidad de la fuente u obstáculo: sus efectos desaparecen en distancias comparables al recíproco de la parte imaginaria de su número de ondas. Cualquier problema práctico referente a una fuente, obstáculo o abertura en una guía de ondas lleva consigo, por tanto, obtener una solución lo más exacta que sea posible en la vecindad de la fuente, etc., el desarrollo de tales campos en función de todos los modos normales de la guía y la determinación de las amplitudes para los modos (uno o más) que se propaguen, que son las que determinan los campos a grandes distancias.

---

* Véase B. O'BRIEN, *Physics Today*, **13**, 52 (1960), para una discusión cualitativa inicial, y N. S. KAPANY y J. J. BURKE, *Optical waveguides*, Academic, Nueva York (1972), para buscar tratamientos analíticos y prácticos.

a) *Modos ortonormales*

Para facilitar el manejo del desarrollo de los campos en modos normales, es útil fijar una notación para los campos de un modo determinado, tratando los modos TE y TM en pie de igualdad e introducir una normalización conveniente. Sea el subíndice λ o μ el que sirva para designar un modo dado. Se puede pensar que $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, indica los modos dispuestos en un orden determinado, por ejemplo, de frecuencia de corte creciente. El subíndice expresa también si el modo es una onda TE o TM. Los campos para el modo λ que se propaga en la dirección z *positiva* se escriben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_\lambda^{(+)}(x, y, z) &= [\boldsymbol{E}_\lambda(x, y) + \boldsymbol{E}_{z\lambda}(x, y)]e^{ik_\lambda z} \\ \boldsymbol{H}_\lambda^{(+)}(x, y, z) &= [\boldsymbol{H}_\lambda(x, y) + \boldsymbol{H}_{z\lambda}(x, y)]e^{ik_\lambda z} \end{aligned} \qquad [8.123]$$

siendo $\boldsymbol{E}_\lambda$, $\boldsymbol{H}_\lambda$ los campos transversales dados por [8.31] y [8.33], en tanto que $\boldsymbol{E}_{z\lambda}$, $\boldsymbol{H}_{z\lambda}$, son los campos longitudinales. El número de ondas k_λ viene dado por [8.37] y se toma real y positivo para los modos que se propaguen en guías sin pérdidas. Naturalmente, se sobreentiende una dependencia temporal de tipo $e^{-i\omega t}$. Para una onda que se propague en la dirección z *negativa* los campos son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_\lambda^{(-)} &= [\boldsymbol{E}_\lambda - \boldsymbol{E}_{z\lambda}]\, e^{-ik_\lambda z} \\ \boldsymbol{H}_\lambda^{(-)} &= [-\boldsymbol{H}_\lambda + \boldsymbol{H}_{z\lambda}]\, e^{-ik_\lambda z} \end{aligned} \qquad [8.124]$$

La distribución de signos en [8.124] en comparación con [8.123] puede comprenderse teniendo en cuenta la necesidad de satisfacer $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$ para cada sentido de propagación y el requisito de que el flujo de potencia sea positivo en el sentido de propagación. La fase global de los campos de [8.124] respecto a la de los dados por [8.123] es arbitraria. La elección realizada aquí hace que el campo transversal eléctrico sea el mismo para ambas direcciones de propagación, justamente como se hace para las ondas de tensión en las líneas de transmisión.

Cuando se toma que los *campos eléctricos transversales* $\boldsymbol{E}_\lambda(x, y)$ sean *reales*, y se impone que:

$$\int \boldsymbol{E}_\lambda \cdot \boldsymbol{E}_\mu \, da = \delta_{\lambda\mu} \qquad [8.125]$$

estando extendida la integral al área de la sección transversal de la guía, se consigue una normalización conveniente para los campos [8.123] y [8.124]. (Aquí se da por supuesta la ortogonalidad de los diferentes modos. La demostración se deja como problema [el problema 8.9], así como la deducción de las otras integrales de normalización relacionadas después.) Resulta evidente, a partir de la relación [8.31] entre los campos eléctrico y magnético, que [8.125] implica:

$$\int \boldsymbol{H}_\lambda \cdot \boldsymbol{H}_\mu \, da = \frac{1}{Z_\lambda^2} \delta_{\lambda\mu} \qquad [8.126]$$

y que la potencia media-temporal que transporta el modo λ es:

$$\frac{1}{2} \int (\boldsymbol{E}_\lambda \times \boldsymbol{H}_\lambda) \cdot \boldsymbol{e}_3 \, da = \frac{1}{2Z_\lambda} \delta_{\lambda\mu} \qquad [8.127]$$

También puede demostrarse que si se cumple [8.125] las componentes longitudinales están normalizadas según:

ONDAS TM:

$$\int E_{z\lambda}E_{z\mu}\,da=\frac{-\gamma_\lambda^2}{k_\lambda^2}\delta_{\lambda\mu}$$

ONDAS TE:

$$\int H_{z\lambda}H_{z\mu}\,da=\frac{-\gamma_\lambda^2}{k_\lambda^2 Z_\lambda^2}\delta_{\lambda\mu} \qquad [8.128]$$

Como ejemplo concreto de estos campos normalizados damos una lista de los campos eléctricos transversales, así como de H_z y E_z correspondientes a los modos TE y TM en una guía rectangular. El índice de modo λ es en realidad doble (m, n). Los campos normalizados son:

ONDAS TM:

$$E_{xmn}=\frac{2\pi m}{\gamma_{mn}a\sqrt{ab}}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_{ymn}=\frac{2\pi n}{\gamma_{mn}b\sqrt{ab}}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad [8.129]$$

$$E_{zmn}=\frac{-2i\gamma_{mn}}{k_\lambda\sqrt{ab}}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

ONDAS TE:

$$E_{xmn}=\frac{-2\pi n}{\gamma_{mn}b\sqrt{ab}}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_{ymn}=\frac{2\pi m}{\gamma_{mn}a\sqrt{ab}}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad [8.130]$$

$$E_{zmn}=\frac{-2i\gamma_{mn}}{k_\lambda Z_\lambda\sqrt{ab}}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

en las que γ_{mn} está dado por [8.43]. Las componentes transversales del campo magnético pueden obtenerse por medio de [8.31]. Para los modos TM, el valor más bajo de m y n es la unidad, pero para los modos TE, está permitido que m o n sean igual a cero. Si $m=0$ o $n=0$, la normalización debe corregirse multiplicando los segundos miembros de [8.130] por $1/\sqrt{2}$.

b) *Desarrollo de campos arbitrarios*

Un campo electromagnético arbitrario, cuya dependencia temporal sea $e^{-i\omega t}$, puede desarrollarse en función de los campos de los modos normales [8.123] y [8.124] *. Resulta útil seguir la pista explícitamente de los campos totales

* Dejamos de lado el problema matemático de la completitud del conjunto de modos normales, y también señalaremos sólo que otras variaciones con el tiempo más generales pueden tratarse mediante superposición de Fourier.

que se propagan en los dos sentidos. Por consiguiente, los campos arbitrarios se escriben en la forma:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{(+)}+\boldsymbol{E}^{(-)}; \qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^{(+)}+\boldsymbol{H}^{(-)} \tag{8.131}$$

siendo:

$$\boldsymbol{E}^{(\pm)}=\sum_{\lambda'} A_{\lambda}^{(\pm)}\boldsymbol{E}_{\lambda}^{(\pm)}; \qquad \boldsymbol{H}^{(\pm)}=\sum_{\lambda} A_{\lambda}^{(\pm)}\boldsymbol{H}_{\lambda}^{(\pm)} \tag{8.132}$$

La especificación de los coeficientes del desarrollo $A_{\lambda}^{(+)}$ y $A_{\lambda}^{(-)}$ determina los campos en todos los puntos de la guía. Estos coeficientes pueden hallarse de una variedad de maneras a partir de las condiciones de contorno o de la fuente. He aquí un útil *teorema*:

Los campos en todos los puntos de la guía están determinados unívocamente si se especifican las componentes transversales de $\boldsymbol{E}$ *y* $\boldsymbol{H}$ *en un plano* $z=$*constante.*

Demostración: No hay pérdida de generalidad si se escoge el plano en $z=0$. En tal caso, según [8.131], [8.132], [8.123] y [8.124], los campos transversales son:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_t&=\sum_{\lambda'}(A_{\lambda'}^{(+)}+A_{\lambda'}^{(-)})\boldsymbol{E}_{\lambda'}\\ \boldsymbol{H}_t&=\sum_{\lambda'}(A_{\lambda'}^{(+)}+A_{\lambda'}^{(-)})\boldsymbol{H}_{\lambda'}\end{aligned} \tag{8.133}$$

Si se toma el producto escalar por $\boldsymbol{E}_{\lambda}$ de ambos miembros de la primera ecuación, y se realiza una integración extendida a la sección transversal de la guía, la condición de ortogonalidad [8.125] implica que:

$$A_{\lambda}^{(+)}+A_{\lambda}^{(-)}=\int \boldsymbol{E}_{\lambda}\cdot\boldsymbol{E}_t\,da$$

Análogamente, la segunda ecuación, con ayuda de [8.126], conduce a:

$$A_{\lambda}^{(+)}+A_{\lambda}^{(-)}=Z_{\lambda}^2\int \boldsymbol{H}_{\lambda}\cdot\boldsymbol{H}_t\,da$$

Los coeficientes $A_{\lambda}^{(\pm)}$ están dados, pues, por:

$$A_{\lambda}^{(\pm)}=\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}_{\lambda}\cdot\boldsymbol{E}_t\pm Z_{\lambda}^2\boldsymbol{H}_{\lambda}\cdot\boldsymbol{H}_t)\,da \tag{8.134}$$

Esto demuestra que si en $z=0$ se dan $\boldsymbol{E}_t$ y $\boldsymbol{H}_t$, los coeficientes del desarrollo [8.131] y [8.132] quedan determinados. La completitud del desarrollo en modos normales asegura la unicidad de la representación para todo z.

c) *Campos generados por una fuente localizada*

Como se indica esquemáticamente en la figura 8.13, los campos en una guía de ondas pueden estar generados por una fuente localizada. Se supone que la densidad de corriente $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$ varía con el tiempo como $e^{-i\omega t}$. Debido a la co-

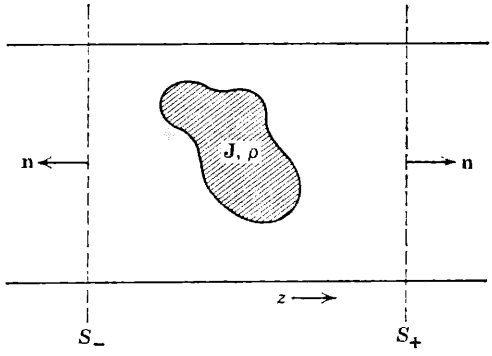


FIG. 8.13. Representación esquemática de una fuente localizada en una guía de ondas. Las paredes de la guía, junto con los planos S_+ y S_-, definen el volumen en que está contenida la fuente.

rriente oscilante, se propagan campos hacia la izquierda y hacia la derecha. Fuera de la fuente, y digamos, más a la derecha de la superficie S_+, sólo habrá campos que varíen como $e^{ik_\lambda z}$. El campo eléctrico puede expresarse en la forma:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(+)} = \sum_{\lambda'} A_{\lambda'}^{(+)} \boldsymbol{E}_{\lambda'}^{(+)} \qquad [8.135]$$

dando una expresión correspondiente para $\boldsymbol{H}$. Sobre la superficie S_- y a su izquierda, los campos varían todos como $e^{-ik_\lambda z}$, y el campo eléctrico es:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(-)} = \sum_{\lambda'} A_{\lambda'}^{(-)} \boldsymbol{E}_{\lambda'}^{(-)} \qquad [8.136]$$

Para determinar los coeficientes $A_\lambda^{(\pm)}$ en función de $\boldsymbol{J}$ consideremos una de las formas del teorema de Poynting, ecuación del flujo de energía. La identidad:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H}_\lambda^{(\pm)} - \boldsymbol{E}_\lambda^{(\pm)} \cdot \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_\lambda^{(\pm)} \qquad [8.137]$$

se deduce de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes para $\boldsymbol{E}_\lambda^{(\pm)}$, $\boldsymbol{H}_\lambda^{(\pm)}$ y de las ecuaciones de Maxwell con fuentes que satisfacen $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$. Integrando [8.137] en un volumen V limitado por una superficie S conduce, mediante el teorema de la divergencia, al resultado:

$$\int_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_\lambda^{(\pm)} - \boldsymbol{E}_\lambda^{(\pm)} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{n}\, da = \int_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_\lambda^{(\pm)}\, d^3x \qquad [8.138]$$

siendo $\boldsymbol{n}$ la normal dirigida hacia fuera. Ahora se elige que V sea el volumen limitado por las paredes de la guía y las superficies S_+ y S_- de la figura 8.13. Si se supone que las paredes son perfectamente conductoras, no presentan aber-

turas y en ellas no hay fuentes, la parte de la integral de superficie extendida a las paredes se anula. Sólo contribuyen las integrales extendidas a S_+ y S_-. Para concretar, escogemos el signo *inferior* en [8.138] y utilizamos [8.135] para sustituir en la integral extendida a S_+:

$$\int_{S_+} = \sum_{\lambda'} A_{\lambda'}^{(+)} \int_{S_+} \boldsymbol{e}_3 \cdot (\boldsymbol{E}_{\lambda'}^{(+)} \times \boldsymbol{H}_{\lambda}^{(-)} - \boldsymbol{E}_{\lambda}^{(-)} \times \boldsymbol{H}_{\lambda'}^{(+)})\, da$$

Esta expresión, con los campos [8.123] y [8.124] y la normalización [8.127], se convierte en:

$$\int_{S_+} = -\frac{2}{Z_\lambda} A_\lambda^{(+)} \qquad [8.139]$$

La parte de la integral de superficie correspondiente a S_- en [8.138] es:

$$\int_{S_-} = -\sum_{\lambda'} A_{\lambda'}^{(-)} \int_{S_-} \boldsymbol{e}_3 \cdot (\boldsymbol{E}_{\lambda'}^{(-)} \times \boldsymbol{H}_{\lambda}^{(-)} - \boldsymbol{E}_{\lambda}^{(-)} \times \boldsymbol{H}_{\lambda'}^{(-)})\, da$$

que puede demostrarse fácilmente que se anula. Por consiguiente, gracias a la elección del signo inferior en [8.138] sólo la superficie S_+ contribuye al primer miembro. Análogamente, al elegir el signo superior, sólo contribuye la integral extendida a S_-. Resulta [8.139], pero con $A_\lambda^{(-)}$ en lugar de $A_\lambda^{(+)}$. Utilizando [8.139] como primer miembro de [8.138], los coeficientes $A_\lambda^{(\pm)}$ quedan determinados por:

$$A_\lambda^{(\pm)} = \mp \frac{Z_\lambda}{2} \int_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_\lambda^{(\mp)}\, d^3x \qquad [8.140]$$

donde el campo $\boldsymbol{E}_\lambda^{(\mp)}$ del modo normal λ está normalizado de acuerdo con [8.125]. Nótese que la amplitud para la propagación en la dirección z *positiva* procede de la integración del producto escalar de la corriente por el modo del campo que describe la propagación en la dirección z *negativa,* y viceversa.

Es una cuestión sencilla tomar en cuenta la presencia de aberturas (que actúan como fuentes o sumideros) en las paredes de la guía en la región situada entre los dos planos S_+ y S_-. Fijándonos en [8.138] nos damos cuenta de que en estas circunstancias [8.140] resulta modificada en la forma:

$$A_\lambda^{(\pm)} = \frac{Z_\lambda}{2} \left[\int_{\text{aberturas}} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_\lambda^{(\mp)}) \boldsymbol{n} \cdot da - \int_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_\lambda^{(\mp)}\, d^3x \right] \qquad [8.141]$$

siendo $\boldsymbol{E}$ el campo eléctrico tangencial *exacto* en las aberturas y $\boldsymbol{n}$ está dirigido *hacia el exterior.*

Se deja para los problemas al final del capítulo la aplicación de [8.140] a algunos ejemplos de excitación de ondas en guías. En el próximo capítulo (sección 9.5) se considera la cuestión de una fuente que sea pequeña comparada con la longitud de onda, y se deduce la aproximación de [8.140] mediante el acoplamiento de los momentos dipolares eléctrico y magnético de la fuente a los campos eléctrico y magnético del modo λ. En la sección 9.5 se discute también el acoplamiento de guías de ondas mediante aberturas pequeñas. El

tema de las fuentes y la excitación de oscilaciones en guías de ondas y cavidades es de considerable importancia práctica en ingeniería de microondas. Sobre él existe una bibliografía voluminosa. Una de las mejores referencias recientes es el libro de COLLIN, capítulos 5 y 7.

8.12. REFLEXION Y TRANSMISION DE DIAFRAGMAS PLANOS, APROXIMACION VARIACIONAL

En los usos prácticos de las guías de ondas como portadores de energía electromagnética e información de fase en los sistemas de microondas, se presentan discontinuidades en forma de obstáculos, láminas dieléctricas, diafragmas y aberturas en las paredes. El gran esfuerzo de investigación dedicado al radar durante la Segunda Guerra Mundial condujo al desarrollo de técnicas matemáticas refinadas para resolver muchos de estos complicados problemas de condiciones de contorno. Aquí pondremos como ejemplo una de las clases de discontinuidades más simple, aunque importante, el caso de los diafragmas planos o ventanas de espesor despreciable orientadas transversalmente al eje de la guía. La solución exacta de tales problemas generalmente sólo es posible recurriendo al cálculo numérico. Sin embargo, los métodos de aproximación pueden dar soluciones fiables con un esfuerzo modesto; éste es el caso de la técnica variacional desarrollada por JULIAN SCHWINGER *.

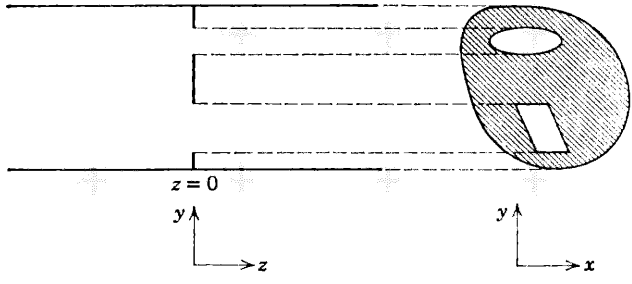


FIG. 8.14. Discontinuidad en forma de un diafragma transversal de espesor despreciable. Vista lateral a la izquierda y vista frontal a la derecha.

La investigación en radar en los Estados Unidos entre los años 1940-1945 está recogida en *Massachusetts Institute of Technology Radiation Laboratory Series,* publicada por McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York. Los principios físicos generales de los circuitos de microondas se encuentran en el libro de MONTGOMERY, DICKE y PURCELL, mientras que en el volumen de MARCUVITZ se incluye un compendio de resultados sobre discontinuidades en guías de ondas. Al final del capítulo se citan éstas y otras referencias.

El tipo especial de discontinuidad que vamos a considerar se ha indicado en la figura 8.14. El conjunto de aberturas algo caprichoso dibujado en el dia-

* Como ha ocurrido con otros trabajos de SCHWINGER, el tratamiento de tiempo de guerra de las guías de ondas permaneció durante mucho tiempo en la forma de apuntes de clase no publicados y generalmente inasequibles. Después de un retraso de cerca de un cuarto de siglo esto se ha remediado en parte, al publicarse en forma de libro dichas notas en el M. I. T. Radiation Laboratory, citado en las referencias al final del capítulo.

fragma sirve para recordar que el razonamiento es general, siempre que la ventana esté en un plano transversal y sea de espesor despreciable. Si la guía de ondas se hace trabajar a una frecuencia tal que sólo puedan propagarse los modos más bajos, resulta suficiente considerar que, muy lejos de la discontinuidad, los únicos campos incidente, reflejado y transmitido son los de este modo más bajo. La descripción de los efectos de la discontinuidad puede hacerse en el lenguaje de la teoría de líneas de transmisión, en la que el diafragma es equivalente a una impedancia paralelo dependiente de la frecuencia. Cerca del diafragma es necesario, naturalmente, incluir los efectos de los modos evanescentes con el fin de satisfacer las condiciones de contorno en el diafragma.

Con la hipótesis de que sólo puede propagarse el modo más bajo ($\lambda=1$) y de que incide desde la izquierda una onda de amplitud unidad (en el sentido de la sección anterior) del modo más bajo, el *campo eléctrico para* $z<0$ puede escribirse:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1^{(+)}+R\boldsymbol{E}_1^{(-)}+\sum_{\lambda=2}^{\infty}A_\lambda^{(-)}\boldsymbol{E}_\lambda^{(-)} \qquad [8.142]$$

y una expresión semejante para el campo magnético $\boldsymbol{H}$. Los campos de los modos [8.123] y [8.124] se han separado explícitamente en las partes que se propagan y en corte. Los campos $\boldsymbol{E}_1^{(\pm)}$ varían con z como $e^{\pm ikz}$ mientras que los campos $\boldsymbol{E}_\lambda^{(-)}$, cuando $\lambda\geqslant 2$ varían como $e^{k_\lambda z}$ y por ello sólo serán apreciables cerca de $z=0$. Para $z>0$, sólo pueden presentarse ondas que se muevan en la dirección z positiva. El *campo eléctrico* para $z>0$ es, por tanto:

$$\boldsymbol{E}=T\boldsymbol{E}_1^{(+)}+\sum_{\lambda=2}^{\infty}A_\lambda^{(+)}\boldsymbol{E}_\lambda^{(+)} \qquad [8.143]$$

Los coeficientes R y T son las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida en el modo más bajo. Si las paredes de la guía y las superficies del diafragma son perfectamente conductoras, no hay pérdidas en el sistema. Esto significa que $1+R=T$. La verificación de este resultado se hace formalmente calculando los coeficientes de [8.142] y [8.143]. Multiplicando escalarmente ambos miembros de [8.142] por el campo del modo transversal $\boldsymbol{E}_\lambda$ e integrando al área de la sección transversal de la guía para $z=0^-$ da:

$$1+R=\int_{z=0^-}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_1\,da$$

$$A_\lambda^{(-)}=\int_{z=0^-}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_\lambda\,da \qquad (\lambda>1)$$

debido a la relación de ortogonalidad. Análogamente [8.143] conduce a:

$$T=\int_{z=0^+}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_1\,da$$

$$A_\lambda^{(+)}=\int_{z=0^+}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_\lambda\,da \qquad (\lambda>1)$$

El campo eléctrico tangencial en el diafragma se anula salvo en las aberturas si las superficies son perfectamente conductoras, por lo que las integrales anteriores se extienden únicamente al área de las aberturas. Como la componente tangencial del campo eléctrico en las aberturas es continua para $z=0$, no hay diferencia entre la integral para $z=0^+$ y la integral para $z=0^-$. Como consecuencia, los coeficientes están dados por:

$$1+R=T=\int_{\text{aberturas}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_1\, da \qquad [8.144]$$

$$A_\lambda^{(+)}=A_\lambda^{(-)}=\int_{\text{aberturas}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_\lambda\, da \qquad [8.145]$$

Si puede hallarse el campo eléctrico exacto en la abertura, o una aproximación razonable al mismo, la ecuación [8.144] puede utilizarse para determinar las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas. En ciertas circunstancias pueden emplearse técnicas de campos estáticos y de representación conforme. Cualquiera de los esquemas de aproximaciones se refuerza cuando se combina con las expresiones estacionarias o variacionales de Schwinger. Estas expresiones reemplazan a la forma directa [8.144] por un resultado más complicado que supone una suma de todos los modos evanescentes, pero que son estacionarias con respecto a variaciones de los campos que se separen de sus verdaderos valores, y de este modo resultan adecuadas para su empleo con valores de tanteo de los campos relativamente malos. Como con muchas cosas importantes, la deducción no es obvia inmediatamente para los no iniciados. Empezaremos por considerar la forma explícita de las condiciones de contorno sobre las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en las aberturas. En ella $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ tangenciales son continuos. La continuidad del campo eléctrico transversal, con los campos de los modos [8.123] y [8.124] y los desarrollos [8.142] y [8.143], aparece en la forma:

$$(1+R)\boldsymbol{E}_1+\sum_{\lambda=2}^{\infty} A_\lambda^{(-)}\boldsymbol{E}_\lambda=T\boldsymbol{E}_1+\sum_{\lambda=2}^{\infty} A_\lambda^{(+)}\boldsymbol{E}_\lambda \qquad [8.146]$$

Como podría esperarse, a la vista de [8.144] y [8.145] esta igualdad es obvia. Se ha escrito expresamente para establecer el contraste con la ecuación correspondiente para el campo magnético transversal:

$$(1-R)\boldsymbol{H}_1-\sum_{\lambda=2}^{\infty} A_\lambda^{(-)}\boldsymbol{H}_\lambda=T\boldsymbol{H}_1+\sum_{\lambda=2}^{\infty} A_\lambda^{(+)}\boldsymbol{H}_\lambda \qquad [8.147]$$

La ecuación [8.146] es válida para toda el área de la sección transversal de la guía, porque los coeficientes del desarrollo [8.144] y [8.145] aseguran que el campo tangencial se anula sobre la superficie del diafragma, pero [8.147] es válida únicamente en las aberturas. Sobre ambas caras del diafragma fluyen corrientes superficiales y no hay ningún requisito para la continuidad de $\boldsymbol{H}$ tangencial.

Según [8.31] el campo transversal del modo $\boldsymbol{H}_\lambda$ puede escribirse:

$$\boldsymbol{H}_\lambda=Y_\lambda\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{E}_\lambda \qquad [8.148]$$

siendo $Y_\lambda = Z_\lambda^{-1}$ la *admitancia de la onda,* dada por el valor recíproco de [8.32], poniendo $k = k_\lambda$. En función de los campos eléctricos, la continuidad de la componente tangencial de $\boldsymbol{H}$ en las aberturas, [8.147], puede escribirse, pues:

$$(1-R)Y_1\boldsymbol{E}_1 - \sum_{\lambda=2}^{\infty} Y_\lambda A_\lambda^{(-)}\boldsymbol{E}_\lambda = TY_1\boldsymbol{E}_1 + \sum_{\lambda=2}^{\infty} Y_\lambda A_\lambda^{(+)}\boldsymbol{E}_\lambda$$

La relación $T = 1+R$ y la [7.145] permiten refundir esta expresión en la forma:

$$-2RY_1\boldsymbol{E}_1 = 2\sum_{\lambda=2}^{\infty} Y_\lambda \boldsymbol{E}_\lambda \int_{\text{aberturas}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_\lambda \, da \qquad [8.149]$$

El resultado variacional se deduce en dos etapas. La primera consiste en multiplicar escalarmente ambos miembros de [8.149] por el campo exacto $\boldsymbol{E}$, e integrar a todas las aberturas. Haciendo uso de [8.144] esta etapa da:

$$-2R(1+R)Y_1 = 2\sum_{\lambda=2}^{\infty} Y_\lambda \left[\int_{\text{aberturas}} da\, \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_\lambda\right]^2$$

La segunda, que no es tan obvia, consiste en dividir los dos miembros de esta última por $Y_1(1+R)^2$, utilizando también [8.144] para hacer figurar en el denominador del segundo miembro la integral extendida a las aberturas. El resultado es:

$$Y_d = \frac{2\sum_{\lambda=2}^{\infty} Y_\lambda \left[\int_{\text{aberturas}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_\lambda \, da\right]^2}{Y_1\left[\int_{\text{aberturas}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_1 \, da\right]^2} \qquad [8.150]$$

siendo

$$Y_d = \frac{-2R}{1+R} \qquad [8.151]$$

la llamada admitancia paralelo relativa del diafragma en el lenguaje de líneas de transmisión *. Puede demostrarse que la ecuación [8.150] es estacionaria con respecto a las variaciones de primer orden del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ respecto a su valor verdadero. Es también homogénea en $\boldsymbol{E}$ y, por tanto, independiente de la normalización de la función de prueba. En general, el extremal no es un máximo ni un mínimo. La razón de ello es que los términos de la suma extendida a los modos en corte en general no tienen un solo signo. Puede verse a partir de [8.32] que, como $\kappa_\lambda = i_\lambda$, siendo κ_λ real y positiva, para los modos en corte, la fase de admitancia de la onda depende del tipo de modo:

$$Y_\lambda = \begin{cases} -i|Y_\lambda| & \text{(TM)} \\ +i|Y_\lambda| & \text{(TE)} \end{cases}$$

* El lector que no esté familiarizado con la teoría de las líneas de transmisión haría bien en establecer la relación entre las amplitudes de reflexión y transmisión de una admitancia o impedancia conectada a través de la línea de transmisión. Véanse, por ejemplo, los capítulos 1 y 11 de RAMO, WHINNERY y VAN DUZER.

Si la onda incidente y la geometría del diafragma son tales que sólo se excita un tipo de modo, la suma en [8.150] consiste en elementos que tienen todos el mismo signo relativo y el resultado para Y_d a partir de una cierta función de tanteo para $\boldsymbol{E}$ será un límite superior (o inferior) verdadero para el valor de la admitancia. En cualquier otro caso, el resultado no es un límite, y cuando se utiliza una función mejorada de tanteo para $\boldsymbol{E}$ puede resultar un valor mayor o menor. Si en la suma *predominan las contribuciones de los modos TM, Y_d puede ser imaginaria y negativa.* La impedancia Z_d es, pues, imaginaria positiva, lo que corresponde a *capacitiva* si se recuerda que utilizamos la dependencia $e^{-i\omega t}$ en lugar de $e^{i\omega t}$. Si *predominan los modos TE, Y_d es imaginaria positiva*; el diafragma se comporta como un obstáculo *inductivo.*

En algunos casos resulta útil refundir [8.150] en una forma algo diferente que contiene una función de Green diádica definida por:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{G}}(xy \mid x'y') = 2\sum_{\lambda=2}^{\infty} Y_\lambda \overleftarrow{\boldsymbol{E}}_\lambda(x, y)\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_\lambda(x', y') \qquad [8.152]$$

Las flechas sobre los campos de los modos en el segundo miembro indican las direcciones permitidas para las operaciones vectoriales. Con esta función de Green [8.150] puede escribirse:

$$Y_d = \frac{\int dz\, dy \int dx'\, dy'\, \boldsymbol{E}(x, y) \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{b}}(xy \mid x'y') \cdot \boldsymbol{E}(x', y')}{Y_1 \left[\int dx\, dy\, \boldsymbol{E}(x, y) \cdot \boldsymbol{E}_1(x, y)\right]^2} \qquad [8.153]$$

En ciertos problemas puede llevarse a cabo la suma extendida a los modos en [8.152], o una forma equivalente, al menos de modo aproximado, y todo lo que es necesario hacer es la integración en [8.153], en forma numérica si es preciso. La falta de espacio no nos permite extendernos en discutir los detalles. El lector puede consultar el desarrollo de ejemplos concretos en el capítulo 8 del libro de COLLIN y en otras referencias de las citadas al final de este capítulo. En los problemas se tratarán una o dos situaciones sencillas.

Al deducir el principio variacional [8.150] se eliminó el campo magnético de la condición de contorno [8.147] en favor del campo eléctrico. Eliminar $\boldsymbol{E}_\lambda$ en favor de H_λ en [8.146] constituye un procedimiento alternativo. Pueden escribirse para $(1+R)$ y $A_\lambda^{(-)}$ expresiones análogas a [8.144] y [8.145] en forma de integrales extendidas a los campos magnéticos en $z=0^-$ (a partir del primer miembro de [8.147]), y para T y $A_\lambda^{(+)}$ como integrales en $z=0^+$. Entonces un desarrollo completamente paralelo al primero conduce a una expresión variacional para la impedancia paralelo $Z_d = Y_d^{-1}$ del diafragma:

$$Z_d = \frac{\frac{1}{2}\sum_{\lambda=2}^{\infty} Z_\lambda \left[\int \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{E}_\lambda\, da\right]^2}{Z_1 \left[\int \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{E}_1\, da\right]^2} \qquad [8.154]$$

siendo:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{e}_3 \times [\boldsymbol{H}(z=0^+) - \boldsymbol{H}(z=0^-)] \qquad [8.155]$$

la densidad total de corriente superficial en el diafragma. La integral de [8.154] está extendida evidentemente sólo a la superficie del diafragma y resulta, por consiguiente, complementaria de la de [8.150]. La combinación de los dos principios variacionales para Y_d y Z_d puede establecer límites cercanos al valor exacto de Y_d aunque la convergencia rápida de la suma sobre el índice λ en una de las expresiones supone convergencia lenta en la otra.

8.13. IMPEDANCIA DE UNA CINTA PLANA PARALELA AL CAMPO ELECTRICO EN UNA GUIA DE ONDAS RECTANGULAR

Como ejemplo sencillo del empleo de los métodos variacionales de la sección anterior, consideremos las reflexiones introducidas por una cinta transversal, delgada, plana y perfectamente conductora dibujada en la figura 8.15.

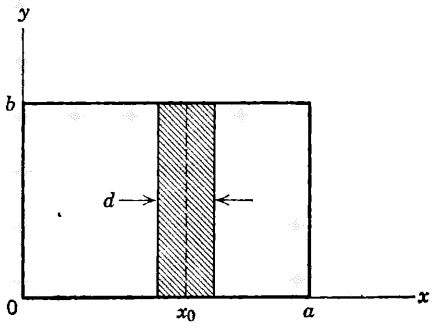


FIG. 8.15. Cinta plana inductiva paralela al campo eléctrico en una guía de ondas rectangular.

La cinta tiene una anchura d y se encuentra situada con su centro en $x=x_0$ y en el plano x-y orientada paralelamente al campo eléctrico del modo de propagación $TE_{1,0}$. Con esta disposición geométrica sólo se excitan modos $TE_{m,0}$. Los campos de los modos están dados, por consiguiente, por [8.130] haciendo $n=0$; sólo E_y, H_z y H_x son distintos de cero. El cálculo se realiza en función de las expresiones de impedancia [8.154]. Aprovechando el carácter homogéneo de [8.154] para eliminar de numerador y denominador factores innecesarios, tenemos:

$$Z_d = -\frac{ia}{\lambda_g}\sum_{m=2}^{\infty}\left(m^2-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1/2}\left[\frac{\int dx\,K(x)\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{\int dx\,K(x)\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)}\right]^2 \qquad [8.156]$$

siendo $\lambda_g=2\pi/k_1$ la longitud de onda en la guía a la frecuencia ω, $\omega_1=\pi c/a$ es la frecuencia de corte para el modo $TE_{1,0}$, y $K(x)$ es la corriente superficial (en la dirección de y) en la cinta. El factor $-i$ indica con nuestros convenios que la cinta actúa como una *impedancia paralelo inductiva*. (Los ingenieros eléctricos sustituirían i por $-j$ en todas las fórmulas.)

Cualquier forma de la corriente superficial $K(x)$ que sea relativamente razo-

nable conduce a un valor aproximado de Z_d con precisión del 10 al 20 por 100, en general. Teniendo un poco más de cuidado pueden obtenerse resultados considerablemente mejores. La hipótesis más sencilla es tomar $K(x)$ constante en la cinta. Este cálculo se deja para uno de los problemas al fin del capítulo. Una aproximación mucho mejor se obtiene si se analiza el comportamiento de $K(x)$ en el borde de la cinta. En la sección 2.11 se demostró que los campos en el borde de una lámina delgada tienen un comportamiento singular de la forma $(x)^{-1/2}$, siendo x la distancia al borde. Si se introduce esta dependencia en la función de tanteo $K(x)$, puede anticiparse que la aproximación para Z_d será mejor. Para simplificar, consideremos que $x_0 = a/2$. Para una cinta situada en posición central $K(x)$ es simétrica respecto a su punto medio y sólo intervienen en [8.156] $m = 1, 3, 5, \ldots$ Entonces, la integral de [8.156] es

$$I_m = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \int_0^{d/2} K(x') \cos\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) dx' \qquad [8.157]$$

siendo $x' = x - a/2$. Escribiremos, para introducir el comportamiento apropiado en los bordes de la cinta, la expresión:

$$K(x') = \frac{\bar{K}(x')}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - x'^2}} \qquad [8.158]$$

siendo $\bar{K}$ finita en $x' = \pm d/2$ y función par de x'. Haciendo el cambio de variable $x = (d/2)\cos\theta$, la [8.157] se convierte en:

$$I_m = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \bar{K}(\theta) \cos\left(\frac{m\pi d}{2a} \cos\theta\right) d\theta$$

La aproximación más sencilla es tomar $\bar{K} = 1$. Entonces, la integral, salvo una constante, es la fórmula de Poisson de la función de Bessel de orden cero. Así, pues:

$$I_m = \pi \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) J_0\left(\frac{m\pi d}{2a}\right) \qquad [8.159]$$

Un desarrollo polinómico finito en potencias de $\operatorname{sen}^2\theta$ [que es equivalente a un desarrollo en potencias de $(d^2/4 - x^2)$], constituye una función variacional de tanteo de N-parámetros:

$$\bar{K}(\theta) = \sum_{k=0}^{N} b_k (\operatorname{sen}^2\theta)^k \qquad [8.160]$$

siendo $b_0 = 1$. Para esta función I_m viene dado por:

$$I_m = \pi \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sum_{k\ 0}^{N} (2k-1)!\,!\, b_k \left(\frac{2a}{m\pi d}\right)^k J_k\left(\frac{m\pi d}{2a}\right) \qquad [8.161]$$

Esta expresión puede introducirse en [8.156], y el resultado puede minimizarse con respecto a las variaciones de los coeficientes b_k. Aquí consideraremos úni-

camente la expresión más sencilla [8.159], basada en el primer término de [8.160]. La impedancia de la discontinuidad es, entonces, aproximadamente:

$$Z_d \simeq -\frac{ia}{\lambda_g}\frac{1}{J_0^2\left(\frac{\pi d}{2a}\right)}\sum_{m=3,5,}^{\infty}\frac{J_0^2\left(\frac{m\pi d}{2a}\right)}{\sqrt{m^2-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}} \qquad [8.162]$$

Puede verse que según la forma asintótica [3.91] de la función de Bessel el término m-ésimo de la serie varía como m^{-2}, para valores grandes de m, de modo que la serie converge bastante deprisa salvo cuando d/a es muy pequeño. Para un valor típico, $d/a=0{,}25$ el cálculo numérico de [8.162] conduce a $(i\lambda_g Z_d/a)=0{,}259$ cuando $\omega/\omega_1=1$, y a 0,306 cuando $\omega/\omega_1=2$. A efectos de comparación se observa que los valores correspondientes de la figura 5.2.8 de MARCUVITZ son 0,254 y 0,288, respectivamente. La función de tanteo [8.158] con $\bar{K}=1$ resulta, por tanto, que sobreestima la impedancia en un 2 por 100 en la frecuencia de corte y en un 6 por 100 para $\omega/\omega_1=2$. En contraste, la hipótesis de que la corriente es constante (problema 8.12) da valores un 15 y un 24 por 100 demasiado grandes cuando $d/a=0{,}25$. El empleo de la serie [8.160] para realizar un cálculo verdaderamente variacional puede mejorar los resultados aún más.

Cuando d/a es pequeño la serie [8.156] converge lentamente. Resulta ventajoso sumar la serie antes de la integración y, así, obtener una expresión como [8.153], que incluye una función de Green. Para ω arbitraria la serie no puede sumarse en términos de funciones simples, pero la impedancia puede escribirse como dos términos: el valor estático ($\omega=0$) más una serie que converge rápidamente a título de término correctivo:

$$Z_d = Z_d^{(0)} + \Delta Z_d \qquad [8.163]$$

siendo:

$$\frac{i\lambda_g}{a}Z_d^{(0)} = \frac{\int dx \int dx'\, K(x)G(x,x')K(x')}{\left[\int dx\, K(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]^2} - 1 \qquad [8.164]$$

y

$$\frac{i\lambda_g}{a}\Delta Z_d = \sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{m^2-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}} - \frac{1}{m}\right]\left[\frac{\int dx\, K(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{\int dx\, K(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)}\right]^2 \qquad [8.165]$$

Cuando m es grande el coeficiente de [8.165] se aproxima a $\omega^2/2\omega_1^2 m^3$ y, por tanto, da una serie que converge rápidamente en la que usualmente sólo hace falta mantener tres o cuatro términos. La función de Green en la impedancia estática [8.164] es:

$$G(x,x') = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \qquad [8.166]$$

La serie puede sumarse en forma cerrada * dando:

$$G(x, x') = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2a}(x + x')}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2a}(x - x')} \right| \qquad [8.167]$$

El numerador del logaritmo puede tratarse como constante para la aproximación de primer orden en d/a tomando $x = x' = x_0$. La impedancia estática es, pues, aproximadamente:

$$\frac{i\lambda_g}{a} Z_d^{(0)} \simeq \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \ln\left(\frac{2a}{\pi d} \operatorname{sen} \frac{\pi x_0}{a}\right) - 1 + \\ + \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \frac{\int dx \int dx' K(x) K(x') \ln \left| \dfrac{d}{x - x'} \right|}{2\left[\int K(x)\, dx\right]^2} \qquad [8.168]$$

con correcciones del orden de d^2/a^2. Este comportamiento logarítmico del primer término es independiente de $K(x)$. Sólo dependen de $K(x)$ los términos correctivos pequeños que dan lugar a una constante. Cuando $K = 1$, el coeficiente de $\operatorname{cosec}^2(\pi x_0/a)$ en el último término de [8.186] es igual a 3/4, mientras que para la forma [8.158] con $\bar{K} = 1$ es $\ln 2 = 0{,}693$. La impedancia estática con este último valor es:

$$Z_d^{(0)} \simeq -\frac{ia}{2\lambda_g}\left[\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \ln\left(\frac{8a}{\pi d} \operatorname{sen} \frac{\pi x_0}{a}\right) - 2\right] \qquad [8.169]$$

El término correctivo [8.165] para frecuencias finitas, con el mismo grado de precisión en potencias de d/a, es:

$$\Delta Z_d \simeq -\frac{ia}{\lambda_g} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \sum_{m=2}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{m^2 - \dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}}} - \frac{1}{m}\right] \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \qquad [8.170]$$

Las ecuaciones [8.169] y [8.170] son las expresiones recogidas por MARCUVITZ (pág. 264 de su libro). La contribución adicional ΔZ_d es pequeña. Por ejemplo, para la cinta centrada ($x_0 = a/2$) la suma que figura en [8.170] se estima que vale $0{,}02\ \omega^2/\omega_1^2$. Estos últimos resultados son razonablemente precisos para $d/a \leqslant 0{,}1$.

Los dos métodos descritos anteriormente, el desarrollo directo en serie representado por [8.162] y el empleo de la función de Green en forma cerrada [8.167] ilustran algunas de las técnicas que se emplean para calcular coeficientes de reflexión de obstáculos en guías de ondas. En la bibliografía especializada se describen muchos métodos ingeniosos, a los que referimos al lector interesado.

* En el apéndice A.6 del libro de COLLIN se discuten varios métodos para sumar series como la [8.166]. El ejemplo que aparece en nuestra sección 2.10 puede adaptarse para dar [8.167].

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

Las guías de ondas y las cavidades resonantes se tratan en numerosos libros de ingeniería eléctrica y de telecomunicación, por ejemplo:

RAMO, WHINNERY y VAN DUZER, capítulos 7, 8, 10 y 11.

Los dos libros de SCHELKUNOFF merecen citarse por su claridad y por lo que profundiza en conceptos físicos.

SCHELKUNOFF, *Electromagnetic fields.*
SCHELKUNOFF, *Applied Mathematics for Engineers and Scientists.*

Entre los textos de física que tratan guías de ondas, líneas de transmisión y las cavidades, figuran:

PANOFSKY y PHILLIPS, cap. 12.
SLATER.
SMYTHE, capítulo XIII.
SOMMERFELD, *Electrodynamics,* secciones 22-25.
STRATTON, secciones 9.18-9.22.

En

F. E. BORGNIS y C. H. PAPAS, *Electromagnetic Waveguides and Resonators,* volumen XVI de la *Encyclopaedia of Physics,* ed. S. Flugge, Springer-Verlag, Berlín, 1958,

aparece una discusión autorizada. Los libros de

COLLIN,
HARRINGTON,
JOHNSON, y
WALDRON

están dirigidos a físicos e ingenieros titulados y se dedican casi completamente a ondas guiadas y cavidades. Se cubre con detalle la teoría normal y muchos temas especializados como las discontinuidades. El trabajo original sobre métodos variacionales para las discontinuidades está resumido en

J. SCHWINGER y D. E. SAXON, *Discontinuities in Waveguides, Notes on Lectures by Julian Schwinger,* Gordon and Breach, Nueva York, 1968.

Los principios variacionales para las frecuencias propias, etc., así como discontinuidades, son revisados por

L. CAIRO y T. KAHAN,

y discutidos también por

HARRINGTON, capítulo 7,
VAN BLADEL, capítulo 13,
WALDRON, capítulo 8.

El compendio definitivo de fórmulas y resultados numéricos sobre discontinuidades, uniones, etc., en guías de ondas es

MARCUVITZ.

Los procedimientos matemáticos para la discusión de estos problemas de contorno se presentan en:

MORSE y FESHBACH, especialmente el cap. 13.

La perturbación de las condiciones de contorno se discute en las páginas 1038 y siguientes.

Acerca de las funciones especiales puede hallarse información en el siempre digno de confianza

MAGNUS y OBERHETTINGER, tanto en el original, como en la revisión con SONI,

y con detalle enciclopédico en

Bateman Manuscript Project, Higher Trascendental Functions.

Los valores numéricos de las funciones especiales, así como las fórmulas se dan en

ABRAMOWITZ y STEGUN;
JAHNKE, EMDE y LOSCH.

Dos libros que tratan de la propagación de ondas electromagnéticas alrededor de la tierra y en la ionosfera desde el punto de vista de guías de ondas y modos normales son

K. G. BUDDEN, *The Wave-guide Mode Theory of Wave Propagation*, Logos Press y Academic Press, Londres, 1961;
WAIT.

Véase también:

GALEJS.

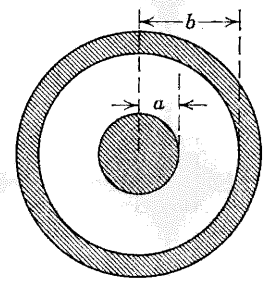
PROBLEMAS

8.1. Una línea de transmisión que consiste en dos cilindros circulares concéntricos de metal de conductividad σ y profundidad de penetración δ, como se indica en la figura, se llena de un dieléctrico uniforme sin pérdidas (μ, ϵ). A lo largo de la línea se propaga un modo TEM.

a) Demuéstrese que el flujo medio temporal de potencia a lo largo de la línea es

$$P = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\,\pi a^2\,|H_0|^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

en donde H_0 es el valor de pico del campo magnético azimutal junto a la superficie del conductor interior.



Problema 8.1.

b) Demuéstrese que la potencia transmitida se atenúa a lo largo de la línea según

$$P(z) = P_0 e^{-2\gamma z}$$

donde

$$\gamma=\frac{1}{2\sigma\delta}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

c) Se define la impedancia característica de la línea Z_0 como la razón entre el voltaje existente entre los cilindros y la corriente axial que fluye por uno de ellos para cualquier posición z. Demuéstrese que para esta línea

$$Z_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

d) Demuéstrese que la resistencia y la inductancia por unidad de longitud de la línea son:

$$R=\frac{1}{2\sigma\pi\delta}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

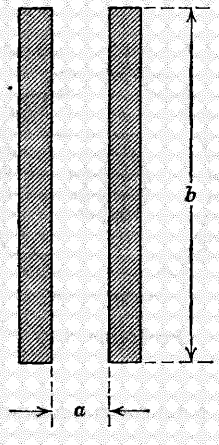
$$L=\left\{\frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{\mu_c\delta}{4\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\}$$

en donde μ_c es la permeabilidad del conductor. La corrección que aparece en la inductancia se debe a la penetración del flujo en los conductores en una distancia del orden de δ.

8.2. Una línea de transmisión consta de dos cintas metálicas idénticas dibujadas en sección transversal en la figura. Suponiendo que $b\gg a$, discútase la propagación de un modo TEM en esta línea repitiendo las deducciones del problema 8.1. Demuéstrese que:

$$P=\frac{ab}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\,|H_0|^2$$

$$\gamma=\frac{1}{a\sigma\delta}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$



Problema 8.2.

$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$R=\frac{2}{\sigma\delta b}$$

$$L=\left(\frac{\mu a+\mu_c\delta}{b}\right)$$

en las que los símbolos tienen los mismos significados que en el problema 8.1.

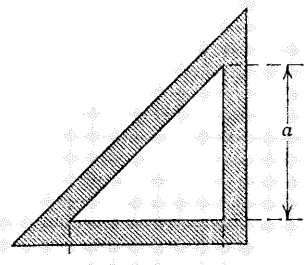
8.3. A lo largo de un cilindro circular hueco de latón, de radio interior R, se propagan ondas eléctricas y magnéticas transversales.

a) Hállense las frecuencias de corte de los distintos modos TE y TM. Determínese numéricamente la frecuencia de corte más baja (el modo dominante) en función del radio del tubo y las razones entre las frecuencias de los cuatro modos superiores siguientes y la del modo dominante. Para esta parte supóngase que la conductividad del bronce es infinita.

b) Calcúlese la constante de atenuación de la guía de ondas en función de la frecuencia para los dos modos más bajos y represéntese en función de la frecuencia.

8.4. Se tiene una guía de onda cuya sección transversal tiene forma de triángulo rectángulo cuyos lados tienen por longitud a, a, $\sqrt{2a}$, tal como se indica en la figura. El medio del interior viene caracterizado por $\mu_r=\epsilon_r=1$.

a) Suponiendo que las paredes presentan conductividad infinita, determínense los modos posibles de propagación y sus frecuencias de corte.



Problema 8.4.

b) Calcúlese para los modos más bajos de cada tipo, la constante de atenuación, suponiendo que las paredes presentan conductividad muy grande, pero finita. Compárese el resultado con el de la guía de onda cuadrada de lado a hecha con el mismo material.

8.5. Se tiene una cavidad resonante de cobre en forma de cilindro circular recto hueco, de radio interior R y longitud L y limitado por bases planas.

a) Determínense las frecuencias de resonancia de la cavidad para todos los tipos de ondas. Tomando $(1/\sqrt{\mu\epsilon}\,R)$ como unidad de frecuencia, represéntense las cuatro frecuencias de resonancia más bajas de cada tipo en función de R/L para $0<R/L<2$. ¿Corresponde al mismo modo la frecuencia más baja para todo valor de R/L?

b) Si $R=2$ cm, $L=3$ cm, y la cavidad está hecha de cobre puro, ¿cuál es el valor numérico de Q para el modo resonante más bajo?

8.6. Una cavidad resonante está constituida por el hueco existente entre dos esferas concéntricas perfectamente conductoras, de las cuales la menor tiene un radio exterior a y la mayor un radio interior b. Como se demostró en la sección 8.9, el campo magnético acimutal tiene una dependencia radial dada por las funciones esféricas de Bessel, $j_l(kr)$ y $n_l(kr)$, siendo $k=\omega/c$.

a) Exprésese la ecuación trascendente que da las frecuencias características de la cavidad para valores de l arbitrarios.

b) Cuando $l=1$ utilícense las formas explícitas de las funciones esféricas de Bessel para demostrar que las frecuencias características están dadas por

$$\frac{\tan kh}{kh}=\frac{\left(k^2+\frac{1}{ab}\right)}{k^2+ab\left(k^2-\frac{1}{a}\right)\left(k^2-\frac{1}{b^2}\right)}$$

siendo $h=b-a$.

c) Cuando $h/a\ll 1$, verifíquese que el resultado de *b)* conduce a la frecuencia hallada en la sección 8.9, y hállese la corrección de primer orden en h/a.

(El resultado de la parte *b)* parece haber sido deducido por primera vez por J. J. THOMSON y publicado en su libro *Recent Researches in Electricity and Magnetism,* Oxford, Clarendon Press, 1893, págs. 373 y ss.)

8.7. Calcúlense los valores de Q para las resonancias de Schumann de la sección 8.9 suponiendo que la tierra posee una conductividad σ_e y que la ionosfera, una conductividad σ_i, siendo δ_e y δ_i las profundidades de penetración correspondientes.

a) Demuéstrese que el valor de Q es $Q=Nh/(\delta_e+\delta_i)$, en la aproximación de menor orden en h/a y determínese el valor numérico de N para cualquier valor de l.

b) Calcúlese el valor de Q para la resonancia de Schumann más baja suponiendo $\sigma_e=10^{-1}$ mhos/m, $\sigma_i=10^{-5}$ mhos/m y $h=10^2$ km.

c) Discútase la validez de la aproximación realizada en la parte *a)* para el margen de valores de los parámetros empleado en *b)*.

8.8. Un cilindro circular recto de dieléctrico no permeable cuya constante dieléctrica es ϵ, y de radio a, hace de guía dieléctrica en el vacío.

a) Discútase la propagación de las ondas a lo largo de dicha guía, suponiendo que la variación acimutal de los campos es $e^{im\phi}$.

b) Para $m=\pm 1$, determínese el modo al que corresponde la frecuencia de corte más baja y discútanse las propiedades de sus campos (frecuencia de corte, variación espacial, etc.), suponiendo que $\epsilon\gg\epsilon_0$.

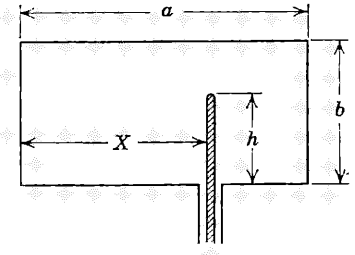
8.9. *a)* Demuéstrese, mediante el empleo del teorema de Green en dos dimensiones, que los modos TE y TM en una guía de ondas, definidos mediante los problemas de condiciones de contorno [8.34] y [8,36], son ortogonales en el sentido de que para los modos TM

$$\int_A E_{z\lambda}E_{z\mu}da=0 \quad \text{para} \quad \lambda\neq\mu$$

y que para los modos TE existe una relación correspondiente para H_z.

b) Demuéstrese que las relaciones [8.125] y [8.128] forman un conjunto de condiciones de normalización para los campos, incluyendo los casos en que λ es un modo TM y μ es un modo TE.

8.10. En una guía de ondas rectangular infinitamente larga se extiende verticalmente una distancia h en su interior, en el plano $z=0$, el conductor interno de un cable coaxial, como se indica en la sección transversal dibujada. La corriente a lo largo de la sonda oscila sinusoidalmente con el tiempo a la frecuencia ω y su variación espacial puede tomarse aproximadamente $I(y)=I_0 \operatorname{sen}[(\omega/c)(h-y)]$. Puede despreciarse el grosor de la sonda. La frecuencia es tal que sólo puede propagarse en la guía el modo $TE_{1,0}$.



Problema 8.10.

a) Calcúlense las amplitudes necesarias para la excitación de los modos TE y TM para cualquier (m, n) y demuéstrese cómo dependen de m y n cuando ambas son mucho mayores que 1 a una frecuencia fija ω.

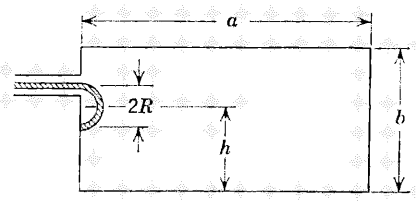
b) Demuéstrese que para el modo que se propaga la potencia radiada en la dirección positiva z es:

$$P=\frac{\mu c I_0^2}{\omega k a b}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}^4\left(\frac{\omega h}{2c}\right)$$

e igual cantidad en el sentido opuesto. Aquí k es el número de ondas para el modo $TE_{1,0}$.

c) Discútanse las modificaciones que tienen lugar si la guía, en lugar de extenderse hasta el infinito en ambos sentidos, se termina con una superficie perfectamente conductora en $z=L$. ¿Qué valores de L harán máximo el flujo de energía para una corriente dada I_0? ¿Cuál es la resistencia de radiación de la sonda (definida como la relación entre el flujo de potencia y la mitad del cuadrado de la intensidad de la corriente en la base de la prueba) en dicho máximo?

8.11. Una guía de ondas rectangular infinitamente larga tiene una línea coaxial que termina en uno de los lados cortos de la guía de modo que el conductor interno forma una espira semicircular de radio R cuyo centro está situado a una altura h sobre el lado inferior de la guía, como se ha dibujado en el esquema de la sección transversal que se acompaña. La semiespira está en el plano $z=0$ y su radio R es lo suficientemente pequeño para que pueda tomarse para la intensidad de la corriente un valor único I_0 en todos los puntos de la misma.



Problema 8.11.

a) Demuéstrese que los modos TM no son excitados, mientras se cumpla que $R \ll a$ y b y que la corriente sea constante en la semiespira. Dése una explicación física de esta falta de excitación.

b) Determínese la amplitud del modo TE más bajo en la guía y demuéstrese que su valor es independiente de la altura h.

c) Demuéstrese que la potencia radiada en cualquier sentido para el modo TE más bajo es

$$P = \frac{\pi I_0^2}{4} Z \frac{a}{b} \left(\frac{\pi R}{a} \right)^4$$

siendo Z la impedancia de onda del modo $TE_{1,0}$.

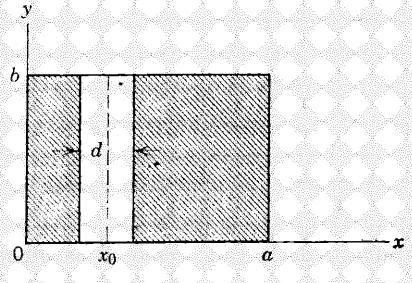
8.12. Discútase la reflexión producida por una cinta plana de anchura d, situada en $x = x_0$, en una guía rectangular, tal como se indica en la figura 8.15.

a) Utilícese en [8.156] la aproximación $K(x) = 1$ para demostrar que la impedancia paralelo viene dada aproximadamente por:

$$Z_d = -\frac{ia}{\lambda_g} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2 \sqrt{m^2 - \dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}}} \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{m\pi x_0}{a} \right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{m\pi d}{2a} \right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x_0}{a} \right) \operatorname{sen} \dfrac{\pi d}{2a}} \right]^2$$

b) Para una cinta centrada ($x_0 = a/2$) calcúlese numéricamente la suma que figura en *a)* cuando $d/a = 0{,}3$ y $\omega/\omega_1 = 1{,}0$ y compárenla con el resultado exacto $i\lambda_g Z_d / a = 0{,}186$ (deducido de la figura 5.2.8 de MARCUVITZ).

8.13. Considérese la reflexión del modo $TE_{1,0}$ en una guía de ondas rectangular con una abertura que es el complemento de la cinta de la figura 8.15, como se indica en el esquema situado a continuación



Problema 8.13.

a) Demuéstrese que la admitancia paralelo puede escribirse:

$$Y_d = \frac{i\lambda_g}{a} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sqrt{m^2 - \dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}}}{m^2} \left[\frac{\int dx\, H_z(x) \cos\left(\dfrac{m\pi x}{a} \right)}{\int dx\, H_z(x) \cos\left(\dfrac{\pi x}{a} \right)} \right]^2$$

siendo $H_z(x)$ el campo magnético longitudinal en la abertura.

b) Demuéstrese que la función de Green estática, definida por analogía con [8.166], es:

$$G(x, x') = -\tfrac{1}{2} \ln \left[2 \left| \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right) \right| \right]$$

c) Demuéstrese que la impedancia estática de una abertura centrada y estrecha, cuando $H_z(x)$ se aproxima por el polinomio en x de menor orden que sea compatible con la simetría de los campos, es:

$$Y_d^{(0)} \simeq \frac{i\lambda_g}{a} \left[\frac{9}{2\pi^2} \left(\frac{a}{d}\right)^2 \right]$$

con correcciones del orden de $(d/a)^2$ respecto al primer término. La respuesta correcta en el límite $d/a \ll 1$ es 8/9 de este valor.

a) Demuéstrese que los modos TM no son excitados, mientras se cumpla que $R \ll a$ y b y que la corriente sea constante en la semiespira. Dése una explicación física de esta falta de excitación.

b) Determínese la amplitud del modo TE más bajo en la guía y demuéstrese que su valor es independiente de la altura h.

c) Demuéstrese que la potencia radiada en cualquier sentido para el modo TE más bajo es

$$P = \frac{\pi I_0^2}{4} Z \frac{a}{b} \left(\frac{\pi R}{a} \right)^4$$

siendo Z la impedancia de onda del modo $TE_{1,0}$.

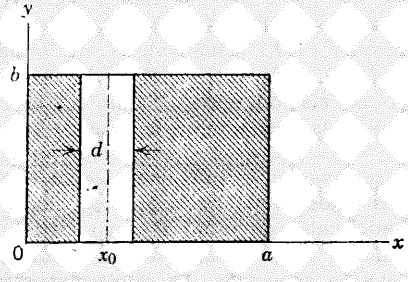
8.12. Discútase la reflexión producida por una cinta plana de anchura d, situada en $x = x_0$, en una guía rectangular, tal como se indica en la figura 8.15.

a) Utilícese en [8.156] la aproximación $K(x) = 1$ para demostrar que la impedancia paralelo viene dada aproximadamente por:

$$Z_d = -\frac{ia}{\lambda_g} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2 \sqrt{m^2 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}} \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x_0}{a} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi d}{2a} \right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x_0}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi d}{2a}} \right]^2$$

b) Para una cinta centrada ($x_0 = a/2$) calcúlese numéricamente la suma que figura en *a)* cuando $d/a = 0{,}3$ y $\omega/\omega_1 = 1{,}0$ y compárenla con el resultado exacto $i\lambda_g Z_d / a = 0{,}186$ (deducido de la figura 5.2.8 de MARCUVITZ).

8.13. Considérese la reflexión del modo $TE_{1,0}$ en una guía de ondas rectangular con una abertura que es el complemento de la cinta de la figura 8.15, como se indica en el esquema situado a continuación.



Problema 8.13.

a) Demuéstrese que la admitancia paralelo puede escribirse:

$$Y_d = \frac{i\lambda_g}{a} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sqrt{m^2 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}}{m^2} \left[\frac{\int dx\, H_z(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{a} \right)}{\int dx\, H_z(x) \cos\left(\frac{\pi x}{a} \right)} \right]^2$$

siendo $H_z(x)$ el campo magnético longitudinal en la abertura.

b) Demuéstrese que la función de Green estática, definida por analogía con [8.166], es:

$$G(x, x') = -\tfrac{1}{2} \ln \left[2 \left| \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right) \right| \right]$$

c) Demuéstrese que la impedancia estática de una abertura centrada y estrecha, cuando $H_z(x)$ se aproxima por el polinomio en x de menor orden que sea compatible con la simetría de los campos, es:

$$Y_d^{(0)} \simeq \frac{i\lambda_g}{a} \left[\frac{9}{2\pi^2} \left(\frac{a}{d}\right)^2 \right]$$

con correcciones del orden de $(d/a)^2$ respecto al primer término. La respuesta correcta en el límite $d/a \ll 1$ es 8/9 de este valor.

SISTEMAS RADIANTES SENCILLOS, DISPERSION * Y DIFRACCION

En los capítulos 7 y 8 hemos tratado las propiedades de las ondas electromagnéticas y su propagación en medios limitados e ilimitados. Pero no se ha dicho nada sobre cómo producir estas ondas. En el presente capítulo consideraremos esta cuestión y trataremos la emisión de radiación por sistemas de cargas y corrientes oscilantes y localizadas. El tratamiento es directo, sin un formalismo complicado. Por su naturaleza está limitado a sistemas radiantes bastante sencillos. El estudio sistemático, utilizando campos vectoriales multipolares de l arbitraria, se reserva para el capítulo 16. Aquí discutiremos únicamente los dipolos eléctrico y magnético y el cuadrupolo eléctrico, así como algunas configuraciones sencillas de corrientes en conductores. También se trata el desarrollo multipolar de una fuente en una guía de ondas y los momentos multipolares efectivos de las aberturas.

La segunda parte del capítulo, y la más larga, se refiere a la dispersión * y a la difracción. En primer lugar se estudia la dispersión para longitudes de onda grandes, que incluye la explicación de Rayleigh sobre el color azul del cielo y otros temas relacionados. Después, la teoría escalar y vectorial de la difracción, con algunos ejemplos. El capítulo termina con la dispersión para longitudes de onda cortas y el importante *teorema óptico.*

9.1. CAMPOS Y RADIACION DE UNA FUENTE OSCILANTE LOCALIZADA

Para un sistema de cargas y corrientes que varían con el tiempo, podemos efectuar un análisis de Fourier de la dependencia temporal y tratar de forma separada cada una de las componentes. Por tanto, no perderemos generalidad si consideramos que los potenciales, los campos y la radiación debidos a un sistema localizado de cargas y corrientes varían sinusoidalmente con el tiempo

$$\left.\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{x}, t) &= \rho(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}\\ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\} \qquad [9.1]$$

Como de costumbre, para obtener las magnitudes físicas, tomaremos la parte

* Hemos escogido la palabra dispersión para traducir el término inglés *scattering*, que creemos es la más adecuada. *(N. del T.)*

real de estas expresiones *. Se supone que los potenciales y campos electromagnéticos presentan el mismo tipo de dependencia con el tiempo.

Como se demostró en el capítulo 6 la solución para el potencial vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ en el contraste de Lorentz es:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\int dt'\,\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}', t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\delta\left(t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}-t\right) \qquad [9.2]$$

supuesto que no esté presente superficie limitadora alguna. La función delta de Dirac asegura un comportamiento causal de los campos. Si adoptamos la dependencia temporal [9.1] de tipo sinusoidal, la solución para $\boldsymbol{A}$ se transforma en:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,d^3x' \qquad [9.3]$$

donde $k=\omega/c$ es el número de ondas, y se sobrentiende que la dependencia con el tiempo es de tipo sinusoidal. La inducción magnética viene dada por:

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad [9.4]$$

mientras que, fuera de la fuente, el campo eléctrico es

$$\boldsymbol{E}=\frac{ic}{k}\nabla\times\boldsymbol{B} \qquad [9.5]$$

Dada una distribución de corriente $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$, podemos determinar los campos, al menos en principio, mediante el cálculo de la integral [9.3]. Consideraremos uno o dos ejemplos de integración directa en la sección 9.4. Pero en el momento presente deseamos establecer ciertas propiedades simples, pero generales, de los campos en el caso límite en que la fuente de corriente se halle confinada en una región pequeña, de hecho muy pequeña comparada con la longitud de onda. Si las dimensiones de la fuente son del orden de d y la longitud de onda es $\lambda=2\pi c/\omega$, si $d\ll\lambda$, se presentan tres regiones espaciales que ofrecen interés:

La zona próxima (estática):	$d\ll r\ll\lambda$
La zona intermedia (de inducción):	$d\ll r\sim\lambda$
La zona lejana (de radiación):	$d\ll\lambda\ll r$

Veremos que los campos presentan propiedades muy diferentes en las distintas zonas. En la zona próxima, los campos tienen el carácter de estáticos; las componentes radiales y la variación con la distancia dependen en detalle de las propiedades de la fuente. Por el contrario, en la zona lejana, los campos son transversales al radio vector y decrecen según r^{-1}, como es característico de los campos de radiación.

En la zona próxima, cuando $r\ll\lambda$ (o $kr\ll 1$), la exponencial de [9.3] puede

* Véase el problema 9.1 para descubrir alguna de las sutilezas que pueden surgir sobre los factores 2. También aparecen factores 2 en la correspondencia entre las magnitudes clásicas y mecanocuánticas. Por ejemplo, en un átomo con un solo electrón nuestro momento dipolar clásico $\boldsymbol{p}$ se sustituye por $2e\langle f|\boldsymbol{r}|i\rangle$ para una transición desde el estado i al f.

reemplazarse por la unidad. Entonces, el potencial vector es de la forma considerada ya en el capítulo 5. Utilizando la expresión [3.70] puede desarrollarse el inverso de la distancia, con el resultado:

$$\lim \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \mu_0 \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') r'^l Y^*_{lm}(\theta', \phi')\, d^3x' \qquad [9.6]$$

Esto demuestra que los campos próximos son cuasi estacionarios, oscilan armónicamente como $e^{-i\omega t}$, pero, por lo demás, tienen carácter estático.

En la zona lejana ($k \gg 1$) la exponencial de [9.3] oscila rápidamente y determina el comportamiento del potencial vector. En esta región resulta suficiente hacer la aproximación *:

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \simeq r - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}' \qquad [9.7]$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{x}$. Además, si sólo se desea el primer término en kr, la distancia en el denominador de [9.3] puede sustituirse por r. Entonces, el potencial vector es:

$$\lim_{kr \to \infty} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') e^{-ik\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}'}\, d^3x' \qquad [9.8]$$

Esto demuestra que en la zona remota el potencial vector se comporta como una onda esférica hacia fuera con un coeficiente de dependencia angular. Es fácil demostrar que los campos calculados a partir de [9.4] y [9.5] son transversales respecto al radio vector y disminuyen como r^{-1}. Corresponden, pues, a campos de radiación. Si las dimensiones de la fuente son pequeñas comparadas con la longitud de onda resulta apropiado desarrollar la integral de [9.8] en serie de potencias de k:

$$\lim_{kr \to \infty} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}')^n\, d^3x' \qquad [9.9]$$

El valor del término enésimo viene dado por:

$$\frac{1}{n!} \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\, (k\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}')^n\, d^3x' \qquad [9.10]$$

Como el orden de magnitud de x' es d, y kd es por hipótesis pequeño frente a la unidad, los sucesivos términos del desarrollo de $\boldsymbol{A}$ evidentemente decrecen rápidamente con n. Por consiguiente, la radiación emitida por la fuente proviene fundamentalmente del primer término que no sea nulo en el desarrollo. En las secciones siguientes examinaremos unos pocos de estos términos.

En la zona intermedia (o de inducción) ninguna de las aproximaciones alternativas que conducían a [9.6] y [9.8] resulta posible; deben retenerse todas las potencias de kr.

Sin desplegar todo el aparato matemático de los campos multipolares vectoriales, descritos en el capítulo 16, podemos extractar lo suficiente para nuestro inmediato propósito. El resultado clave es el desarrollo exacto [16.22] para

* En realidad [9.7] es válida para $r \gg d$, independientemente del valor de kr. Por consiguiente, se trata de una buena aproximación incluso en la zona próxima.

la función de Green que aparece en [9.3]. Entonces, para puntos fuera de la fuente, la ecuación [9.3] se convierte en:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \mu_0 ik \sum_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \phi')\, d^3x' \qquad [9.11]$$

Si las dimensiones de la fuente son pequeñas comparadas con la longitud de onda, $j_l(kr')$ puede ser aproximada mediante [16.12]. Entonces, el potencial vector es de la forma [9.6], pero con la sustitución:

$$\frac{1}{r^{l+1}} \rightarrow \frac{e^{ikr}}{r^{l+1}} (1 + a_1(ikr) + a_2(ikr)^2 + \ldots + a_l(ikr)^l) \qquad [9.12]$$

Los coeficientes numéricos a_i proceden de las expresiones explícitas para las funciones de Hankel esféricas. El segundo miembro de [9.12] muestra la transición desde el resultado de la zona estática [9.6] para $kr \ll 1$ al de la zona de radiación [9.9] para $kr \gg 1$.

Antes de discutir la radiación del dipolo eléctrico y otros tipos, vamos a examinar la cuestión de los campos eléctricos monopolares cuando las fuentes varían con el tiempo. La ecuación análoga a la [9.2] para el potencial escalar es:

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(\boldsymbol{x}', t')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \delta\left(t' + \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}{c} - t\right)$$

La contribución monopolar eléctrica se obtiene haciendo el cambio $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \rightarrow \rightarrow |\boldsymbol{x}| \equiv r$ en la integral. El resultado es

$$\Phi_{\text{monopolo}}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{q(t' = t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r}$$

siendo $q(t)$ la carga total de la fuente. Como la carga se conserva y, por definición, en una fuente localizada no puede entrar ni salir carga de ella, la carga total q es independiente del tiempo. Por consiguiente, la *parte monopolar eléctrica* del potencial (y de los campos) es necesariamente *estática*. Los campos con dependencia armónica del tiempo $e^{-i\omega t}$, cuando $\omega \neq 0$, no tienen términos monopolares.

Pasemos ahora a los campos multipolares de menor orden para $\omega \neq 0$. En lo que sigue omitiremos la referencia explícita al potencial escalar porque estos campos pueden calcularse a partir del potencial vector sólo mediante [9.4] y [9.5].

9.2. CAMPOS Y RADIACION DE DIPOLOS ELECTRICOS

Si sólo se conserva el primer término de [9.9], el potencial vector es:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\, d^3x' \qquad [9.13]$$

El examen de [9.11] y [9.12] enseña que [9.13] es la parte correspondiente a

$l=0$ de la serie y que es válida en todo el espacio fuera de la fuente, no sólo en la zona remota. La integral puede ponerse en forma más familiar si se integra por partes:

$$\int \boldsymbol{J}\, d^3x' = -\int \boldsymbol{x}'(\nabla' \cdot \boldsymbol{J})\, d^3x' = -i\omega \int \boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\, d^3x' \qquad [9.14]$$

según la ecuación de continuidad,

$$i\omega\rho = \nabla \cdot \boldsymbol{J} \qquad [9.15]$$

Así que el potencial vector es

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \boldsymbol{p} \frac{e^{ikr}}{r} \qquad [9.16]$$

en donde

$$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\, d^3x' \qquad [9.17]$$

es el *momento dipolar eléctrico,* tal como se definió en electrostática mediante [4.8].

Según [9.4] y [9.5], los campos debidos al dipolo eléctrico son:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} ck^2(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}) \frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \\ \boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi^2}\left[k^2(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{n} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}]\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr}\right] \end{aligned}\right\} \qquad [9.18]$$

Observemos que la inducción magnética es, a cualquier distancia, transversal al radio vector, pero que el campo eléctrico presenta componentes paralela y perpendicular a $\boldsymbol{n}$.

En la zona de radiación, los campos toman las formas límite

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} ck^2(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \\ \boldsymbol{E} &= c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{n} \end{aligned}\right\} \qquad [9.19]$$

que manifiestan el comportamiento típico de campos de radiación.

Por otra parte, en la zona próxima los campos tienden a:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}) \frac{1}{r^2} \\ \boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}] \frac{1}{r^3} \end{aligned}\right\} \qquad [9.20]$$

El campo eléctrico, salvo que oscila con el tiempo, es precisamente el campo estático debido a un dipolo eléctrico [4.13]. La inducción magnética es más pequeña que el campo eléctrico en un factor (kr) en la región para la cual $kr \ll 1$. Así, pues, los campos en la zona próxima son predominantemente de naturaleza

eléctrica. Por supuesto que la inducción magnética se anula en el caso estático, límite cuando $k \to 0$. En este caso, la zona próxima se extiende hasta el infinito.

La media temporal de la potencia radiada por unidad de ángulo sólido, por un momento dipolar oscilante $\boldsymbol{p}$ es

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}\left[r^2 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^*\right] \qquad [9.21]$$

donde $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ vienen dados por [9.19]. Así tenemos

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} ck^4 |\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p})|^2 \qquad [9.22]$$

El estado de polarización de la radiación nos lo da el vector encerrado entre las barras de valor absoluto. Si todas las componentes de $\boldsymbol{p}$ tienen la misma fase, la distribución angular es la típica de un dipolo:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} ck^4 |\boldsymbol{p}|^2 \operatorname{sen}^2 \theta \qquad [9.23]$$

en la que el ángulo θ se mide respecto de la dirección de $\boldsymbol{p}$. La potencia total radiada, independientemente de las fases relativas de las componentes de $\boldsymbol{p}$, es:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ck^4}{3} |\boldsymbol{p}|^2 \qquad [9.24]$$

Un ejemplo sencillo de dipolo eléctrico radiante es una antena lineal, de longitud d pequeña frente a la longitud de onda, alimentada en su centro. Se supone que la antena está dirigida a lo largo del eje z, extendiéndose desde $z = (d/2)$ hasta $z = -(d/2)$ con un pequeño corte en su centro a efectos de excitación como se indica en la figura 9.1. En cada una de las dos mitades de la antena la corriente tiene la misma dirección, su valor es I_0 en el punto de excitación y disminuye de forma aproximadamente lineal hasta anularse en los extremos:

$$I(z)e^{-i\omega t} = I_0\left(1 - \frac{2|z|}{d}\right)e^{-i\omega t} \qquad [9.25]$$

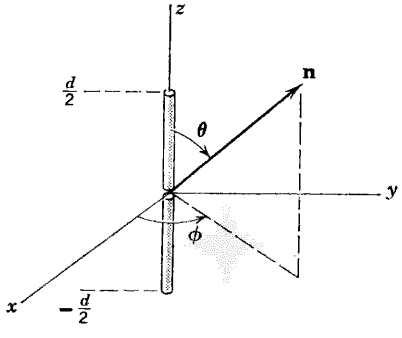


FIG. 9.1. Antena lineal corta de alimentación central.

Según la ecuación de continuidad [9.15], la densidad lineal de carga ρ' (carga por unidad de longitud) es constante a lo largo de cada brazo de la antena, y tiene el valor

$$\rho'(z) = \pm \frac{2iI_0}{\omega d} \qquad [9.26]$$

el signo superior corresponde a los valores positivos de z y el inferior a los negativos. El momento dipolar [9.17] es paralelo al eje z y tiene el valor:

$$p = \int_{-(d/2)}^{(d/2)} z\rho'(z)\, dz = \frac{iI_0 d}{2\omega} \qquad [9.27]$$

La distribución angular de potencia radiada es

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{128\pi^2\epsilon_0 c}(kd)^2 \operatorname{sen}^2\theta \qquad [9.28]$$

mientras que la potencia radiada total es

$$P = \frac{I_0^2(kd)^2}{48\pi\epsilon_0 c} \qquad [9.29]$$

Vemos que para una corriente de excitación fija, la potencia radiada aumenta con el cuadrado de la frecuencia, al menos en el dominio de las longitudes de onda largas en que $kd \ll 1$.

El coeficiente de $I_0^2/2$ en [9.29] tiene las dimensiones de una resistencia y se denomina *resistencia de radiación* R_{rad} de la antena. Corresponde al segundo término de la ecuación [6.137] y es la resistencia total de la antena si la conductividad es perfecta. El valor de la resistencia de radiación en ohmios para este tipo de antena corta alimentada en su centro es, pues, $5\,(kd)^2$. La reactancia de entrada de la antena puede calcularse aplicando las ecuación [6.138] o [6.140] de la sección 6.10. Desgraciadamente el cálculo depende de modo crucial del valor de los campos en la zona central de la antena, donde son más intensos, y, por ello, es muy sensible a variaciones en la forma geométrica y el método de excitación. No obstante, como el sistema es un dipolo *eléctrico* y cerca de la antena el campo dipolar electrostático es dominante, podemos decir con cierta seguridad que para valores de kd pequeños la reactancia es negativa (capacitiva).

9.3. CAMPOS DEBIDOS A UN DIPOLO MAGNETICO Y A UN CUADRUPOLO ELECTRICO

El siguiente término del desarrollo [9.9] nos da un potencial vector

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\, d^3x' \qquad [9.30]$$

en el que hemos incluido los términos adecuados de [9.12] para conseguir que [9.30] sea válida en todos los puntos fuera de la fuente. Este potencial vector

puede escribirse como suma de dos términos, uno de los cuales da una inducción magnética transversal y el otro da un campo eléctrico transversal. Estas contribuciones, que son distintas físicamente, pueden separarse si expresamos el integrando de [9.30] como suma de una parte simétrica en $\boldsymbol{J}$ y $\boldsymbol{x}'$ y otra parte que es antisimétrica. Así, tenemos

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\boldsymbol{J}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}']+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J})\times\boldsymbol{n} \qquad [9.31]$$

En la segunda parte, la antisimétrica, reconocemos la imanación debida a la corriente $\boldsymbol{J}$:

$$\mathcal{M}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{J}) \qquad [9.32]$$

Más adelante, demostraremos que el primer término, el simétrico, está relacionado con la densidad de momento cuadrupolar eléctrico.

Considerando ahora solamente el término de imanación, tenemos el potencial vector:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}ik(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right) \qquad [9.33]$$

siendo $\boldsymbol{m}$ el *momento magnético dipolar*:

$$\boldsymbol{m}=\int\mathcal{M}\,d^3x=\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{J})\,d^3x \qquad [9.34]$$

Podemos determinar los campos sin más que tener en cuenta que el potencial vector [9.33] es proporcional a la inducción magnética [9.18] correspondiente a un dipolo eléctrico. Esto significa que la inducción magnética para el dipolo magnético que nos ocupa es igual al campo eléctrico debido al dipolo eléctrico, pero sustituyendo $\boldsymbol{p}$ por $\boldsymbol{m}$. Así, tenemos

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{k^2(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})\times\boldsymbol{n}\frac{e^{ikr}}{r}+[3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})-\boldsymbol{m}]\left(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\right)e^{ikr}\right\} \qquad [9.35]$$

Análogamente, el campo eléctrico debido a un dipolo magnético es proporcional al campo magnético de un dipolo eléctrico con signo cambiado:

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}k^2(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right) \qquad [9.36]$$

Todos los razonamientos que se refieren al comportamiento de los campos en las zonas próxima y lejana son los mismos que en el caso del dipolo eléctrico, con las sustituciones $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\to-\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{m}$. Análogamente, los diagramas de radiación y la energía total radiada son los mismos para ambos tipos de dipolo. La única diferencia en los campos de radiación está en la polarización. En el caso de un dipolo eléctrico, el vector campo eléctrico está en el plano definido por $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{p}$, mientras que para un dipolo magnético es perpendicular al plano definido por $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{m}$.

La integral del término simétrico de [9.31] puede transformarse mediante una integración por partes y algunos reajustes:

$$\frac{1}{2}\int [(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\boldsymbol{J}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}']\,d^3x' = -\frac{i\omega}{2}\int \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x' \qquad [9.37]$$

Hemos usado la ecuación de continuidad [9.15] con el fin de sustituir $\nabla\cdot\boldsymbol{J}$ por $i\omega\rho$. Como la integral contiene momentos de segundo orden de la densidad de carga, esta parte simétrica corresponde a un caudrupolo eléctrico. El potencial vector es:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ck^2}{2}\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\int \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x' \qquad [9.38]$$

Resulta algo complicado escribir las expresiones completas de los campos. Nos contentaremos con los campos en la zona de radiación. Entonces, es fácil ver que:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= ik\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E} &= i\omega(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{n}\end{aligned}\right\} \qquad [9.39]$$

Por consiguiente, la inducción magnética es

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 ick^3}{8\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}')\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x' \qquad [9.40]$$

Según la definición [4.9] del *tensor momento cuadrupolar,*

$$Q_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\rho(\boldsymbol{x})\,d^3x \qquad [9.41]$$

podemos expresar la integral [9.40] en la forma

$$\boldsymbol{n}\times\int \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}')\,d^3x' = \frac{1}{3}\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) \qquad [9.42]$$

El vector $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})$ se define mediante sus componentes

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta}n_\beta \qquad [9.43]$$

vemos que depende, en magnitud y dirección, de la dirección de obser- demás de propiedades de la fuente. Con estas definiciones, tenemos la magnética

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 ick^3}{24\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) \qquad [9.44]$$

mporal radiada por unidad de ángulo sólido

$$\frac{dP}{} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{c}{288\pi}k^6|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})|^2 \qquad [9.45]$$

en el [9.30] sea va

en la que de nuevo el vector entre las barras de valor absoluto da la dirección del campo eléctrico radiado.

La distribución angular general es complicada. Pero puede calcularse de modo directo la potencia total radiada. Con la definición dada para $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})$, podemos expresar la dependencia angular en la forma:

$$|[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})]\times\boldsymbol{n}|^2=\boldsymbol{Q}^*\cdot\boldsymbol{Q}-|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{Q}|^2=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}Q^*_{\alpha\beta}Q_{\alpha\gamma}n_\beta n_\gamma-\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}Q^*_{\alpha\beta}Q_{\gamma\delta}n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta \quad [9.46]$$

Las integrales angulares que necesitamos de los productos de las componentes rectangulares de $\boldsymbol{n}$, se deduce fácilmente que son:

$$\left.\begin{aligned}\int n_\beta n_\gamma\,d\Omega&=\frac{4\pi}{3}\delta_{\beta\gamma}\\ \int n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta\,d\Omega&=\frac{4\pi}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\end{aligned}\right\} \quad [9.47]$$

Entonces, encontramos:

$$\int|[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})]\times\boldsymbol{n}|^2\,d\Omega=4\pi\left\{\frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta}|Q_{\alpha\beta}|^2-\frac{1}{15}\left[\sum_\alpha Q^*_{\alpha\alpha}\sum_\gamma Q_{\gamma\gamma}+2\sum_{\alpha,\beta}|Q_{\alpha\beta}|^2\right]\right\} \quad [9.48]$$

Por ser $Q_{\alpha\beta}$ un tensor cuyos elementos de la diagonal principal suman cero, el primer término en el corchete se anula idénticamente. Así obtenemos el resultado final que nos da la potencia total radiada por una fuente cuadrupolar:

$$P=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{ck^6}{360}\sum_{\alpha,\beta}|Q_{\alpha\beta}|^2 \quad [9.49]$$

Si se mantienen constantes los momentos cuadrupolares, la potencia radiada varía como la sexta potencia de la frecuencia, a diferencia de la radiación dipolar, que lo hacía como la cuarta potencia.

Un ejemplo sencillo de cuadrupolo radiante es una distribución de carga esferoidal que oscila. Los elementos fuera de la diagonal principal de $Q_{\alpha\beta}$ son nulos. Los elementos de la diagonal pueden expresarse así:

$$Q_{33}=Q_0,\qquad Q_{11}=Q_{22}=-\frac{1}{2}Q_0 \quad [9.50]$$

Y la distribución angular de potencia radiada será

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{ck^6}{128\pi}Q_0^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\theta \quad [9.51]$$

Como se indica en la figura 9.2, se trata de un diagrama de cuatro lóbulos, cuyos máximos se hallan para $\theta=\pi/4$ y $3\pi/4$. La potencia total radiada por este cuadrupolo es

$$P=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{ck^6Q_0^2}{240} \quad [9.52]$$

El trabajo que supone el manejar los términos superiores del desarrollo [9.9] para el potencial vector [9.8] llega a ser prohibitivo si aquél se extiende más allá de los términos correspondientes al cuadrupolo eléctrico. Otra desventaja del tratamiento presente es que campos físicamente distintos como son los del dipolo magnético y los del cuadrupolo eléctrico deben extraerse una vez separados los términos de [9.9]. Por último, esta técnica es solamente válida

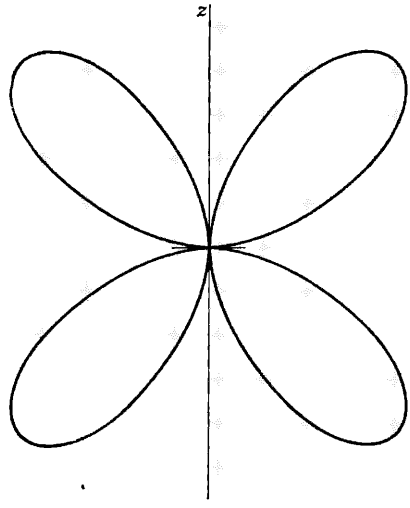


FIG. 9.2. Modelo de radiación cuadrupolar.

en el caso límite de las longitudes de onda largas. En el capítulo 16 se da un desarrollo sistemático de la radiación debida a multipolos. Requiere procedimientos matemáticos muy elaborados, pero lo que se obtiene vale el precio pagado. El tratamiento permite tratar de igual modo todos los órdenes de multipolos; los resultados son válidos para todas las longitudes de onda y los multipolos eléctricos y magnéticos, físicamente diferentes, aparecen separados claramente desde el principio.

9.4. ANTENA LINEAL EXCITADA EN SU CENTRO

a) *La aproximación de corriente sinusoidal*

En ciertos sistemas radiantes la geometría del flujo de corriente es lo suficientemente sencilla para que, si se supone conocida la forma de la corriente, pueda hallarse el valor de la integral [9.3] para el potencial vector de forma relativamente simple. Como ejemplo de sistema de este tipo, consideremos una antena lineal de longitud *d*, con un pequeño corte en su centro entre cuyos lados se aplica la excitación. Tal como se indica en la figura 9.3 se supone que la antena está orientada a lo largo del eje *z* con su corte en el origen de coordenadas. Si se desprecia el amortiguamiento debido a la emisión de radiación y la antena es lo bastante delgada, la corriente es simétrica en los dos brazos de la antena y puede tomarse que la corriente varía sinusoidalmente en el tiem-

po y en el espacio a lo largo de la antena con el número de ondas $k=\omega/c$. La corriente se anula en los extremos de la antena; por tanto, la densidad de corriente puede escribirse:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=I \operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2}-k\,|z|\right)\delta(x)\,\delta(y)\,\boldsymbol{\epsilon}_3 \qquad [9.53]$$

para $|z|<(d/2)$. Las funciones delta nos garantizan que la corriente fluye solamente a lo largo del eje z, I es el valor máximo de la corriente si $kd\geqslant\pi$. El valor de la corriente en el centro es, por tanto, $I_0=I \operatorname{sen}(kd/2)$.

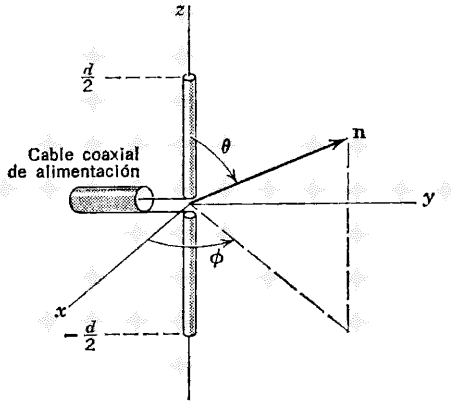


FIG. 9.3. Antena lineal excitada por el centro.

Utilizando la densidad de corriente [9.53], el potencial vector tiene la dirección del eje z, y en la zona de radiación tiene la forma siguiente (obtenida a partir de [9.7]):

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\epsilon}_3\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{Ie^{ikr}}{r}\int_{-(d/2)}^{(d/2)}\operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2}-k\,|z|\right)e^{-ikz\cos\theta}\,dz \qquad [9.54]$$

Por integración directa llegamos al siguiente resultado:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\epsilon}_3\,\frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{Ie^{ikr}}{kr}\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}\right] \qquad [9.55]$$

Como en la zona de radiación la inducción magnética viene dada por $\boldsymbol{B}=ik\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}$, su módulo es $|\boldsymbol{B}|=k \operatorname{sen}\theta|A_3|$. Así que la potencia media temporal radiada por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{I^2}{2\pi c}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right|^2 \qquad [9.56]$$

El vector eléctrico tiene la dirección de la componente de $\boldsymbol{A}$ perpendicular a $\boldsymbol{n}$.

Por tanto, el plano de polarización de la radiación es el que contiene la antena y el radio vector del punto de observación.

La distribución angular [9.56] depende del valor de kd. En el límite de las longitudes de onda largas ($kd \ll 1$), se comprueba con facilidad que se reduce al caso del dipolo [9.28]. Para los valores particulares $kd=\pi$, (2π), que corresponden a una (dos) semilongitudes de onda, de oscilación de la corriente a lo largo de la antena, las distribuciones angulares son

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{I^2}{2\pi c}\begin{cases} \dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}, & kd=\pi \\ \dfrac{4\cos^4\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}, & kd=2\pi \end{cases} \qquad [9.57]$$

Estas distribuciones angulares aparecen representadas en la figura 16.14 del capítulo 16, en donde se comparan con los desarrollos multipolares. La distribución correspondiente a la antena de media onda se ve que es muy análoga al diagrama sencillo del dipolo, sin embargo, la antena de onda completa presenta una distribución considerablemente más aguda.

La distribución correspondiente a la antena de onda completa puede imaginarse que es debida a la superposición coherente de los campos debidos a dos antenas de media onda, una sobre la otra, y excitadas en fase. La intensidad para $\theta=\pi/2$, en que las ondas se suman algebraicamente, es cuatro veces la que corresponde a la antena de media onda. Para ángulos alejados del valor $\theta=\pi/2$, las amplitudes tienden a interferir, dando lugar a un diagrama más estrecho. Mediante agrupaciones apropiadas de antenas básicas, tales como la antena de media onda, y eligiendo las fases de las corrientes también de forma adecuada, es posible obtener, mediante superposición coherente, diagramas de radiación arbitrarios. El lector interesado en tratamientos detallados sobre antenas múltiples debe dirigirse a los libros de ingeniería eléctrica.

b) *La antena como problema de condiciones de contorno*

La hipótesis de que la corriente a lo largo de la antena es sinusoidal, o incluso de cualquier otra forma *conocida*, no está justificada, salvo para conductores infinitamente delgados. En la realidad, una antena de tamaño finito con un tipo dado de excitación constituye un complicado problema de condiciones de contorno. Sin intentar la solución de tales problemas, vamos a dar algunas consideraciones preliminares sobre el planteamiento del problema de condiciones de contorno para antenas rectas de sección circular, de radio a y longitud d, de las cuales la dibujada en la figura 9.3 es un ejemplo. Suponemos que el conductor es perfecto y que tiene un radio lo bastante pequeño, en comparación tanto con la longitud de la antena como con la longitud de onda, para que el flujo de corriente en su superficie tenga únicamente una componente longitudinal (según z) y para que los campos presenten simetría acimutal. Entonces, el potencial vector tendrá sólo componente z. Considerando que la dependencia temporal es armónica con frecuencia ω y la condición de contraste de Lorentz, el potencial escalar y el campo eléctrico vienen dados

en función de A por:

$$\Phi(x)=\frac{-ic}{k}\nabla\cdot A$$
$$E(x)=\frac{ic}{k}[\nabla(\nabla\cdot A)+k^2A] \qquad [9.58]$$

Como $A=\epsilon_3 A_z(x)$, la componente z del campo eléctrico es:

$$E_z(x)=\frac{ic}{k}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)A_z(x)$$

Pero sobre la superficie de la antena perfectamente conductora la componente tangencial de E se anula. Así, pues, dejamos establecido el hecho importante de que *el potencial vector A_z (y también el potencial escalar) son estrictamente sinusoidales sobre la superficie de la antena.*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)A_z(\rho=a, z)=0 \qquad [9.59]$$

Este enunciado es rigurosamente exacto, en contraste con la hipótesis mucho más burda de que la corriente sea sinusoidal.

De [9.3] puede obtenerse una ecuación integral para la intensidad de la corriente. Si llamamos $I(z)$ a la corriente total que fluye en la dirección z, entonces [9.3] nos da para el valor de A_z sobre la superficie de la antena

$$A_z(\rho=a, z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{z_0}^{z_0+d} I(z')K(z-z')\,dz'$$

siendo

$$K(z-z')=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{ik\sqrt{(z-z')^2+4a^2\,\mathrm{sen}^2\beta}}}{\sqrt{(z-z')^2+4a^2\,\mathrm{sen}^2\beta}}\,d\beta \qquad [9.60]$$

la media acimutal de la función de Green e^{-kiR}/R. La condición [9.59] conduce a la ecuación integrodiferencial:

$$0=\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)\int_{z_0}^{z_0+d} I(z')K(z-z')\,dz' \qquad [9.61]$$

Esta ecuación puede considerarse como una diferencial para la integral, o de forma equivalente, se puede integrar [9.59] e igualar a A_z $(\rho=a, z)$. El resultado es la ecuación integral

$$a_1\cos kz+a_2\,\mathrm{sen}\,kz=\int_{z_0}^{z_0+d} I(z')K(z-z')\,dz'$$

Las constantes a_1 y a_2 dependen del método de excitación y de las condiciones de contorno, esto es, que la corriente se anule en los extremos de la antena.

La solución de la ecuación integral no es fácil. Dada la forma de [9.60] resulta claro que debe tenerse cuidado cuando $z \simeq z'$ y que es importante el valor del radio no nulo. Cuando $a \to 0$, puede demostrarse que la corriente es sinusoidal, pero el parámetro en que pueden desarrollarse en serie las correcciones resulta ser el inverso de $\ln(d/a)$. Esto significa que, aun si $d/a = 10^3$ puede haber correcciones entre el 10 y el 15 por 100. Si hay un nodo para la corriente cerca del punto de excitación, tales correcciones pueden cambiar drásticamente la impedancia de entrada de la antena. JONES describe diversos métodos aproximados para la solución de la ecuación [9.61]. HALLÉN realiza una discusión detallada de su versión de la teoría y los resultados del cálculo numérico de la corriente, la resistencia y la reactancia de una antena lineal alimentada en su centro. En las lecturas recomendadas al final del capítulo se citan otras referencias.

9.5. DESARROLLO MULTIPOLAR PARA UNA FUENTE LOCALIZADA O ABERTURA EN UNA GUIA DE ONDAS

Si en una guía de ondas se tiene una fuente en forma de prueba, espira o abertura, cuyas dimensiones son suficientemente pequeñas en comparación con las distancias en las que los campos varían de modo apreciable, su presencia puede aproximarse de modo útil por medio de sus momentos multipolares de menor orden, generalmente dipolos eléctrico y magnético. Fuentes distintas, pero que posean los mismos momentos multipolares de este orden producirán excitaciones sensiblemente iguales en la guía de ondas. Con frecuencia, los momentos dipolares eléctrico o magnético pueden calcularse a partir de los campos estáticos, o incluso estimarse desde un punto de vista geométrico. Aunque la fuente no sea verdaderamente pequeña, el desarrollo multipolar proporciona una visión cualitativa, y frecuentemente también semicuantitativa de sus propiedades.

a) *Fuente de corriente interior a la guía*

Se demostró en la sección 8.11 que las amplitudes $A_\lambda^{(\pm)}$ para la excitación del modo λ-ésimo son proporcionales a la integral:

$$\int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_\lambda^{(\mp)} \, d^3x$$

estando la integral extendida a la región en que $\boldsymbol{J}$ es diferente de cero. Si los campos $\boldsymbol{E}_\lambda^{(\mp)}$ de los modos no varían apreciablemente en la región en que está la fuente, pueden desarrollarse en serie de Taylor alrededor de un origen escogido adecuadamente. Así, pues, prescindiendo de los subíndices y superíndices de $\boldsymbol{E}_\lambda^{(\mp)}$, la integral se escribe

$$\int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \, d^3x = \sum_{\alpha=1}^{3} \int J_\alpha(\boldsymbol{x}) \left[E_\alpha(0) + \sum_{\beta=1}^{3} x_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0) + \ldots \right] d^3x \qquad [9.62]$$

Según las ecuaciones [9.14] y [9.17], vemos que el primer término es:

$$\boldsymbol{E}(0)\cdot\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\,d^3x = -i\omega\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}(0) \qquad [9.63]$$

siendo $\boldsymbol{p}$ el momento dipolar eléctrico de la fuente:

$$\boldsymbol{p}=\frac{i}{\omega}\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\,d^3x$$

Todo esto puede transformarse en la forma más familiar de [9.17] por medio de los pasos indicados en [9.14], suponiendo que pueda despreciarse la integral de superficie en las paredes de la guía de ondas. Para ello hace falta elegir el origen para realizar el desarrollo multipolar de modo que $J_\alpha x_\beta$ se anule en las paredes. Esta advertencia es aplicable a todos los momentos multipolares. El empleo de expresiones que contengan las densidades de carga eléctrica y magnética, ρ y ρ_M, exige que $(x_\alpha J_\beta \pm x_\beta J_\alpha)x_\gamma \ldots x_\nu$ se anulen en las paredes de la guía. Las formas anteriores para el dipolo eléctrico y la expresión [9.34] para el dipolo magnético son correctas tal como están, sin importar la elección de origen.

El segundo término de [9.62] es de la misma forma general que en [9.30] y se maneja del mismo modo. Al igual que en [9.31], el producto $J_\alpha x_\beta$ se escribe como la suma de dos términos, uno simétrico y el otro antisimétrico:

$$\sum_{\alpha,\beta} J_\alpha x_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)=\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}(J_\alpha x_\beta - J_\beta x_\alpha)\left[\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)-\frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha}(0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(J_\alpha x_\beta + J_\beta x_\alpha)\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0) \qquad [9.64]$$

La parte antisimétrica (la primera) se ha escrito de modo que la densidad de momento magnético y el rotacional del campo eléctrico aparezcan claramente visibles. Con la ayuda de la ley de Faraday, $\nabla\times\boldsymbol{E}=i\omega\boldsymbol{B}$, la contribución antisimétrica al segundo miembro de [9.62] puede escribirse:

$$\int\left[\sum_{\alpha,\beta} J_\alpha x_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)\right]_{\text{antisim.}} d^3x = i\omega\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}(0) \qquad [9.65]$$

siendo $\boldsymbol{m}$ el momento dipolar magnético [9.34] de la fuente. Las ecuaciones [9.63] y [9.65] nos dan las contribuciones del momento multipolar de primer orden a la integral [9.62].

Los otros términos del desarrollo [9.62] dan lugar a multipolos de orden superior. Como en la sección 9.3, puede demostrarse que la parte simétrica de [9.64] contiene el *momento cuadrupolar eléctrico de traza nula* [9.41]. La primera etapa para ello consiste en notar que si las integrales de superficie se anulan (véase antes),

$$\int (J_\alpha x_\beta + J_\beta x_\alpha)\,d^3x = -i\omega\int x_\alpha x_\beta \rho(\boldsymbol{x})\,d^3x$$

Entonces, al integrar al volumen de la distribución de corriente, la segunda

doble suma de [9.64] toma la forma:

$$-\frac{i\omega}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)\int \rho(\boldsymbol{x})x_\alpha x_\beta\, d^3x$$

El valor de esta doble suma permanece inalterado al hacer la sustitución $x_\alpha x_\beta \rightarrow (x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta})$ debido a que $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$. Así, la parte simétrica del segundo miembro de [9.62] es:

$$\int\left[\sum_{\alpha,\beta}J_\alpha x_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)\right]_{\text{sim}} d^3x = -\frac{i\omega}{6}\sum_{\alpha,\beta}Q_{\alpha\beta}\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0) \qquad [9.66]$$

Análogamente, una parte antisimétrica del término siguiente de [9.62], que contiene $x_\beta x_\gamma$, da una contribución:

$$\int\left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}J_\alpha x_\alpha x_\gamma\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}(0)\right]_{\substack{\text{antisim.}\\ \text{en }(\alpha,\beta)}} d^3x = \frac{i\omega}{6}\sum_{\alpha,\beta}Q^M_{\alpha\beta}\frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}(0) \qquad [9.67]$$

siendo $Q^M_{\alpha\beta}$ el *momento magnético cuadrupolar* de la fuente, que viene dado por una ecuación análoga a la [9.41] con la densidad de carga magnética en lugar de la densidad de carga eléctrica:

$$\rho^M(\boldsymbol{x}) = -\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2}\nabla\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{J}) \qquad [9.68]$$

Si se combinan las diferentes contribuciones, la expresión [8.140] para la amplitud $A_\lambda^{(\pm)}$ tiene por desarrollo multipolar:

$$A_\lambda^{(\pm)} = i2\omega Z_\lambda\left\{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_\lambda^{(\mp)}(0) - \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_\lambda^{(\mp)}(0) + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{6}\sum\left[Q_{\alpha\beta}\frac{\partial E^{(\mp)}_{\lambda\alpha}}{\partial x_\beta}(0) - Q^M_{\alpha\beta}\frac{\partial B^{(\mp)}_{\lambda\alpha}}{\partial x_\beta}(0)\right] + \ldots\right\} \qquad [9.69]$$

Debe recordarse que los campos de los modos $E_\lambda^{(\pm)}$ están normalizados de acuerdo con [8.125]. El desarrollo resulta más útil si la fuente es tal que la serie converge rápidamente y queda aproximada por sus primeros términos de forma adecuada. Considerando las direcciones de los momentos dipolares (o superiores) eléctrico y magnético de la fuente y los campos de los modos normales puede conseguirse de modo sencillo determinar la posición y orientación de sondas o antenas para excitar de modo preferente ciertos modos. Por ejemplo, puede conseguirse excitar los modos TE, cuyos campos magnéticos son axiales, por medio de una antena dipolar magnética cuyo momento dipolar sea paralelo al eje de la guía. Los modos TM no pueden ser excitados por tal antena, salvo a través de momentos multipolares de orden superior.

b) *Abertura en las paredes laterales de la guía*

Las aberturas en las paredes de una guía de ondas pueden considerarse como fuentes (o sumideros) de energía. En la sección 8.11 se hizo notar que si las paredes de la guía tenían orificios en el volumen que se consideraba que contenía las fuentes, las amplitudes $A_\lambda^{(\pm)}$ venían dadas por la ecuación [8.141] en lugar de [8.140]. Con las hipótesis de que sólo hay una abertura y no hay en realidad densidad de corriente, la amplitud para la excitación del modo λ-ésimo es:

$$A_\lambda^{(\pm)} = -\frac{Z_\lambda}{2}\int_{\text{abertura}} \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{(\mp)})\,da \qquad [9.70]$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el vector unitario normal dirigido hacia *dentro,* y estando extendida la integral a la abertura en las paredes de la guía. Si la abertura es pequeña comparada con la longitud de onda o cualquier otra escala de variación de los campos, el campo $H_\lambda^{(\mp)}$ del modo puede desarrollarse exactamente igual que antes. El término de menor orden, considerando $H_\lambda^{(\mp)}$ constante en toda la abertura, conduce evidentemente a un acoplamiento del tipo dipolar magnético. Los términos siguientes, cuando el campo del modo varía linealmente, dan lugar a acoplamientos dipolar eléctrico y cuadrupolar magnético, exactamente igual que con [9.64] y [9.66], salvo en que los papeles de la interacción eléctrica y la magnética están intercambiados. El resultado es un desarrollo de [9.70] semejante al de [9.69]:

$$A_\lambda^{(\pm)} = i\frac{\omega Z_\lambda}{4}\left[\boldsymbol{p}_{\text{ef}}\cdot\boldsymbol{E}_\lambda^{(\mp)}(0) - \boldsymbol{m}_{\text{ef}}\cdot\boldsymbol{B}_\lambda^{(\mp)}(0) + \ldots\right] \qquad [9.71]$$

en el que los momentos dipolares eléctrico y magnético efectivos son:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{p}_{\text{ef}} &= \epsilon\boldsymbol{n}\int(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{tan}})\,da\\ \boldsymbol{m}_{\text{ef}} &= \frac{2}{i\mu\omega}\int(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{\text{tan}})\,da\end{aligned}\right\} \qquad [9.72]$$

En estas expresiones la integración se extiende a la abertura, el campo eléctrico $\boldsymbol{E}_{\text{tan}}$ es el campo tangencial exacto en el orificio, y los campos de los modos en [9.71] deben calcularse en el centro de la abertura. Los momentos efectivos [9.72] son los dipolos equivalentes cuyos campos [9.18] y [9.35]-[9.36] representan los campos de radiación de una abertura pequeña en una pantalla plana perfectamente conductora (véase el problema 9.15). La comparación entre [9.71] y [9.69] demuestra que los momentos dipolares [9.72] para producir una amplitud dada, tienen sólo la mitad de efectividad que un dipolo real situado dentro de la guía. Puede imaginarse que esto es debido a que, en cierto modo, los dipolos equivalentes a una abertura están medio dentro y medio fuera de la guía.

c) *Abertura pequeña en un diafragma transversal*

El tema de la reflexión y transmisión por aberturas en un diafragma transversal se ha tratado en las secciones 8.12 y 8.13. Sin embargo, para un orificio pequeño resulta útil disponer de una descripción en función de los momentos multipolares efectivos de la abertura, lo mismo que para orificios en las paredes de la guía. Los coeficientes de reflexión y transmisión para un diafragma transversal están dados por [8.144] y [8.145]. Utilizando [8.31], la ecuación [8.144], que también representa a la [8.145] cuando $\lambda = 1$, se convierte en:

$$A_\lambda^{(+)} = A_\lambda^{(-)} = Z_\lambda \int (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{E}_{\tan}) \cdot \boldsymbol{H}_\lambda \, da \qquad [9.73]$$

Con el mismo espíritu que antes, se desarrolla en serie de Taylor alrededor de un origen apropiado en la pequeña abertura el campo magnético transversal $\boldsymbol{H}_\lambda$. La estructura de [9.73] es idéntica a la de [9.70] y los diferentes términos son los mismos. Los multipolos de orden más bajo dan las contribuciones:

$$A_\lambda^{(+)} = A_\lambda^{(-)} = i \frac{\omega Z_\lambda}{2} [\boldsymbol{p}_{\text{ef}}^{(\pm)} \cdot \boldsymbol{E}_\lambda^{(\mp)}(0) - \boldsymbol{m}_{\text{ef}}^{(\pm)} \cdot \boldsymbol{B}_\lambda^{(\mp)}(0) + \ldots \qquad [9.74]$$

Para $\lambda = 1$, esta ecuación da la amplitud de transmisión, $T = 1 + R$. La ecuación [9.74] tiene exactamente la misma forma que la [9.69], que era aplicable a una fuente de corriente localizada en el interior de la guía. Los momentos dipolares efectivos $\boldsymbol{p}_{\text{ef}}^{(\pm)}$ y $\boldsymbol{m}_{\text{ef}}^{(\pm)}$ vienen dados por [9.72] haciendo $\boldsymbol{n} = \pm \boldsymbol{e}_3$, y la integración se realiza sobre la abertura con z constante. La elección de los superíndices en [9.74] no tiene importancia con tal de que se tome un conjunto coherente. Como se discute más adelante, los superíndices $(\pm)$ en los momentos dipolares efectivos corresponden a ver la abertura desde $z < 0$, o $z > 0$.

d) *Momentos dipolares efectivos de las aberturas*

En un primer encuentro, los momentos dipolares efectivos [9.72] resultan algo misteriosos. Como se ha mencionado ya, tienen un significado preciso en función de las partes dipolares eléctrica y magnética del desarrollo multipolar de los campos radiados a través de una abertura practicada en una pantalla plana perfectamente conductora (problema 9.15). Para aberturas pequeñas pueden relacionarse también con las soluciones de los problemas de condiciones de contorno estáticas o cuasi estáticas apropiadas. Ya hemos discutido este tipo de problemas (secciones 3.13 y 5.13) y más adelante adecuaremos los resultados.

Si una abertura es muy pequeña comparada con la distancia en la cual los campos cambian de modo apreciable, el problema de condiciones de contorno puede sustituirse aproximadamente por otro en el que los campos «lejos de la abertura» (tomando como unidad las dimensiones de ésta) sean los que existirían si la abertura no estuviese presente. Salvo en el caso de aberturas muy largas, resultará suficientemente exacto considerar que la superficie es plana y que los campos «asintóticos» son los mismos en todas direcciones al alejarse de la abertura. Entonces, el problema de condiciones de contorno para un orificio en una superficie perfectamente conductora queda determinado por el

campo eléctrico *normal* $\boldsymbol{E}_0$ y el campo magnético *tangencial* $\boldsymbol{B}_0$ que existirían en ausencia de la abertura. A su vez, los campos $\boldsymbol{E}_0$ y $\boldsymbol{B}_0$ son el resultado de algún otro problema de condiciones de contorno, por ejemplo, el de propagación en una guía de ondas o el de reflexión de una onda plana por una pantalla. No obstante, para los actuales propósitos, pueden considerarse como datos. Para la aproximación de menor orden, sus dependencias con el tiempo pueden despreciarse, supuesto que el momento dipolar eléctrico esté relacionado con $\boldsymbol{E}_0$ y el momento magnético con $\boldsymbol{B}_0$ (véase, no obstante, el problema 9.9).

La forma exacta de los campos alrededor del orificio depende de la de éste, pero pueden hacerse algunas observaciones cualitativas sin más que examinar el aspecto general de las líneas de fuerza. En el exterior de una esfera que encierre la abertura, los campos pueden representarse por un desarrollo multipolar. Los primeros términos serán los campos dipolares. La figura 9.4 presenta el comportamiento cualitativo. El bucle de campo magnético que sobresale por encima del plano a la izquierda tiene la apariencia de una de las líneas de fuerza de un dipolo magnético cuyo momento esté dirigido en sentido opuesto a $\boldsymbol{B}_0$, como se ha indicado mediante el vector momento $\boldsymbol{m}^{(+)}$ dibujado en la parte inferior. El campo magnético por debajo del plano puede interpretarse como la superposición del $\boldsymbol{B}_0$ no perturbado y un campo dipolar opuesto (que se ha dibujado de trazos en la figura) cuyo momento está orientado paralelamente a $\boldsymbol{B}_0$ y con su mismo sentido (la flecha designada como $\boldsymbol{m}^{(-)}$ en la parte inferior). Análogamente, las líneas del campo eléctrico por encima del plano parecen estar originadas por un momento dipolar vertical $\boldsymbol{p}^{(+)}$ dirigido según $\boldsymbol{E}_0$, en tanto que por debajo del plano el campo tiene el aspecto de superponer el campo normal no perturbado $\boldsymbol{E}_0$ con el de un dipolo $\boldsymbol{p}^{(-)}$ dirigido en sentido opuesto a $\boldsymbol{E}_0$. Naturalmente, el empleo de los campos dipolares efectivos está limitado a regiones a cierta distancia de la abertura. En la misma abertura los campos no mantienen ninguna semejanza con los campos dipolares. Sin embargo, la aproximación dipolar es cualitativamente útil en todos los puntos, y de hecho, para estimar los acoplamientos entre aberturas pequeñas todo lo que se necesita son los momentos efectivos.

La discusión cualitativa anterior tiene un defecto serio. Mientras que resulta correcto que el momento dipolar *eléctrico* está dirigido siempre paralela o antiparalelamente a $\boldsymbol{E}_0$ y, por consiguiente, es normal a la abertura, el momento dipolar *magnético* no es necesariamente paralelo o antiparalelo a $\boldsymbol{B}_0$. En el plano tangente hay muchas direcciones, y la dirección de $\boldsymbol{m}_{\text{ef}}$ está determinada tanto por la de $\boldsymbol{B}_0$ como por la orientación relativa de la abertura. Como evidentemente los momentos efectivos son proporcionales a la intensidad del campo, resulta apropiado hablar de *polarizabilidades eléctrica y magnética* asociadas a la abertura. Los momentos dipolares pueden escribirse:

$$\boldsymbol{p}_{\text{ef}} = \gamma^E \boldsymbol{E}_0$$

$$(\boldsymbol{m}_{\text{ef}})_\alpha = \sum_\beta \gamma^{\boldsymbol{M}}_{\alpha\beta} (\boldsymbol{B}_0)_\beta \qquad [9.75]$$

siendo γ^E la polarizabilidad eléctrica escalar y $\gamma^{\boldsymbol{M}}_{\alpha\beta}$ el tensor 2×2 de polarizabilidad magnética. Escogiendo los ejes principales de la abertura puede diagonalizarse el tensor magnético. Así, pues, habrá tres polarizabilidades (una eléctrica y dos magnéticas) para caracterizar una abertura arbitraria pequeña. Debe recordarse que los signos de las γ en [9.75] dependen del lado de la superficie

desde el que se ve el dipolo, como se indica en la figura 9.4. Si existen campos en ambos lados de la superficie, deben modificarse las expresiones [9.75]. Por ejemplo, si por encima de la superficie existe un campo $\boldsymbol{E}_1$ dirigido verticalmente además del $\boldsymbol{E}_0$ que hay por debajo (parte derecha de la figura 9.4), la $\boldsymbol{E}_0$ de la fórmula [9.75] debe reemplazarse por $(\boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{E}_1)$. Por superposición lineal pueden desarrollarse otras situaciones partiendo de [9.75].

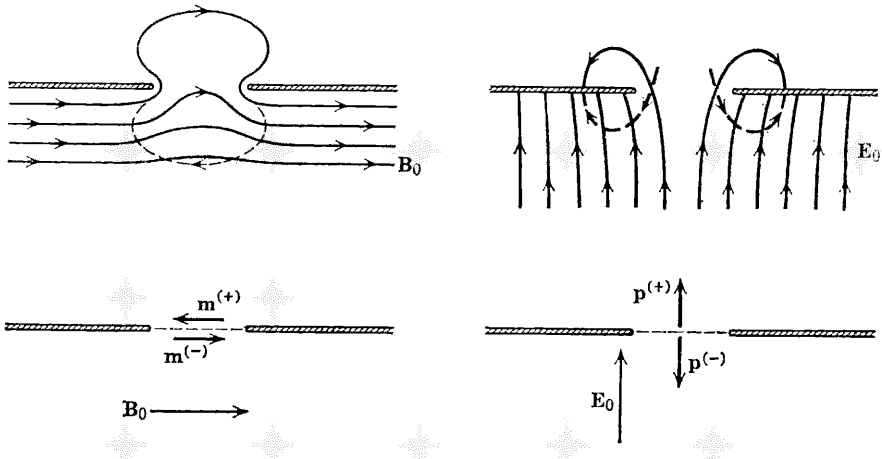


FIG. 9.4. Distorsión del campo magnético tangencial (a la izquierda) y del campo eléctrico normal (a la derecha) producida por una abertura pequeña en una superficie perfectamente conductora. Debajo se indican los momentos dipolares efectivos tal como se ven desde las partes de arriba y de abajo de la superficie.

Las polarizabilidades γ^E y $\gamma^M_{\alpha\beta}$ son proporcionales a una longitud elevada al cubo. Por tanto, puede esperarse que si d representa una dimensión característica de la abertura, las polarizabilidades sean proporcionales a d^3 con un coeficiente numérico apropiado. Puede advertirse que la expresión [9.72] para $\boldsymbol{p}_{ef}$ es de la forma que conduce a dicho resultado, ya que $\boldsymbol{E}_{tan}$ es proporcional a E_0 y la integral bidimensional nos dará el producto de $\boldsymbol{E}_0$ por el cubo de una dimensión lineal característica de la abertura. Además, las propiedades vectoriales de $\boldsymbol{p}_{ef}$ en [9.72] se corresponden con [9.75]. Por otra parte, resulta menos claro que la expresión para $\boldsymbol{m}_{ef}$ en las [9.72] sea de la forma apropiada, aun cuando sea correcta dimensionalmente. Realizando unas integraciones por partes y utilizando las ecuaciones de Maxwell puede ponerse en la forma equivalente, y más satisfactoria,

$$\boldsymbol{m}_{ef} = \frac{2}{\mu} \int \boldsymbol{x}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B})\, da \qquad [9.76]$$

en la que $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}$ es la componente normal exacta de $\boldsymbol{B}$ en la abertura y la integración debe extenderse al plano de la misma. Ahora resulta evidente que la relación entre $\boldsymbol{B}_0$ y $\boldsymbol{m}_{ef}$ es de la forma general descrita por [9.75]. Para un orificio circular de radio R pueden tomarse los momentos dipolares efectivos de las soluciones estáticas de las secciones 3.13 y 5.13. Los resultados son:

$$\boldsymbol{p}_{ef} = -\frac{4\epsilon_0 R^3}{3} \boldsymbol{E}_0; \qquad \boldsymbol{m}_{ef} = \frac{8R^3}{3\mu_0} \boldsymbol{B}_0 \qquad [9.77]$$

siendo los signos los apropiados para el caso de que las aberturas se miren desde el lado de la superficie en el que $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son distintos de cero, como puede verificarse en la figura 9.4. Por consiguiente, las polarizabilidades eléctrica y magnética son:

$$\gamma^E = -\frac{4\epsilon_0 R^3}{3}; \qquad \gamma^M_{\alpha\beta} = \frac{8R^3}{3\mu_0}\delta_{\alpha\beta} \tag{9.78}$$

El uso de momentos dipolares efectivos para describir las propiedades electromagnéticas de pequeños agujeros se remonta hasta LORD RAYLEIGH *. La teoría general fue desarrollada por H. A. BETHE ** y se ha aplicado con frutos a problemas de guías de ondas y de difracción. Para las aplicaciones prácticas resulta significativo que los momentos dipolares efectivos de aberturas de forma arbitraria puedan determinarse experimentalmente mediante medidas en la cuba electrolítica ***.

Se deja para varios problemas al final del capítulo el considerar ejemplos del empleo de multipolos para describir la excitación y dispersión en guías de ondas y la difracción. En las lecturas recomendadas puede encontrarse material adicional.

9.6. DISPERSION PARA LONGITUDES DE ONDA LARGAS

a) *Dispersión por dipolos inducidos en objetos pequeños*

La dispersión de ondas electromagnéticas por sistemas cuyas dimensiones individuales son pequeñas comparadas con la longitud de onda ocurre con frecuencia y resulta importante. En tales interacciones es conveniente pensar que los campos incidentes (radiación) inducen multipolos eléctricos y magnéticos que oscilan en una relación de fase definida con la onda incidente y radian energía en direcciones diferentes a la de incidencia. La forma exacta de la distribución angular de la energía radiada está determinada por la *superposición coherente* de multipolos inducidos por los campos incidentes, y dependerá en general del estado de polarización de la onda incidente. Si la longitud de onda de la radiación es grande comparada con el tamaño del objeto dispersante, sólo tendrán importancia los multipolos más bajos, normalmente dipolos eléctrico y magnético. Además, en estas circunstancias, los dipolos inducidos pueden calcularse a partir de los problemas de condiciones de contorno estáticos o cuasi estáticos, exactamente igual que para las aberturas pequeñas de la sección anterior.

La situación básica acostumbrada es el caso de una onda plana monocromática que incide sobre un obstáculo. Por simplicidad se suele considerar que el medio que lo rodea es el vacío. Si la dirección de incidencia se describe mediante el vector unitario $\boldsymbol{n}_0$, y el vector de polarización incidente es $\boldsymbol{\epsilon}_0$, los campos incidentes son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{\text{inc}} &= \epsilon_0 E_0 e^{ki\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{B}_{\text{inc}} &= \frac{1}{c}\boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{E}_{\text{inc}} \end{aligned} \tag{9.79}$$

* LORD RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, XLIV, **28** (1897); reimpreso en sus *Scientific Papers*, vol. IV, pág. 305.

** H. A. BETHE, *Phys. Rev.*, **66**, 163 (1944).

*** S. B. COHN, *Proc. I. R. E.*, **39**, 1416 (1951); **40**, 1069 (1952).

siendo $k=\omega/c$ y sobreentendiendo la dependencia temporal $e^{-i\omega t}$. Estos campos inducen momentos dipolares $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{m}$ en el objeto dispersante y estos dipolos radian energía en todas direcciones, tal como se describía en las secciones 9.2 y 9.3. Lejos del objeto, los campos dispersados (radiados), de acuerdo con [9.19] y [9.36], serán:

$$\boldsymbol{E}_{\text{dis}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}k^2\frac{e^{ikr}}{r}[(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{n}-\frac{1}{c}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})]$$
$$\boldsymbol{B}_{\text{dis}}=\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{\text{dis}} \qquad [9.80]$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el vector unitario en la dirección de observación y r la distancia al objeto. La potencia radiada con polarización $\boldsymbol{\epsilon}$ y en la dirección $\boldsymbol{n}$, por unidad de ángulo sólido y por unidad de flujo incidente (potencia por unidad de área) en la dirección $\boldsymbol{n}_0$ y con polarización $\boldsymbol{\epsilon}_0$, es una magnitud cuyas dimensiones son de área por unidad de ángulo sólido. Se denomina *sección eficaz diferencial de dispersión* *:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\epsilon};\boldsymbol{n}_0,\boldsymbol{\epsilon}_0)=\frac{\frac{r^2}{2}|\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{E}_{\text{dis}}|^2}{\frac{1}{2}|\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\boldsymbol{E}_{\text{inc}}|^2} \qquad [9.81]$$

Resulta importante para manejar correctamente el caso de polarización circular que aparezca el complejo conjugado de los vectores polarización, como ya se ha mencionado en la sección 7.2. De acuerdo con [9.80] y [9.79], la sección diferencial puede escribirse:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\epsilon};\boldsymbol{n}_0,\boldsymbol{\epsilon}_0)=\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2}\frac{k^4}{E_0^2}\left|\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{p}+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\epsilon}^*)\cdot\frac{\boldsymbol{m}}{c}\right|^2 \qquad [9.82]$$

La dependencia de la sección respecto a $\boldsymbol{n}_0$ y $\boldsymbol{\epsilon}_0$ está contenida implícitamente en los momentos dipolares $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{m}$. La variación con el número de ondas de la sección diferencial de dispersión (y de la total) como k^4 (o con la longitud de onda como λ^{-4}) constituye una característica casi universal de la dispersión de radiación de longitud de onda larga por cualquier sistema finito. Esta dependencia con la frecuencia se conoce con el nombre de *ley de Rayleigh*. Sólo si se anulan ambos momentos dipolares estáticos deja de obedecer la dispersión a la ley de Rayleigh; la dispersión tiene lugar entonces vía los multipolos cuadrupolar o superiores (o por momentos dipolares variables con la frecuencia) y varía como ω^6 o más rápidamente. Algunas veces la dispersión dipolar se denomina *dispersión de Rayleigh*, pero generalmente este término se reserva para la dispersión *incoherente* por una colección de dipolos dispersadores.

a) *Dispersión por una pequeña esfera dieléctrica*

Como un primer ejemplo, muy sencillo, de dispersión dipolar vamos a considerar el caso de una pequeña esfera dieléctrica de radio a, con $\mu=\mu_0$ y una constante dieléctrica uniforme e isótropa $\epsilon(\omega)$. Según la sección 4.4, y en par-

* En la bibliografía de ingeniería se emplea el término sección eficaz biestática para $4\pi(d\sigma/d\Omega)$.

ticular la ecuación [4.56], se encuentra que el momento dipolar vale:

$$\boldsymbol{p}=4\pi\epsilon_0\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right)a^3\boldsymbol{E}_{\text{inc}} \qquad [9.83]$$

No hay momento dipolar magnético. La sección eficaz diferencial de dispersión es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=k^4a^6\left|\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right|^2|\boldsymbol{\epsilon}^*\boldsymbol{\epsilon}_0|^2 \qquad [9.84]$$

La dependencia con la polarización en [9.84] es típica de la dispersión dipolar puramente eléctrica. La radiación dispersada está polarizada linealmente en el plano definido por la dirección del momento dipolar ($\boldsymbol{\epsilon}_0$) y el vector unitario $\boldsymbol{n}$.

Normalmente la radiación incidente no está polarizada. Resulta, por tanto, de interés preguntarnos cuál será la distribución angular de la radiación dispersada con un estado definido de polarización lineal. Para ello, se toma la media de la sección [9.84] para las posibles polarizaciones iniciales $\boldsymbol{\epsilon}_0$ con una elección dada para $\boldsymbol{\epsilon}$. La figura 9. muestra un posible conjunto de vectores

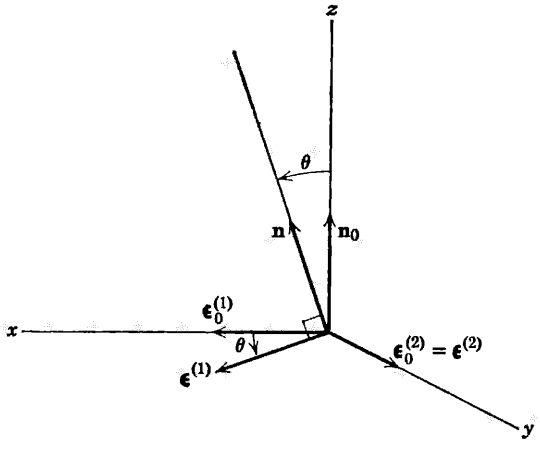


FIG. 9.5. Vectores polarización y propagación para radiación incidente y dispersada.

polarización. El plano de dispersión está definido por los vectores $\boldsymbol{n}_0$ y $\boldsymbol{n}$. Los vectores polarización $\boldsymbol{\epsilon}_0^{(1)}$ y $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$ están en este plano, en tanto que $\boldsymbol{\epsilon}_0^{(2)}=\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$ es perpendicular a él. Las secciones diferenciales para la dispersión con polarizaciones $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$, promediadas sobre las polarizaciones iniciales, como se demuestra fácilmente, son:

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}=\frac{k^4a^6}{2}\left|\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right|^2\cos^2\theta$$
$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}=\frac{k^4a^6}{2}\left|\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right|^2 \qquad [9.85]$$

en las que los signos $\parallel$ y $\perp$ indican respectivamente que la polarización es paralela o perpendicular al plano de dispersión. La *polarización* $\Pi(\theta)$ de la radiación dispersada se define como:

$$\Pi(\theta)=\frac{\dfrac{d\sigma_\perp}{d\Omega}-\dfrac{d\sigma_\parallel}{d\Omega}}{\dfrac{d\sigma_\perp}{d\Omega}+\dfrac{d\sigma_\parallel}{d\Omega}} \qquad [9.86]$$

Según [9.85] encontramos que para la dispersión (dipolar eléctrica) por una pequeña esfera dieléctrica es:

$$\Pi(\theta)=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1+\cos^2\theta} \qquad [9.87]$$

La sección eficaz diferencial, sumada para toda la polarización dispersada, es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=k^4a^6\left|\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right|^2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \qquad [9.88]$$

y la *sección eficaz total de dispersión* es:

$$\sigma=\int\frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega=\frac{8\pi}{3}k^4a^6\left|\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right|^2 \qquad [9.89]$$

En la figura 9.6 se han dibujado la sección eficaz diferencial [9.88] y la polarización de la radiación dispersada [9.87] como funciones del $\cos\theta$. La polari-

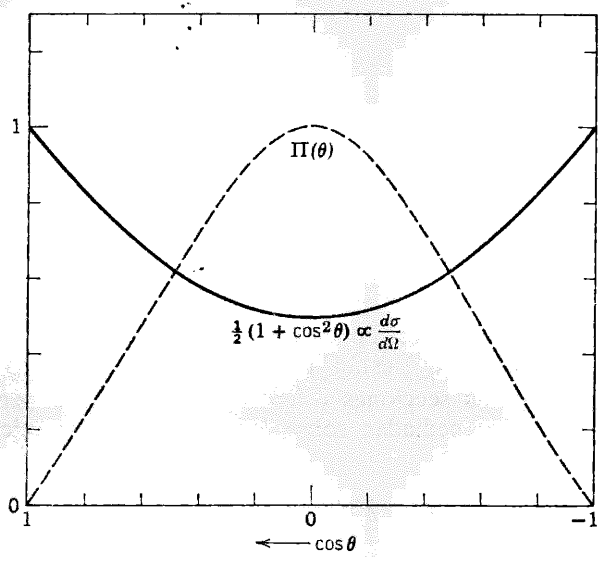


FIG. 9.6. Sección eficaz diferencial de dispersión (9.88) y la polarización de la radiación dispersada (9.87) por una esfera dieléctrica pequeña (aproximación dipolar).

zación tiene su máximo para $\theta=\pi/2$. Para este ángulo la radiación dispersada está polarizada linealmente en un 100 por 100 perpendicularmente al plano en que tiene lugar la dispersión, para un margen de ángulos apreciable a ambos lados de $\theta=\pi/2$ está fuertemente polarizada. Las características de polarización del cielo azul constituyen un ejemplo de este fenómeno, y de hecho fue el motivo que condujo a RAYLEIGH a considerar el problema por primera vez. El lector mismo puede verificar el comportamiento general con ayuda de una lámina polaroide o con gafas de sol apropiadas en un día soleado.

c) *Dispersión por una pequeña esfera perfectamente conductora*

La dispersión por una pequeña esfera de radio a y perfectamente conductora constituye un ejemplo que presenta aspectos interesantes referentes a la coherencia entre multipolos diferentes. En la sección 2.5 se demostró que el momento dipolar eléctrico de una esfera era:

$$\boldsymbol{p}=4\pi\epsilon_0 a^3\boldsymbol{E}_{\text{inc}} \qquad [9.90]$$

La esfera también posee momento magnético. La condición de contorno para una esfera perfectamente conductora en un campo magnético es que se anule la componente normal de $\boldsymbol{B}$ para $r=a$. Bien sea por analogía con la esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme (sección 4.4) con $\epsilon=0$, o con la esfera magnéticamente permeable (sección 5.11) con $\mu=0$, o mediante un cálculo directo sencillo, se encuentra que el momento magnético de la pequeña esfera es:

$$\boldsymbol{m}=-\frac{2\pi a^3}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{\text{inc}} \qquad [9.91]$$

Cuando la onda incidente esté polarizada linealmente los dos dipolos son perpendiculares mutuamente y a la dirección de incidencia.

La sección eficaz diferencial [9.82] es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\epsilon};\boldsymbol{n}_0,\boldsymbol{\epsilon}_0)=k^4a^6\left|\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0-\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\epsilon}^*)\cdot(\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{\epsilon}_0)\right|^2 \qquad [9.92]$$

Las propiedades de polarización y la distribución angular de la radiación dispersada son más complicadas que para la esfera dieléctrica. Cuando la radiación incidente no esté polarizada, las secciones eficaces para polarización de la radiación paralela y perpendicular al plano de dispersión, análogas a las ecuaciones [9.85], son:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}&=\frac{k^4a^6}{2}\left|\cos\theta-\frac{1}{2}\right|^2\\ \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}&=\frac{k^4a^6}{2}\left|1-\frac{1}{2}\cos\theta\right|^2\end{aligned} \qquad [9.93]$$

Sumando para ambos estados de polarización, la sección eficaz diferencial puede escribirse:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=k^4a^6\left[\frac{5}{8}(1+\cos^2\theta)-\cos\theta\right] \qquad [9.94]$$

mientras que la polarización [9.86] es:

$$\Pi(\theta)=\frac{3\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{5(1+\cos\theta)-8\cos\theta} \qquad [9.95]$$

En la figura 9.7 se han dibujado la sección eficaz y la polarización frente a $\cos\theta$. La sección eficaz tiene un gran pico en la región que corresponde a retrodispersión debido a la interferencia dipolo eléctrico-dipolo magnético. La polarización alcanza el valor $\Pi=+1$ para $\theta=60°$ y es positiva en todo el intervalo de variación del ángulo. Por consiguiente, la polarización tiende a ser semejante a la de una pequeña esfera dieléctrica, como se indica en la figura 9.6, aun cuando las distribuciones angulares sean muy diferentes. La sección total de dispersión es $\sigma=10\pi k^4a^6/3$, del mismo orden de magnitud que la de una esfera dieléctrica [9.89] si $(\epsilon-\epsilon_0)$ no es pequeño.

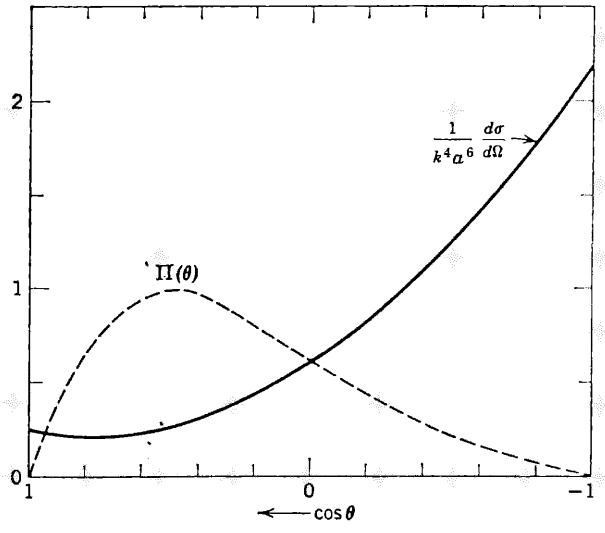


FIG. 9.7. Sección eficaz diferencial de dispersión [9.94] y polarización de la radiación dispersada [9.95] por una esfera perfectamente conductora pequeña (aproximación de dipolo eléctrico y magnético).

La dispersión dipolar, cuya dependencia con la frecuencia es del tipo ω^4, puede considerarse como la aproximación de menor orden de un desarrollo en términos en kd, siendo d una longitud característica de las dimensiones del objeto dispersante. En el dominio en que $kd\sim 1$, deben considerarse otros multipolos además de los de menor orden. Entonces, el estudio se realiza mejor utilizando un desarrollo sistemático en campos multipolares esféricos. Esto se tratará en el capítulo 16, donde se examina desde este punto de vista el problema de la dispersión por una esfera conductora. Cuando $kd\gg 1$, pueden emplearse métodos de aproximación de diferentes clases, como se presenta en la sección 13 de este capítulo. A la dispersión de luz por partículas esféricas con valores arbitrarios de μ, ϵ y σ, se dedican libros completos. Se dan algunas referencias a esta bibliografía al final del capítulo.

d) *Colección de objetos dispersantes*

Como nota final señalemos que si el sistema dispersante consiste en un cierto número de pequeños objetos dispersantes, situados a distancias fijas, cada uno de ellos genera una amplitud de la forma de [9.80]. La sección de dispersión resulta de la superposición coherente de las amplitudes individuales. Como los dipolos inducidos son proporcionales a los campos incidentes, calculados en la posición $\boldsymbol{x}_j$ del objeto j, sus momentos tendrán un factor de fase, $e^{-ik\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{x}_j}$. Además, si el punto de observación está alejado de todo el sistema dispersante, la ecuación [9.7] nos dice que los campos [9.80] del objeto j tendrán un factor de fase $e^{-ik\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_j}$. Para un sistema tal la generalización de [9.82] es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2}\frac{k^4}{E_0^2}\left|\sum_j\left[\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{p}_j+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\epsilon}^*)\frac{\boldsymbol{m}_j}{c}\right]e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_j}\right|^2 \qquad [9.96]$$

siendo $\boldsymbol{q}=k\boldsymbol{n}_0-k\boldsymbol{n}$ el cambio del vector de onda durante la dispersión.

La presencia de los factores de fase $e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_j}$ en [9.96] significa que, excepto en la dirección hacia adelante, en la que $\boldsymbol{q}=0$, la dispersión depende mucho de la distribución exacta de los objetos dispersantes en el espacio. Para describir el comportamiento general puede suponerse que todos los objetos dispersantes son idénticos. Entonces, la sección transversal es el producto de la sección para un solo objeto multiplicada por un factor de estructura *,

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{q})=\left|\sum_j e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_j}\right|^2 \qquad [9.97]$$

Expresado como producto del factor por su complejo conjugado, $\mathcal{F}(\boldsymbol{q})$ es:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{q})=\sum_j\sum_{j'}e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_{j'})}$$

Si están distribuidos al azar, puede demostrarse que los términos con $j\neq j'$ dan una contribución despreciable. Sólo son significativos los términos en que $j=j'$. Entonces $\mathcal{F}(\boldsymbol{q})=N$, el número total de objetos dispersantes, y se dice que la dispersión consiste en una *superposición incoherente* de las contribuciones individuales. Por otra parte, si son muy numerosos y están distribuidos uniformemente en el espacio, el factor de estructura se anula efectivamente en todos los puntos excepto en la dirección hacia adelante. Por consiguiente, no hay dispersión cuando tenemos una red muy grande y regular de objetos; ejemplos de esto son los monocristales de sólidos transparentes, como el cuarzo y la sal gema. La pequeña cantidad de dispersión que tiene lugar es debida a las vibraciones térmicas que separan la red de la ordenación perfecta, o por impurezas, etc. Un ejemplo explícito, que también suministra la evidencia de que las observaciones anteriores se limitan a la región de longitudes de onda grandes, es el de una red cúbica de centros dispersantes. Se sabe que el factor

* No consideramos aquí efectos de dispersión múltiple, esto es, suponemos que el recorrido libre medio para la dispersión es grande comparado con las dimensiones de la red de dispersión.

de estructura es:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{q}) = N^2 \left[\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{N_1 q_1 a}{2}\right)}{N_1^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{q_1 a}{2}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{N_2 q_2 a}{2}\right)}{N_2^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{q_2 a}{2}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{N_3 q_3 a}{2}\right)}{N_3^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{q_3 a}{2}\right)} \right] \qquad [9.98]$$

siendo a la distancia de red, N_1, N_2, N_3 el número de puntos de la red a lo largo de los tres ejes, $N = N_1 N_2 N_3$ el número total de objetos y q_1, q_2, q_3 las componentes de $\boldsymbol{q}$ según los ejes. La ecuación [9.98] presenta picos cuando se satisface la condición de Bragg, $q_i a = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, si las longitudes de onda son cortas ($ka > \pi$). Esta es la situación usual en la difracción de rayos X. Pero cuando la longitud de onda es grande sólo aparece el pico para $q_i a = 0$ por ser $(q_i a)_{\text{máx}} = 2ka \ll 1$. En este límite $\mathcal{F}(\boldsymbol{q})$ es el producto de tres factores de la forma $[(\operatorname{sen} x_i)/x_i]^2$, siendo $x_i = N_i q_i a/2$. La dispersión está, pues, confinada a la región $q_i \leqslant 2\pi/N_i a$, que corresponde a ángulos menores que λ/L, siendo λ la longitud de onda y L una dimensión característica global de la red dispersante.

9.7. TEORIA DE PERTURBACIONES DE LA DISPERSION, EXPLICACION DE RAYLEIGH DEL AZUL DEL CIELO *, DISPERSION EN GASES Y LIQUIDOS

a) *Teoría general*

Si el medio a través del cual está pasando una onda electromagnética es de propiedades uniformes, la onda se propaga sin perturbaciones y no se desvía. Sin embargo, si hay variaciones espaciales (o temporales) de las propiedades electromagnéticas, la onda resulta dispersada. Parte de la energía es desviada de su curso original. Cuando las variaciones en las propiedades son de valor pequeño, la dispersión es ligera y pueden emplearse métodos de perturbaciones. Imaginemos como situación de referencia la correspondiente a un medio uniforme e isótropo de constante dieléctrica ϵ y permeabilidad μ. Por el momento se supone que ϵ y μ son independientes de la frecuencia, aunque si se supone que la dependencia con el tiempo es armónica esta restricción puede eliminarse en la forma conocida. Se supone que el medio, bajo la acción de algún agente perturbador, cambia su respuesta a los campos aplicados ligeramente, de modo que en ciertas regiones del espacio $\boldsymbol{D} \neq \epsilon \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B} \neq \mu \boldsymbol{H}$. Estas desviaciones pueden ser funciones del tiempo y de la posición. Empezando por

* Aunque debe asociarse sin duda alguna el nombre de RAYLEIGH a la explicación cuantitativa del azul del cielo, resulta de cierto interés histórico que LEONARDO DE VINCI comprendió el fenómeno básico alrededor del año 1500. En particular, sus experimentos sobre la dispersión de la luz del sol por el humo observado contra un fondo oscuro (citados como puntos 300-302, pág. 237 y ss. en el vol. I de JEAN PAUL RICHTER, *The Literary Works of Leonardo da Vinci*, Phaidon, Londres, 1970[3]); (también en una reimpresión de Dover titulada *The notebooks of Leonardo da Vinci*, vol. I, págs. 161 ss.) anticiparon en 350 años las notables observaciones semejantes de TYNDALL (J. TYNDALL, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **160**, 333 (1870)).

las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0; \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0; \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad [9.99]$$

es cuestión inmediata llegar a una ecuación de ondas para $\boldsymbol{D}$:

$$\nabla^2 \boldsymbol{D} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2} = -\nabla \times \nabla \times (\boldsymbol{D} - \epsilon \boldsymbol{E}) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (\boldsymbol{B} - \mu \boldsymbol{H}) \qquad [9.100]$$

En esta ecuación aún no se han hecho aproximaciones, aunque más tarde se tratará en cierto sentido el segundo miembro como pequeño *.

Si se supone conocido el segundo miembro de [9.100], la ecuación tiene la forma de la [6.54], cuya solución es la forma retardada [6.69]. Naturalmente, en general el segundo miembro es desconocido y [6.69] puede considerarse como una ecuación integral más que como una solución. No obstante, esta formulación integral del problema constituye un punto de partida fructífero para las aproximaciones. Resulta conveniente particularizar de modo que los campos sin perturbar varíen armónicamente con el tiempo a la frecuencia ω y suponer que las desviaciones $(\boldsymbol{D} - \epsilon \boldsymbol{E})$ y $(\boldsymbol{B} - \mu \boldsymbol{H})$ también presentan esta variación con el tiempo. Esto impone ciertas limitaciones sobre el tipo de problema perturbado que puede ser descrito mediante este formalismo, pero evita que la discusión se haga demasiado complicada. Si se admite la dependencia $e^{-i\omega t}$, la [9.100] se convierten en:

$$(\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{D} = -\nabla \times \nabla \times (\boldsymbol{D} - \epsilon \boldsymbol{E}) - i\epsilon\omega \nabla \times (\boldsymbol{B} - \mu \boldsymbol{H}) \qquad [9.101]$$

siendo $k^2 = \mu\epsilon\omega^2$ y μ y ϵ son los valores correspondientes a la frecuencia ω. La solución del problema sin perturbaciones, cuando se hace igual a cero el segundo miembro de [9.101], se denominará $\boldsymbol{D}^{(0)}(\boldsymbol{x})$. A partir de [6.67] puede obtenerse una solución formal de [9.101], si se considera conocido el segundo miembro. Así, pues,

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{(0)} + \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|} \left\{ \begin{array}{l} \nabla' \times \nabla' \times (\boldsymbol{E} - \epsilon \boldsymbol{D}) + \\ + i\epsilon\omega \nabla' \times (\boldsymbol{B} - \mu \boldsymbol{H}) \end{array} \right\} \qquad [9.102]$$

Si la situación física corresponde a la dispersión, cuando el integrando de [9.102] está limitado a cierta región finita del espacio y $\boldsymbol{D}^{(0)}$ describe una onda incidente en cierta dirección, el campo lejos de la región en que tiene lugar la dispersión puede escribirse en la forma:

$$\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{D}^{(0)} + \boldsymbol{A}_{\text{dis}} \frac{e^{ikr}}{r} \qquad [9.103]$$

* Si existen fuentes de valores dados $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ y $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$, la ecuación [9.100] se modifica añadiendo en el primer miembro el término

$$-\left[\nabla \rho + \mu\epsilon \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right]$$

siendo la *amplitud de dispersión* A_{dis}:

$$A_{\text{dis}} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \, e^{-ikn\cdot x'} \left\{ \begin{array}{l} \nabla' \times \nabla' \times (D - \epsilon E) + \\ + i\epsilon\omega \nabla' \times (B - \mu H) \end{array} \right\} \qquad [9.104]$$

Las etapas para pasar de [9.102] a [9.104] son las mismas que para pasar de [9.3] a [9.8] en el caso de los campos de radiación. La integración por partes de [9.104] permite expresar la amplitud de dispersión como:

$$A_{\text{dis}} = \frac{k^2}{4\pi} \int d^3x \, e^{-ikn\cdot x} \left\{ \begin{array}{l} [n \times (D - \epsilon E)] \times n - \\ - \dfrac{\epsilon\omega}{k} \, n \times (B - \mu H) \end{array} \right\} \qquad [9.105]$$

Puede compararse la estructura vectorial del integrando con el campo dipolar de dispersión [9.80]. La dependencia de la polarización de $(D - \epsilon E)$ es la correspondiente a un dipolo eléctrico, la de $(B - \mu H)$, la de un dipolo magnético. La sección eficaz diferencial de dispersión en correspondencia con [9.82] es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\epsilon^* \cdot A_{\text{dis}}|^2}{|D^{(0)}|^2} \qquad [9.106]$$

siendo ϵ el vector de polarización de la radiación dispersada.

Las ecuaciones [9.103], [9.105] y [9.106] proporcionan una solución formal para el problema de dispersión planteado al comienzo de esta sección. Naturalmente, la amplitud de dispersión A_{dis} no se conoce hasta que se conozcan los campos al menos aproximadamente. Pero a partir de [9.102] puede desarrollarse un esquema de aproximaciones sucesivas de igual forma que en la serie de aproximaciones de Born de la dispersión mecanocuántica. Si el integrando de [9.102] puede aproximarse en un primer orden, entonces [9.102] nos da una primera aproximación para D, adicional a $D^{(0)}$. Esta aproximación para D puede emplearse en obtener una segunda aproximación para el integrando y determinar un valor de D mejorado, y así sucesivamente. Cuestiones tales como la convergencia de la serie, etc., se han estudiado mucho en mecánica cuántica. La serie no es muy útil a menos que unas pocas iteraciones converjan rápidamente.

b) *Aproximación de Born*

Nos conformaremos con el orden más bajo de aproximación para calcular la amplitud de dispersión. Este se denomina *primera aproximación de Born* o simplemente aproximación de Born en la teoría cuántica, y de hecho fue desarrollada, en 1881, por LORD RAYLEIGH en el tema que nos ocupa. Además, restringiremos la discusión subsiguiente al ejemplo simple de variaciones espaciales de la respuesta lineal del medio. Por consiguiente, supondremos que las relaciones entre D y E, y entre B y H, son:

$$\begin{aligned} D(x) &= [\epsilon + \delta\epsilon(x)] E(x) \\ B(x) &= [\mu + \delta\mu(x)] H(x) \end{aligned} \qquad [9.107]$$

en las que $\delta\epsilon(x)$ y $\delta\mu(x)$ son de magnitud pequeña comparadas con ϵ y μ. Las diferencias que aparecen en [9.102] y [9.105] son proporcionales a $\delta\epsilon$ y a $\delta\mu$.

Entonces, en el menor orden de aproximación, los campos para estas diferencias pueden aproximarse por los campos no perturbados:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}-\epsilon\boldsymbol{E} &= \frac{\delta\epsilon(x)}{\epsilon}\,\boldsymbol{D}^{(0)}(x) \\ \boldsymbol{B}-\mu\boldsymbol{H} &= \frac{\delta\mu(x)}{\mu}\,\boldsymbol{B}^{(0)}(x) \end{aligned} \qquad [9.108]$$

Si los campos no perturbados son los de una onda plana que se propaga en la dirección $\boldsymbol{n}_0$, de modo que $\boldsymbol{D}^{(0)}$ y $\boldsymbol{B}^{(0)}$ sean:

$$\boldsymbol{D}^{(0)}(x)=\epsilon_0\boldsymbol{D}_0\,e^{ik\boldsymbol{n}_0\cdot x}$$

$$\boldsymbol{B}^{(0)}(x)=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\,\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{D}^{(0)}(x)$$

el producto escalar de la amplitud de dispersión [9.105] por ϵ^*, y dividido por D_0 es:

$$\frac{\epsilon^*\cdot\boldsymbol{A}^{(1)}_{\text{dis}}}{\boldsymbol{D}_0}=\frac{k^2}{4\pi}\int d^3x\,e^{iq\cdot x}\left\{\begin{array}{l}\epsilon^*\cdot\epsilon_0\dfrac{\delta\epsilon(x)}{\epsilon}+\\ +(\boldsymbol{n}\times\epsilon^*)\cdot(\boldsymbol{n}_0\times\epsilon_0)\dfrac{\delta\mu(x)}{\mu}\end{array}\right\} \qquad [9.109]$$

siendo $\boldsymbol{q}=k(\boldsymbol{n}_0-\boldsymbol{n})$ es la diferencia entre los vectores de la onda incidente y la dispersada. El cuadrado de [9.109] da la sección eficaz diferencial de dispersión [9.106].

Si la longitud de onda es grande comparada con la región espacial en que tiene lugar $\delta\epsilon$ y $\delta\mu$, la exponencial que aparece en [9.109] puede hacerse igual a la unidad. La amplitud entonces es una aproximación dipolar análoga a la de la sección anterior, con la dependencia con la frecuencia y la distribución angular de tipo dipolar. Para enlazar con los resultados ya obtenidos, supóngase que la región de dispersión es una esfera dieléctrica uniforme de radio a situada en el vacío. Entonces $\epsilon=\epsilon_0$ y $\delta\epsilon$ es constante dentro del volumen esférico de radio a y se anula fuera de él. Con $|\boldsymbol{q}|$ arbitrario, puede hacerse la integral que figura en [9.109] con el resultado:

$$\frac{\epsilon^*\cdot\boldsymbol{A}_{\text{dis}}}{D_0}=k^2\frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}(\epsilon^*\cdot\epsilon_0)\left[\frac{\operatorname{sen} qa-qa\cos qa}{q^2}\right]$$

El corchete, tomando el límite cuando $q\to 0$, se acerca a $a^3/3$. Por consiguiente, para frecuencias muy bajas, o para todas las frecuencias en la dirección hacia adelante, la aproximación de Born para la sección transversal diferencial de la dispersión por una esfera dieléctrica de radio a es:

$$\lim_{q\to 0}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Born}}=k^4a^6\left|\frac{\delta\epsilon}{3\epsilon_0}\right|^2|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2 \qquad [9.110]$$

Al comparar con [9.84] se advierte que la aproximación de Born y el resultado exacto a bajas frecuencias presentan la relación esperada.

c) *Azul del cielo. Razonamiento elemental*

La dispersión de la luz por los gases, tratada cuantitativamente por primera vez por LORD RAYLEIGH en su famoso trabajo sobre la puesta del sol y el azul del cielo *, puede tratarse con lo que hemos visto. Como los momentos magnéticos de la mayoría de las moléculas gaseosas son despreciables comparados con los momentos dipolares eléctricos, la dispersión tiene un carácter dipolar puramente eléctrico. En la sección anterior hemos estudiado la distribución angular y la polarización de las dispersiones individuales (véase Fig. 9.6). Por consiguiente, limitaremos nuestra atención a la sección total de dispersión y a la atenuación del haz incidente. El tratamiento tiene dos partes. En la primera, resulta adecuado un razonamiento elemental para los gases diluidos, en los que las moléculas están distribuidas unas respecto a otras en el espacio verdaderamente al azar. La segunda es de validez más general, y está basada en considerar las fluctuaciones de densidad en el gas.

Si se supone que las moléculas, en posiciones $\boldsymbol{x}_j$, poseen momentos dipolares $\boldsymbol{p}_j = \gamma_{\text{mol}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_j)$, el cambio efectivo en la constante dieléctrica $\delta\epsilon(\boldsymbol{x})$ de la ecuación [9.109] puede escribirse:

$$\delta\epsilon(\boldsymbol{x}) = \sum_j \gamma_{\text{mol}}\, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j) \qquad [9.111]$$

La sección eficaz diferencial de dispersión obtenida de [9.109] y [9.106] es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{16\pi^2\epsilon_0^2} |\gamma_{\text{mol}}|^2 \cdot |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0|^2 \mathcal{F}(\boldsymbol{q})$$

en la que $\mathcal{F}(\boldsymbol{q})$ está dado por [9.97]. El factor de estructura se reduce a una suma no coherente para una distribución al azar de centros dispersores, y la sección eficaz es precisamente la de una molécula multiplicada por el número de moléculas. En un gas poco denso la polarizabilidad molecular está relacionada con la constante dieléctrica por la expresión $\epsilon \simeq \epsilon_0 + N\gamma_{\text{mol}}$, siendo N el número de moléculas por unidad de volumen. La sección total de dispersión por molécula del gas es, pues:

$$\sigma \simeq \frac{k^4}{6\epsilon_0^2\pi N^2} |\epsilon - \epsilon_0|^2 \simeq \frac{2k^4}{3\pi N^2} |n-1|^2 \qquad [9.112]$$

la última parte de la igualdad se ha escrito en función del índice de refracción, supuesto que $|n-1| \ll 1$. La sección transversal [9.112] representa la potencia dispersada por molécula para un flujo de energía incidente igual a la unidad. Al atravesar el espesor dx del gas, la pérdida relativa de flujo es $N\sigma\, dx$. Por consiguiente, el rayo incidente tiene una intensidad $I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$, siendo α el *coeficiente de absorción o atenuación* (llamado también *coeficiente de extinción*) de la fórmula [7.53] y que viene dado por:

$$\alpha = N\sigma \simeq \frac{2k^4}{3\pi N} |n-1|^2 \qquad [9.113]$$

* LORD RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, XLI, **107**, 274 (1871); ídem, XLVII, **375**, (1899): reimpresos en sus *Scientific Papers*, vol. 1, pág. 87 y vol. 4, pág. 397. Los artículos de RAYLEIGH son de interesante lectura como ejemplos de un maestro de la física en su trabajo.

Estos resultados, [9.112] y [9.113], describen el efecto conocido como *dispersión de Rayleigh*, la dispersión no coherente producida por las moléculas de un gas, o por otro sistema de objetos dispersantes dipolares, cada uno de los cuales obedece la ley de Rayleigh del tipo ω^4.

La deducción hecha por Rayleigh de la ecuación [9.113] fue realizada al estudiar la dispersión de la luz en la atmósfera. Evidentemente, la dependencia con k^4 significa que en el espectro visible el rojo resulta menos dispersado y el violeta más. La luz recibida fuera de la dirección del rayo incidente posee una mayor proporción de componentes de alta frecuencia (azul) que la distribución espectral del rayo incidente, mientras que el haz transmitido se hace cada vez más rojizo en su composición espectral, al mismo tiempo que disminuye su intensidad global. El color azulado del cielo, el rojizo de la puesta del sol, la debilidad del sol invernal y la facilidad con que pueden producirse quemaduras solares al mediodía en verano, son todo consecuencias de la dispersión de Rayleigh en la atmósfera. El índice de refracción del aire en la región visible (4 100-6 500 Å) y condiciones normales de presión y temperatura es $(n-1) \simeq 2{,}78 \times 10^{-4}$. Con $N = 2{,}69 \times 10^{25}$ moléculas/m^3, resultan valores para la longitud de atenuación $\Lambda = \alpha^{-1}$, de 30 km para la luz violeta (4 100 Å), y de 77 y 188 km para la verde (5 200 Å) y la roja (6 500 Å), respectivamente. Usando un modelo isotermo para la atmósfera, de modo que la densidad varíe exponencialmente con la altura, puede estimarse que las intensidades, relativas a la incidente sobre la parte alta de la atmósfera, que alcanzan la superficie de la tierra con el sol en el cénit o en el orto-ocaso, son para cada longitud de onda:

Color		*Cénit*	*Orto-ocaso*
Rojo	(6 500 Å)	0,96	0,21
Verde	(5 200 Å)	0,90	0,024
Violeta	(4 100 Å)	0,76	0,000065

Estas cifras demuestran llamativamente la desviación hacia el rojo de la luz transmitida a la salida y puesta del sol.

La situación real está dibujada en la figura 9.8. La curva *A* corresponde al espectro de potencia de la radiación solar incidente sobre la tierra en función de la energía de los fotones. La curva *B* es un espectro típico al nivel del mar con el sol situado en la vertical *. La curva de trazos superior es el resultado esperable a partir de la curva *A* si la única atenuación fuera debida a la dispersión de Rayleigh en una atmósfera limpia, seca, isoterma y exponencial. En realidad, la atenuación es mayor, principalmente debido a la presencia de vapor de agua, que tiene bandas de absorción intensas en el infrarrojo, y de ozono, que produce la absorción del ultravioleta, así como de otras especies moleculares y polvo. La curva de trazos inferior indica aproximadamente el espectro al nivel del mar en el orto y en el ocaso. Los astronautas en órbita alrededor de la tierra ven puestas de sol aún más rojizas debido a que la longitud de la trayectoria a través de la atmósfera resulta duplicada.

Se han recogido observaciones detalladas de la polarización de la luz dis-

* Los datos para la figura 9.8 se obtuvieron de W. E. FORSYTHE, *Smithsonian Physical Tables*, 9th revised edition, Smithsonian Institution, Washington, D. C. (1954), tablas 813 y 815, y de K. YA. KONDRATYEV, *Radiation in the atmosphere*, Academic, Nueva York (1969), cap. 5.

persada desde el cielo *. Al igual que con la atenuación, la realidad se separa algo de la situación ideal de una atmósfera limpia y seca de baja densidad. A 90° la polarización es función de la longitud de onda y alcanza un máximo de aproximadamente un 75 por 100 a 5 500 Å. Se considera que es menor del 100 por 100 debido a dispersión múltiple (6 por 100), anisotropía molecular (6 por 100), reflexión del suelo (5 por 100, que es especialmente importante en el verde en presencia de vegetación) y a aerosoles (8 por 100).

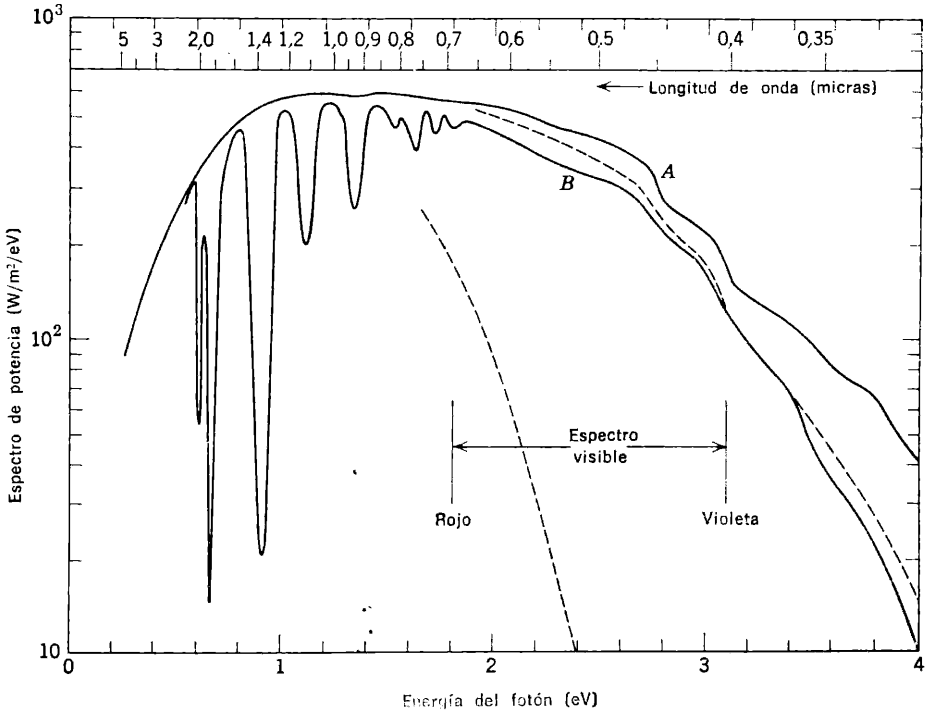


FIG. 9.8. Espectro de potencia de la radiación solar (en vatios por metro cuadrado por electrón-voltio) en función de la energía de los fotones (en electrón-voltios). La curva *A* es el espectro incidente en la parte superior de la atmósfera. La curva *B* es un espectro típico al nivel del mar con el sol en el cénit. Las bandas de absorción por debajo de 2 eV son debidas principalmente al vapor de agua y varían de punto a punto y de día a día. Las curvas de trazos dan el espectro esperado con el sol en el cénit y a la salida y puesta del sol si la única atenuación fuera la dispersión de Rayleigh por una atmósfera seca y limpia.

La fórmula del coeficiente de extinción [9.113] es notable porque en ella figura el factor N^{-1} así como magnitudes macroscópicas como el índice de refracción. Si no existieran átomos ($N \to \infty$) no habría atenuación. Inversamente, la atenuación observada puede emplearse para calcular N. MAXWELL instó a RAYLEIGH especialmente sobre este punto en su correspondencia privada. Si se supone que las propiedades de la atmósfera son bastante bien conocidas, la intensidad relativa de la luz de una estrella determinada en función de la altura sirve para determinar N. Las primeras estimaciones fueron realizadas

* T. GEHRELS, *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 1164 (1962).

por este camino y están de acuerdo con los resultados de otros métodos más comunes.

d) *Fluctuaciones de la densidad. Opalescencia crítica*

Un camino alternativo y más general para tratar la dispersión y la atenuación de la luz en los gases y en los líquidos es el considerar las fluctuaciones en la densidad y, por consiguiente, en el índice de refracción. Se imagina que el volumen del fluido está dividido en celdas pequeñas, comparadas con la longitud de onda, pero que cada una contiene muchísimas moléculas. Sea v el volumen de cada una de las celdas y $N_v = vN$ el número medio de moléculas en su interior. El número real de moléculas fluctúa en torno a N_v en una forma que depende de las propiedades del gas o del líquido. Llamemos ΔN_j a la separación respecto a la media del número de moléculas en la celda j. La variación del índice de refracción $\delta\epsilon$ en la celda j será:

$$\delta\epsilon_j = \frac{\partial\epsilon}{\partial N}\frac{\Delta N_j}{v}$$

Según la ecuación de Clausius-Mossotti [4.70], puede escribirse:

$$\delta\epsilon_j = \frac{(\epsilon-\epsilon_0)(\epsilon+2\epsilon_0)}{3\epsilon_0 N v}\Delta N_j \qquad [9.114]$$

Con esta expresión para $\delta\epsilon$ en la celda j, la integral [9.109], que será ahora una suma para todas las celdillas, se convierte en:

$$\frac{\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{A}^{(1)}_{\text{dis}}}{D_0} = \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 \frac{k^2}{12\pi\epsilon_0}\frac{(\epsilon-\epsilon_0)(\epsilon+2\epsilon_0)}{N\epsilon}\Sigma\Delta N_j\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_j} \qquad [9.115]$$

Al tomar el cuadrado de [9.115] se presentará un factor de estructura semejante al [9.97]. Si se supone que las correlaciones entre las fluctuaciones de celdillas diferentes (causada indirectamente por las fuerzas intermoleculares) sólo se extienden a distancias pequeñas comparadas con la longitud de onda, puede tomarse igual a la unidad la exponencial que figura en [9.115]. Entonces, el coeficiente de extinción α, dado por

$$\alpha = \frac{1}{V}\int \left| \frac{\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{A}_{\text{dis}}}{D_0} \right|^2 d\Omega$$

es:

$$\alpha = \frac{(\omega/c)^4}{6\pi\epsilon_0^2 N}\left|\frac{(\epsilon-\epsilon_0)(\epsilon+2\epsilon_0)}{3}\right|^2 \frac{\Delta N_V^2}{NV} \qquad [9.116]$$

siendo ΔN_V^2 la media cuadrática de la fluctuación del número en el volumen V, definida como:

$$\Delta N_V^2 = \sum_{jj'} \Delta N_j \Delta N_{j'}$$

la suma está extendida a todas las celdillas existentes en el volumen V. La mag-

nitud ΔN_V^2 puede expresarse, utilizando la mecánica estadística, en función de la *compresibilidad isoterma* β_T del medio:

$$\frac{\Delta N_V^2}{NV} = NkT\beta_T; \qquad \beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \qquad [9.117]$$

El coeficiente de atenuación [9.116] entonces vale

$$\alpha = \frac{1}{6\pi\epsilon_0^2 N}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \left|\frac{(\epsilon-\epsilon_0)(\epsilon+2\epsilon_0)}{3}\right|^2 NkT\beta_T \qquad [9.118]$$

Esta expresión en particular, obtenida por primera vez por EINSTEIN, en 1910, se denomina *fórmula de Einstein-Smoluchowski.* Se reduce al resultado de Rayleigh [9.113] para un gas muy diluido en el que $|\epsilon-\epsilon| \ll \epsilon_0$ y $NkT\beta_T = 1$. Cuando nos acercamos al punto crítico, β_T se hace muy grande (exactamente infinito en el punto crítico). La dispersión y la atenuación resultan, por tanto, muy grandes entonces. Este fenómeno se conoce con el nombre de *opalescencia crítica.* La gran dispersión está relacionada con las importantes fluctuaciones en la densidad que tienen lugar cerca del punto crítico, como señaló originariamente SMOLUCHOWSKI (1904). Nuestro razonamiento falla muy cerca del punto crítico porque la longitud de correlación para las fluctuaciones de densidad llega a hacerse mayor que la longitud de onda, como puntualizaron por primera vez ORNSTEIN y ZERNICKE (1914). El tratamiento correcto exige utilizar la transformada de Fourier de la función de distribución radial de la densidad. En el libro de FABELINSKII, que discute con detalle la aplicación de la dispersión de la luz al estudio de los fenómenos críticos y las transiciones de fase de segundo orden, pueden encontrarse referencias a la bibliografía anterior. En el capítulo V, sección 6, del ROSENFELD se da una clara discusión sobre la aparición de la distribución radial de densidad.

9.8. TEORIA ESCALAR DE LA DIFRACCION

Aunque la dispersión y la difracción no están lógicamente separadas, los tratamientos tienden a estarlo; la difracción se asocia con las desviaciones respecto a la óptica geométrica debidas a la longitud de onda finita. Por consiguiente, tradicionalmente la difracción se refiere a aberturas u obstáculos cuyas dimensiones son grandes comparadas con la longitud de onda. En la aproximación de orden más bajo la interacción con las ondas electromagnéticas queda descrita por el concepto de rayo (óptica geométrica). La aproximación siguiente comprende la difracción de las ondas alrededor de los obstáculos o a través de las aberturas con la consiguiente dispersión de las ondas. Argumentos sencillos, basados en las transformadas de Fourier, demuestran que los ángulos de desviación de las ondas están limitados a la región $\theta \lesssim \lambda/d$, siendo λ la longitud de onda y d una dimensión lineal de la abertura u obstáculo. Las diferentes aproximaciones que vamos a discutir a continuación van bien para $\lambda/d \ll 1$, y fallan completamente cuando $\lambda \sim d$, o $\lambda > d$.

Los primeros trabajos sobre difracción están asociados a los nombres de HUYGHENS, YOUNG y FRESNEL. El primer intento sistemático de deducir la teoría de Fresnel a partir de los principios básicos fue realizada por G. KIRCHHOFF (1882). A pesar de su incompatibilidad matemática y de sus deficiencias físicas,

la teoría de Kirchhoff funciona notablemente bien en el dominio óptico y ha sido la base de la mayoría de los trabajos sobre difracción. Primero deduciremos la integral básica de Kirchhoff y sus aproximaciones operativas, después comentaremos sus dificultades matemáticas y finalmente describiremos las modificaciones de RAYLEIGH y SOMMERFELD que evitan las incompatibilidades matemáticas.

La geometría habitual en la difracción comprende dos regiones del espacio, I y II, separadas por una superficie límite S_1, como se indica en la figura 9.9. La superficie S_2 se toma generalmente «en el infinito», esto es, a gran distancia de

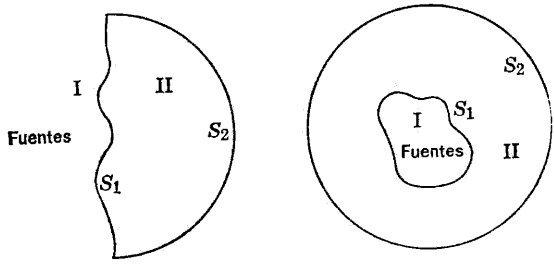


FIG. 9.9. Posibles geometrías de difracción. La región I contiene las fuentes de radiación. La región II es la difracción en la cual los campos satisfacen la condición de radiación. La figura de la derecha sirve también para la dispersión si en la región I existe un objeto dispersante finito en lugar de una fuente activa; y S es una superficie matemática arbitraria que lo encierra en vez de una pantalla material con aberturas.

la región de interés. Las fuentes en la región I generan campos que se propagan hacia fuera. Se supone que la superficie S_1 está constituida por porciones «opacas» (las condiciones de contorno se discuten más adelante) y por aberturas. La superficie S_1 interacciona con los campos generales en la región I, reflejando parte de la energía, absorbiendo parte de ella y permitiendo que otra parte de los campos, modificada por su interacción, pase a la región II. La distribución angular de los campos en la región II, la región de difracción se denomina *diagrama de difracción.* Lo que deseamos expresar en función de los campos de las fuentes y de su interacción con la pantalla y sus aberturas en S_1, es los campos difractados en la región II, o, más exactamente, expresarlos en función de los campos sobre la superficie S_1. Debería resultar obvio que la geometría y la forma de la descripción son igualmente aplicables a la dispersión, si se reemplazan las fuentes en la región I por el objeto dispersante (considerado como una fuente que está siendo excitada por la onda incidente).

El método de Kirchhoff utiliza el teorema de Green [1.35] para expresar un campo escalar (una de las componentes de $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{B}$) en el interior de un volumen cerrado V en función de los valores del campo y de su derivada normal sobre la superficie límite S. Sea $\psi(x, t)$ el campo escalar y su dependencia temporal armónica, de la forma $e^{-i\omega t}$. Se supone que el campo escalar satisface la ecuación escalar de ondas de Helmholtz en el interior de V:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad [9.119]$$

Introducimos una función de Green, $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$, para la ecuación de Helmholtz, definida por:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \qquad [9.120]$$

Si en el teorema de Green [1.35] hacemos $\phi = G$, $\psi = \psi$, y utilizamos las ecuaciones de ondas [9.119] y [9.120], obtenemos en analogía con la ecuación [1.36] de la página 41:

$$\psi(x) = \oint_S [\psi(x')n' \cdot \nabla' G(x, x') - G(x, x')n' \cdot \nabla'\psi(x')]\, da' \qquad [9.121]$$

siendo n' la normal dirigida *hacia dentro* de la superficie S. La ecuación [9.121] es válida si x está dentro de V; si no lo está, el primer miembro se anula.

La integral de Kirchhoff de la difracción se obtiene a partir de [9.121] haciendo que G sea la función de Green del espacio ilimitado que describe ondas salientes:

$$G(x, x') = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \qquad [9.122]$$

siendo $R = x - x'$. Con esta función de Green, la ecuación [9.121] se convierte en:

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{e^{ikR}}{R} n' \cdot \left[\nabla'\psi + ik \left(1 + \frac{i}{kR}\right) \frac{R}{R} \psi \right] da' \qquad [9.123]$$

que es casi la integral de Kirchhoff. Para adaptar la formulación al problema de la difracción consideramos que el volumen V sea el de la región II de la figura 9.9 y que la superficie S esté formada por $S_1 + S_2$. De este modo la integral extendida a S se divide en dos partes, una de ellas extendida a la pantalla y sus aberturas (S_1) y la otra extendida a una superficie (S_2) «en el infinito». Como los campos en la región II se suponen transmitidos a través de S_1, en las proximidades de S_2 serán ondas que se propagan hacia fuera. Los campos y, por consiguiente, $\psi(x)$ satisfarán la *condición* de radiación:

$$\psi \to f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}; \qquad \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \to \left(ik - \frac{1}{r} \right) \qquad [9.124]$$

Con esta condición para ψ sobre S_2, se ve fácilmente que la contribución de S_2 en [9.123] se anula al menos como la inversa del radio del hemisferio o esfera cuando el radio tiende a infinito. Queda la integral extendida a S_1. Con la integración extendida únicamente a la superficie S_1 de la «pantalla» difractante, la fórmula de la *integral de Kirchhoff* es:

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{ikR}}{R} n' \cdot \left[\nabla'\psi + ik \left(1 + \frac{i}{kR}\right) \frac{R}{R} \psi \right] da' \qquad [9.125]$$

Para aplicar [9.125] es necesario saber los valores de ψ y $\partial\psi/\partial n$ sobre la superficie S_1. Estos valores no son conocidos, a menos que se haya resuelto el problema por otros medios. El procedimiento de Kirchhoff consistió en utilizar valores aproximados de ψ y $\partial\psi/\partial n$ sobre S_1, con el fin de calcular una aproximación de la onda difractada. La aproximación de Kirchhoff consiste en hacer las hipótesis:

1) ψ y $\partial\psi/\partial n$ se anulan en todos los puntos de S_1 excepto en las aberturas.

2) Los valores de ψ y $\partial\psi/\partial n$ en éstas son iguales a los valores de la onda incidente en ausencia de cualquier pantalla u obstáculo.

Los cálculos de difracción que se utilizan en óptica clásica están basados todos en la aproximación de Kirchhoff. Es obvio que la receta sólo puede tener validez limitada. De hecho, en las suposiciones de KIRCHHOFF hay una seria incompatibilidad matemática. Puede demostrarse para la ecuación de ondas de Helmholtz [9.119], al igual que para la ecuación de Laplace, que si ψ y $\partial\psi/\partial n$ son cero simultáneamente sobre cualquier superficie finita, entonces $\psi=0$ en todas partes. Por consiguiente, la única consecuencia matemáticamente correcta de la primera hipótesis de Kirchhoff es que los campos difractados se anulan en todos los puntos. Naturalmente, esto no es compatible con la segunda hipótesis. Además, [9.125] no proporciona sobre S_1 los valores supuestos de ψ y de $\partial\psi/\partial n$.

Las incompatibilidades matemáticas de la aproximación de Kirchhoff pueden ser evitadas si se escoge una función de Green apropiada para [9.121]. Igual que en la sección 1.10, puede construirse una función de Green apropiada para las condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann. Si se conoce o se aproxima ψ sobre la superficie S_1, lo que hace falta es una función de Green tipo Dirichlet que satisfaga:

$$G_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')=0 \quad \text{para } \boldsymbol{x}' \text{ sobre } S \tag{9.126}$$

Entonces, la *integral generalizada de Kirchhoff*, equivalente a [9.125], es:

$$\psi(\boldsymbol{x})=\int_{S_1} \psi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial G_D}{\partial n'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\, da' \tag{9.127}$$

y una aproximación que es coherente es que $\psi=0$ sobre S_1, excepto en los orificios, y que ψ sea igual al de la onda incidente en ellos. Si debe hacerse una aproximación de la derivada en dirección normal de ψ, se emplea la función de Green tipo Neumann $G_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$, que satisfaga:

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')=0 \quad \text{para } \boldsymbol{x}' \text{ sobre } S \tag{9.128}$$

Entonces, la integral de Kirchhoff generalizada para condiciones de contorno de Neumann es:

$$\psi(\boldsymbol{x})=-\int_{S_1} \frac{\partial \psi}{\partial n'}(\boldsymbol{x})G_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\, da' \tag{9.129}$$

También aquí puede formularse un esquema de aproximación coherente.

En el caso de especial importancia en el que la superficie S_1 es una *pantalla plana* infinita y situada en $z=0$, como se indica en la figura 9.10, puede emplearse el método de las imágenes para dar las funciones de Green, de Dirichlet y Neumann en forma explícita:

$$G_{D,N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\mp\frac{e^{ikR'}}{R'}\right) \tag{9.130}$$

siendo $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''$, en esta última $\boldsymbol{x}''$ corresponde a la imagen es-

pecular de x'. En términos de coordenadas tenemos:

$$R=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$$
$$R'=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2]^{1/2}$$

La integral de Kirchhoff generalizada [9.127] (cuando se aproxima ψ sobre S_1) toma entonces la forma:

$$\psi(x)=\frac{k}{2\pi i}\int_{S_1}\frac{e^{ikR}}{R}\left(1+\frac{i}{kR}\right)\frac{n'\cdot R}{R}\psi(x')\,da' \qquad [9.131]$$

Para [9.129] puede escribirse una expresión análoga, siendo atribuibles ambos resultados al polifacético RAYLEIGH *.

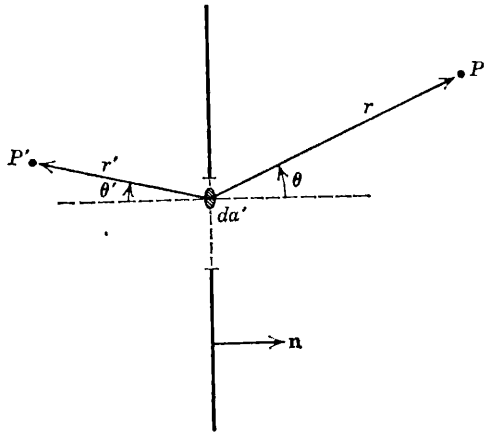


FIG. 9.10. Situación geométrica de la difracción correspondiente a una fuente puntual P', una pantalla plana con aberturas y un punto de observación P. Las distancias desde el elemento de superficie da' en la abertura a los puntos P y P' son, respectivamente, r y r'. Los ángulos θ y θ' son los que forman r y n, y r' y $-n$, respectivamente.

Al comparar [9.131] con [9.125] se advierte que aquella puede obtenerse de ésta omitiendo el primer término y duplicando el segundo. El resultado correspondiente al caso de Neumann [9.129] particularizado para la pantalla plana resulta equivalente, por otra parte, a duplicar el primer término y omitir el segundo. Así, pues, podría parecer que las tres fórmulas aproximadas para el campo difractado son muy diferentes y conducirían a resultados muy distintos. De hecho, dan resultados muy semejantes en el dominio en que puede esperarse que tengan razonable validez. Esto puede comprenderse analizando el caso particular del problema de difracción de una *fuente puntual* en la posición P' a un lado de la pantalla plana y un punto de observación P al otro lado, como se ha dibujado en la figura 9.10. La amplitud producida por la fuente puntual se considera que tenga simetría esférica y valor $e^{ikr'}/r'$. Se supone que

* La ecuación [9.131] también fue utilizada por SOMMERFELD en sus primeros trabajos sobre difracción. Véase SOMMERFELD, *Optics*, pág. 197 ss.

tanto P como P' se hallan distantes de la pantalla muchas longitudes de onda. Los campos difractados, con la aproximación de Kirchhoff [9.125], con las hipótesis equivalentes de [9.131] y con las correspondientes a la condición de contorno de Neumann, pueden escribirse para las tres aproximaciones en la forma común:

$$\psi(P) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\text{aberturas}} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikr'}}{r'} \mathcal{O}(\theta, \theta')\, da' \qquad [9.132]$$

siendo el único punto de diferencia el *factor de oblicuidad* $\mathcal{O}(\theta, \theta')$. Estos factores son:

$$\mathcal{O}(\theta, \theta') = \begin{cases} \cos\theta & \text{(cuando se aproxima } \psi \text{ sobre } S_1) \\ \cos\theta' & \text{(cuando se aproxima } \partial\psi/\partial n \text{ sobre } S_1) \\ \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos\theta') & \text{(en la aproximación de Kirchhoff)} \end{cases}$$

los ángulos son los que aparecen en la figura 9.10. Para aberturas cuyas dimensiones son grandes comparadas con la longitud de onda, la intensidad difractada está confinada a un intervalo de ángulos muy estrecho y está gobernada casi enteramente por las interferencias entre los dos factores exponenciales de [9.132]. Si el punto fuente P' y el punto de observación P están lejos de la pantalla en comparación con las dimensiones de la *abertura,* el factor de oblicuidad de [9.132] puede considerarse constante. Entonces, las amplitudes relativas de los diferentes campos difractados serían las mismas. Para incidencia normal, todos los factores de oblicuidad son iguales aproximadamente a la unidad en los puntos en que la intensidad difractada es apreciable. En este caso, son iguales incluso sus valores absolutos.

La argumentación anterior explica en cierto modo por qué la aproximación de Kirchhoff, que es matemáticamente incompatible, tiene alguna posibilidad de éxito. El empleo de las funciones de Green, de Dirichlet o Neumann, aporta una estructura lógica mejor, pero en la práctica se mejora poco al no introducir un tratamiento más elaborado del aspecto físico. Un defecto importante del tratamiento realizado hasta ahora es su naturaleza escalar. Los campos electromagnéticos tienen carácter vectorial. Este carácter debe incorporarse en cualquier tratamiento realista, aunque sea en forma aproximada. En la sección siguiente abordaremos la tarea de obtener el equivalente vectorial de la integral de Kirchhoff, o de su forma generalizada, para una pantalla plana.

9.9. EQUIVALENTES VECTORIALES DE LA INTEGRAL DE KIRCHHOFF

La fórmula [9.125] de la integral de Kirchhoff es una relación formal *exacta* que expresa el campo escalar $\psi(x)$ dispersado o difractado en la región II de la figura 9.9 en función de una integral de ψ y $\partial\psi/\partial n$ extendida a la superficie S_1. Como base para una aproximación vectorial de Kirchhoff para la difracción (sección 9.10) y para la dispersión (sección 9.13), así como para ciertos desarrollos formales tales como la demostración del teorema óptico, resultan útiles las expresiones vectoriales correspondientes, que expresen $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en función de integrales superficiales.

Para deducir una integral de Kirchhoff para el campo eléctrico, partiremos de [9.121] aplicada a cada una de las componentes cartesianas de $\boldsymbol{E}$, y escribiremos la expresión vectorial equivalente evidente:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \oint_S [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}' \cdot \nabla' G) - G(\boldsymbol{n}' \cdot \nabla')\boldsymbol{E}]\, da' \qquad [9.133]$$

en la que se supone que el punto $\boldsymbol{x}$ es interior al volumen V limitado por la superficie S. Aquí, lo mismo que en [9.121] la normal unitaria $\boldsymbol{n}'$ está dirigida hacia el interior del volumen V. Aunque eventualmente particularizaremos para que G sea la función de Green correspondiente al espacio infinito, [9.122], de momento la dejaremos en la expresión pudiendo ser cualquier solución de [9.120]. Debemos proceder con cierto cuidado, puesto que deseamos aplicar ciertos teoremas del cálculo vectorial, aplicables a las funciones bien comportadas, y G es singular en $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$. Imaginemos que la superficie S consiste en una superficie exterior S' y una superficie interior infinitesimal S'' que rodea el punto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$. Entonces, según el teorema de Green, el primer miembro de [9.133] se anula. Naturalmente, el cálculo de la integral extendida a la superficie interior S'' da $-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, cuando se toma el límite S'' se hace cero cerrándose alrededor de $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$. Así, pues, en la práctica se recupera de nuevo [9.133], pero habiendo excluido del volumen V el punto $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$, con lo que se asegura el buen comportamiento matemático que es necesario. Con este sobreentendido referente a la superficie S, reescribimos [9.133] en la forma:

$$0 = \oint_S [2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}' \cdot \nabla' G) - \boldsymbol{n}' \cdot \nabla'(G\boldsymbol{E})]\, da'$$

Puede emplearse el teorema de la divergencia para convertir el segundo término en una integral de volumen, con lo que da:

$$0 = \oint_S 2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}' \cdot \nabla' G)\, da' + \int_V \nabla^2(G\boldsymbol{E})\, d^3x'$$

Mediante la igualdad $\nabla^2 \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$, válida para cualquier campo vectorial $\boldsymbol{A}$ y los teoremas del cálculo vectorial:

$$\int_V \nabla\phi\, d^3x = \oint_S \boldsymbol{n}\phi\, da$$
$$\int_V \nabla \times \boldsymbol{A}\, d^3x = \oint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A})\, da \qquad [9.134]$$

en los que ϕ y $\boldsymbol{A}$ pueden ser funciones escalar y vectorial cualesquiera de buen comportamiento, y $\boldsymbol{n}$ es la normal *exterior*, podemos expresar de nuevo la integral de superficie. Así obtenemos:

$$0 = \oint_S [2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}' \cdot \nabla' G) - \boldsymbol{n}'\nabla' \cdot (G\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{n}' \times (\nabla' \times (G\boldsymbol{E}))]\, da'$$

Haciendo la derivación indicada del producto $G\boldsymbol{E}$, y empleando las ecuacio-

nes de Maxwell, $\nabla' \cdot \boldsymbol{E} = 0$, $\nabla' \times \boldsymbol{E} = i\omega \boldsymbol{B}$, encontramos

$$0 = \oint_S [ik(\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{B})G + 2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}' \cdot \nabla' G) - \boldsymbol{n}'(\boldsymbol{E} \cdot \nabla' G) + \boldsymbol{n}' \times (\nabla' G \times \boldsymbol{E})]\, da'$$

Desarrollando el producto vectorial triple y reordenando términos se llega al resultado final:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \oint_S [ik(\boldsymbol{n}' \times c\boldsymbol{B})G + (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{E}) \times \nabla' G + (\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{E})\nabla' G]\, da' \qquad [9.135]$$

donde *ahora el volumen* V limitado por la superficie S *contiene el punto* $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$. Puede obtenerse una expresión análoga para $\boldsymbol{B}$ a partir de [9.135] haciendo las sustituciones $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{E}/c^2$.

La ecuación [9.135] es el equivalente vectorial de la fórmula escalar [9.121]. Para obtener la análoga de la integral de Kirchhoff [9.125], consideremos la geometría de la figura 9.9 y hagamos que la superficie S se desglose en una superficie finita S_1 que rodea las fuentes, u objeto dispersante, y una superficie S_2 que se aleja «al infinito». No hay pérdida de generalidad al tomar que S_2 sea una esfera de radio $r_0 \to \infty$. La integral de [9.135] puede escribirse como la suma de dos integrales, una extendida a S_1 y la otra a S_2. Cuando r_0 es lo bastante grande, la función de Green sobre la superficie S_2 [9.122] viene dada por:

$$G \to \frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} e^{ik\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{x}}$$

y su gradiente:

$$\nabla' G \to ik\boldsymbol{n}' G$$

Entonces, la contribución de S_2 a [9.135] es:

$$\oint_{S_2} = ik \oint_{S_2} [\boldsymbol{n}' \times c\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{n}' - \boldsymbol{n}'(\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{E})]G\, da'$$

o:

$$\oint_{S_2} = ik \oint_{S_2} [(\boldsymbol{n}' \times c\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{E}]G\, da'$$

Los campos en la región II son campos difractados o dispersados y, por consiguiente, satisfacen la condición de las ondas progresivas hacia fuera en la proximidad de S_2. En particular, los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son mutuamente perpendiculares y transversales al radio vector. Así, pues, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n}' \times c\boldsymbol{B} + 0(1/r_0^2)$ sobre S_2. Esto demuestra que:

$$\oint_{S_2} \to 0\left(\frac{1}{r_0}\right)$$

y la contribución de la integral extendida a S_2 se anula cuando $r_0 \to \infty$. Con la geometría de la figura 9.9, cuando S_2 está en el infinito, el campo eléctrico

en la región II satisface la *relación integral vectorial de Kirchhoff*:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \oint_{S_1} [ik(\boldsymbol{n}' \times c\boldsymbol{B})G + (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{E}) \times \nabla' G + (\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{E})\nabla' G]\, da' \qquad [9.136]$$

estando dada G por [9.122] y la integral extendida únicamente a la superficie S_1 finita.

Resulta útil particularizar [9.136] para el caso de la dispersión, obteniendo una expresión formal que dé la amplitud de dispersión como integral de los campos dispersados extendida a S_1. En la figura 9.11 se presenta la situación geométrica. Se toma para ambos miembros de [9.136] campos que sean los campos dispersados $(\boldsymbol{E}_d, \boldsymbol{B}_d)$, esto es, los campos totales $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ menos los de la

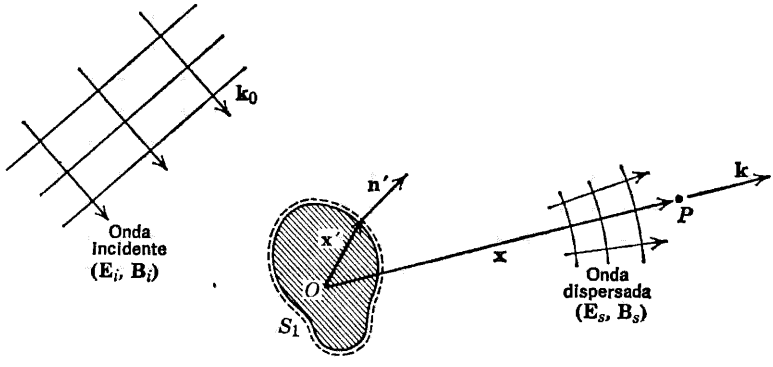


FIG. 9.11. Geometría de la dispersión. Una onda plana incidente cuyo vector de onda es $\boldsymbol{k}$ y cuyos campos son $\boldsymbol{E}_i$, $\boldsymbol{B}_i$, es dispersada por un obstáculo, dando lugar a los campos dispersados $\boldsymbol{E}_d$, $\boldsymbol{B}_d$, que se propagan como ondas esféricas divergentes a grandes distancias. La superficie S_1 encierra completamente al obstáculo dispersante.

onda incidente $(\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{B}_i)$. Si el punto de observación P está lejos del obstáculo, entonces la función de Green y el campo eléctrico dispersado adoptan sus formas asintóticas:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \to \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'}$$

$$\boldsymbol{E}_d(\boldsymbol{x}) \to \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{F}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_0)$$

siendo $\boldsymbol{k}$ el vector de ondas en la dirección de observación, $\boldsymbol{k}_0$ el vector de la onda incidente y $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_0)$ es la amplitud vectorial de dispersión (no normalizada). En este caso límite $\nabla' G = -i\boldsymbol{k}G$. Así, pues, [9.136] puede escribirse como expresión integral de la amplitud de dispersión $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_0)$:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_0) = \frac{i}{4\pi} \oint_{S_1} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'} [k(\boldsymbol{n}' \times c\boldsymbol{B}_d) + \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{E}_d) - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{E}_d)]\, da' \qquad [9.137]$$

Nótese con cuidado que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_0)$ depende explícitamente de la dirección en que

sale $\boldsymbol{k}$. La dependencia con la dirección incidente, representada por $\boldsymbol{k}_0$, está implícita en los campos dispersados $\boldsymbol{E}_d$ y $\boldsymbol{B}_d$. Como sabemos que $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{F}=0$, la componente paralela a $\boldsymbol{k}$ de la primera integral en [9.137] debe compensar exactamente a la tercera integral. Por consiguiente, resulta conveniente desdoblar el integrando de [9.137] en componentes paralelas y perpendiculares a $\boldsymbol{k}$ y presentar explícitamente la transversalidad de $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{1}{4\pi i}\boldsymbol{k}\times\oint_{S_1} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'}\left[\frac{\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{n}'\times c\boldsymbol{B}_d)}{k}-\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E}_d\right]da' \qquad [9.138]$$

Alternativamente, podemos buscar la amplitud de la radiación dispersada con vector de onda $\boldsymbol{k}$ y polarización $\boldsymbol{\epsilon}$. Esta amplitud viene dada por:

$$\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{i}{4\pi}\oint_{S_1} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'}[k\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot(\boldsymbol{n}'\times c\boldsymbol{B}_d)+\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot(\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E}_d))]\,da' \qquad [9.139]$$

Los términos entre corchetes pueden interpretarse como corrientes superficiales eléctrica y magnética equivalentes sobre S_1 que actúan como fuentes de los campos dispersados. Las diferentes formas equivalentes [9.137]-[9.139] constituyen puntos de partida valiosos para el estudio de la dispersión de radiación de longitud de onda corta (sección 9.13) y para la deducción del teorema óptico (sección 9.14).

9.10. TEORIA VECTORIAL DE LA DIFRACCION

La integral vectorial de Kirchhoff [9.136] puede tomarse como base para construir una teoría aproximada de la difracción precisamente de la misma manera descrita anteriormente [9.125] para la teoría escalar. Desgraciadamente, en ella persisten las incompatibilidades de la aproximación escalar de Kirchhoff.

Sin embargo, en el caso especial de una pantalla plana, delgada y perfectamente conductora con aberturas, es posible obtener relaciones vectoriales afines a la integral generalizada de Kirchhoff [9.127] o [9.131], en las que *se satisfacen* las condiciones de contorno y que pueden tratarse para dar aproximaciones compatibles. La pantalla plana se toma en $z=0$, se supone que las fuentes se encuentran en la región $z<0$, y que los campos difractados aparecen en la región $z>0$. Resulta conveniente dividir los campos en dos partes:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{(0)}+\boldsymbol{E}'; \qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{(0)}+\boldsymbol{B}' \qquad [9.140]$$

$\boldsymbol{E}^{(0)}$ y $\boldsymbol{B}^{(0)}$ son los campos producidos por las fuentes en ausencia de cualquier pantalla u obstáculo (definidos tanto para $z<0$ como para $z>0$), y $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{B}'$ son los campos debidos a la presencia de la pantalla plana. Para $z>0$, $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{B}'$ son los campos difractados, mientras que para $z<0$, son los campos reflejados. Llamaremos a $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{B}'$ campos dispersados cuando consideremos a la vez $z<0$ y $z>0$. Los campos dispersados puede considerarse que tienen su origen en la densidad de corriente superficial y la densidad de carga superficial que necesariamente se producen en la pantalla a fin de que se satisfagan las condiciones de contorno. Del hecho de que las densidades superficiales de carga y corriente están limitadas al plano $z=0$ se deducen ciertas propiedades de refle-

xión respecto a z de los campos dispersados. Para construir $\boldsymbol{E}'$ y $\boldsymbol{B}'$ puede utilizarse un potencial vector $\boldsymbol{A}'$ y un potencial escalar Φ'. Como la corriente superficial no tiene componente z, será $A'_z=0$. Además, evidentemente, A'_x, A'_y y Φ' son funciones pares de z. La relación entre los campos y potenciales demuestra que los campos dispersados tienen las simetrías de reflexión:

$$\begin{aligned} &E'_x, E'_y, B'_z \quad \text{son pares en } z \\ &E'_z, B'_x, B'_y \quad \text{son impares en } z \end{aligned} \qquad [9.141]$$

Los campos que sean impares en z no son necesariamente cero en todo el plano $z=0$. En la parte en que exista superficie conductora, $E'_z \neq 0$ implica que haya una densidad superficial de carga asociada, igual en las dos caras del plano. Análogamente, que existan componentes tangenciales no nulas de $\boldsymbol{B}$ implica una densidad de corriente superficial, de igual magnitud y dirección en ambos lados de la pantalla. Sólo en las aberturas es donde la continuidad exige que se anulen E'_z, B'_x y B'_y. Esto conduce a enunciar que en las aberturas en una pantalla plana perfectamente conductora, la componente normal de $\boldsymbol{E}$ y las componentes tangenciales de $\boldsymbol{B}$ son las mismas que en ausencia de la pantalla.

A las componentes del potencial vector $\boldsymbol{A}'$ puede aplicarse la integral generalizada de Kirchhoff [9.129] para condiciones de contorno de Neumann. La derivada en dirección normal del segundo miembro puede expresarse en función de las componentes de $\boldsymbol{B}'$. El resultado, escrito en forma vectorial, es:

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{pantalla}} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B}') \frac{e^{ikR}}{R} \, da' \qquad [9.142]$$

Posiblemente [9.142] podía haberse escrito directamente, a la vista de las observaciones precedentes sobre la corriente superficial y las componentes tangenciales de $\boldsymbol{B}'$. El campo magnético dispersado puede calcularse tomando el rotacional de [9.142]:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}') = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{\text{pantalla}} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B}') \frac{e^{ikR}}{R} \, da' \qquad [9.143]$$

En las ecuaciones [9.142] y [9.143] el integrando puede evaluarse en cualquiera de los lados de la pantalla utilizando la normal $\boldsymbol{n}$ apropiada de la superficie. Para concretar, estableceremos el convenio de que $\boldsymbol{n}$ sea la normal en el sentido positivo de z, y que el integrando debe evaluarse en $z=0^+$. La integración se extiende a la parte metálica de la pantalla; $\boldsymbol{B}'_{\text{tan}}=0$ en las aberturas. El campo eléctrico $\boldsymbol{E}'$ puede calcularse mediante $\boldsymbol{E}'=(ic/k)\nabla \times \boldsymbol{B}'$.

La ecuación [9.143] puede utilizarse para cálculos aproximados de modo coherente. Es más útil cuando los objetos difractantes están constituidos por uno o más segmentos planos en $z=0$, por ejemplo, un disco circular. Entonces puede hacerse una aproximación para la corriente superficial en los obstáculos, por ejemplo, utilizando el campo incidente $\boldsymbol{B}^{(0)}$ en el integrando. De este modo tenemos una versión vectorial de la aproximación generalizada de Kirchhoff de la sección previa.

Resulta útil construir una expresión para el campo eléctrico que sea equivalente a la [9.143]. Es evidente respecto a $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ de la simetría de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes, que el campo eléctrico $\boldsymbol{E}'$ puede

expresarse, en analogía con [9.143], en la forma:

$$\boldsymbol{E}'(x)=\pm\frac{1}{2\pi}\nabla\times\int_{S_1}(\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E}')\frac{e^{ikR}}{R}\,da' \qquad [9.144]$$

en la que se supone que $\boldsymbol{E}'$ es conocido en la superficie S_1 completa para $z=0^+$. El signo superior (inferior) se aplica para $z>0$ ($z<0$). Puede verificarse que [9.144] satisface las ecuaciones de Maxwell y conduce a valores en el contorno que son compatibles para $z=0$. La razón del cambio de signo según sea z mayor o menor que cero, a diferencia de lo que ocurre para $\boldsymbol{B}'$ en [9.143], es que las propiedades de reflexión de $\boldsymbol{E}'$ son opuestas a las de $\boldsymbol{B}'$ (véase [9.141]).

Tal como está enunciada hay una dificultad en [9.144]. La integración se extiende a *todo* el plano $z=0$. No podemos aprovechar la anulación de las componentes tangenciales del campo eléctrico en las porciones metálicas de la pantalla, porque es para el campo eléctrico *total* para el que se anulan las componentes tangenciales, no para $\boldsymbol{E}'$. La dificultad puede eliminarse empleando el principio de superposición lineal. Introducimos campos ($\boldsymbol{E}^{(1)}$, $\boldsymbol{B}^{(1)}$) adicionales que posean la simetría en la reflexión dada por [9.141]. Estos pueden considerarse debidos a corrientes en la superficie en $z=0$. En la región $z>0$ hacemos que:

$$\boldsymbol{E}^{(1)}=-\boldsymbol{E}^{(0)}, \qquad \boldsymbol{B}^{(1)}=-\boldsymbol{B}^{(0)} \qquad [9.145]$$

De modo que los campos adicionales cancelen los campos no perturbados producidos por la fuente, dejando como únicos campos para $z>0$ a $\boldsymbol{E}'$ y $\boldsymbol{B}'$. La simetría [9.141] en la reflexión demuestra que las componentes de $\boldsymbol{E}^{(1)}$ y $\boldsymbol{B}^{(1)}$ para $z<0$, son:

$$\begin{aligned} E_x^{(1)}(z)&=-E_x^{(0)}(-z); & B_x^{(1)}(z)&=+B_x^{(0)}(-z)\\ E_y^{(1)}(z)&=-E_y^{(0)}(-z); & B_y^{(1)}(z)&=+B_y^{(0)}(-z)\\ E_z^{(1)}(z)&=+E_z^{(0)}(-z); & B_z^{(1)}(z)&=-B_z^{(0)}(-z) \end{aligned} \qquad [9.146]$$

Se sobreentiende que en cada ecuación x e y son las mismas en ambos miembros. En la región $z<0$, la superposición ($\boldsymbol{E}^{(0)}+\boldsymbol{E}^{(1)}$, $\boldsymbol{B}^{(0)}+\boldsymbol{B}^{(1)}$) es precisamente la configuración de campos producida por una fuente que genere los campos primarios $\boldsymbol{E}^{(0)}$, $\boldsymbol{B}^{(0)}$ y que estos sean reflejados por una superficie perfectamente conductora que llene completamente el plano $z=0$.

Hemos llegado ahora a una formulación alternativa del problema de difracción por una pantalla plana perfectamente conductora que presenta ciertas aberturas. Sean $\boldsymbol{E}^{(0)}$, $\boldsymbol{B}^{(0)}$ los campos generados por las fuentes existentes en la región $z<0$. Sean $\boldsymbol{E}^{(1)}$, $\boldsymbol{B}^{(1)}$ los campos reflejados en $z<0$, suponiendo que la pantalla situada en $z=0$ no tiene aberturas en ellas (los campos $\boldsymbol{E}^{(1)}$ y $\boldsymbol{B}^{(1)}$ están dados por [9.146]). El campo eléctrico difractado $\boldsymbol{E}''$ se define mediante:

$$\boldsymbol{E}''(x)=\frac{1}{2\pi}\nabla\times\int_{\text{aberturas}}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\frac{e^{ikR}}{R}\,da' \qquad [9.147]$$

en la que la integración se extiende únicamente a las aberturas de la pantalla y la $\boldsymbol{E}$ del integrando es el campo eléctrico tangencial total en las aberturas. Entonces, en la región de difracción ($z>0$) el campo eléctrico total es:

$$\boldsymbol{E}(x)=\boldsymbol{E}''(x) \qquad [9.148]$$

En la región iluminada ($z < 0$) el campo eléctrico total es:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}^{(0)}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{E}''(\boldsymbol{x}) \qquad [9.149]$$

en ambas regiones $\boldsymbol{E}''(\boldsymbol{x})$ está dado por [9.147]. Esta forma de solución en función del campo eléctrico tangencial en las aberturas de una pantalla plana perfectamente conductora fue obtenida por primera vez por SMYTHE *. Puede servir como base para un esquema coherente de aproximaciones, haciendo que las soluciones aproximadas de $\boldsymbol{E}'$ satisfagan las condiciones de contorno requeridas en $z = 0$ y en el infinito. Se discuten algunos ejemplos en los problemas y en una sección posterior.

9.11. PRINCIPIO DE BABINET DE LAS PANTALLAS COMPLEMENTARIAS

Antes de pasar a estudiar ejemplos concretos de difracción, vamos a establecer una relación interesante llamada *principio de Babinet*. Este principio relaciona los campos de difracción debidos a una pantalla difractante con los de su complementaria. En primer lugar, discutiremos el principio dentro de la aproximación escalar de Kirchhoff. Se supone que la pantalla difractante se halla en cierta superficie S que divide el espacio en las regiones I y II en el sentido utilizado en la sección 9.8. La pantalla ocupa toda la superficie S con la excepción

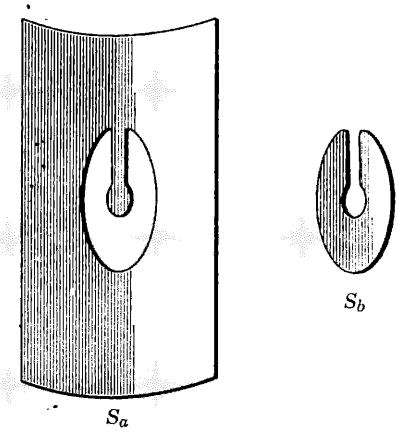


FIG. 9.12. Pantalla de difracción S_a y su pantalla complementaria S_b.

de algunas aberturas. La pantalla complementaria es aquella que se obtiene al reemplazar las aberturas por pantalla y la pantalla por aberturas. Si la superficie de la pantalla original es S_a, y la de la pantalla complementaria es S_b, se cumple que $S_a + S_b = S$, tal como aparece de forma esquemática en la figura 9.12.

Si existen fuentes en el interior de S (en la región I) que dan lugar a un campo $\psi(\boldsymbol{x})$, entonces, en ausencia de cualquiera de las pantallas, el campo $\psi(\boldsymbol{x})$ en la región II está dado por la integral de Kirchhoff [9.125], en la que la integral de superficie está extendida a toda la superficie S. Cuando se coloca la pantalla

* W. R. SMYTHE, *Phys. Rev.*, **72**, 1066 (1947). Véase también SMYTHE, sección 12.18.

S_a en su posición, el campo $\psi_a(\boldsymbol{x})$ en la región II está dado, dentro de la aproximación de Kirchhoff, por [9.125], figurando el campo de las fuentes ψ en el integrando y la integral de superficie se extiende solamente a S_b (las aberturas). Análogamente, el campo $\psi_b(\boldsymbol{x})$, para la pantalla complementaria S_b, está dado en la misma aproximación por una integral de superficie extendida a S_a. Evidentemente, tenemos la siguiente relación entre los campos de difracción ψ_a y ψ_b:

$$\psi_a + \psi_b = \psi \qquad [9.150]$$

Este es el principio de Babinet tal como se formula generalmente en óptica. Si, por ejemplo, ψ representa una onda plana incidente, el principio de Babinet dice que el diagrama de difracción es el mismo para la pantalla original y su complementaria.

El resultado [9.150] se deduce también de las integrales de Kirchhoff generalizadas [9.127] y [9.129] si la amplitud, o su derivada en dirección normal, se toma igual a la de la onda incidente en las aberturas e igual a cero en los demás puntos, dentro del espíritu de la aproximación de Kirchhoff. Todas estas formulaciones del principio de Babinet no son satisfactorias por dos motivos: establecen relaciones entre campos escalares y se basan en la aproximación de Kirchhoff.

Podemos establecer el principio de Babinet de forma rigurosa para los campos electromagnéticos en el caso de tratarse de una pantalla plana, delgada, perfectamente conductora y su complementaria. El resultado se deduce a partir de las dos formulaciones alternativas de este problema de difracción dadas en la sección anterior. El problema de difracción original y el problema complementario se definen en función de los campos de las fuentes y de las pantallas como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{Original:} && \boldsymbol{E}^{(0)}, \quad \boldsymbol{B}^{(0)}; && S_a \\ &\text{Complementario:} && \boldsymbol{E}_c^{(0)} = -c\boldsymbol{B}^{(0)}, \quad c\boldsymbol{B}_c^{(0)} = \boldsymbol{E}^{(0)}; && S_b \end{aligned} \qquad [9.151]$$

La situación complementaria comprende una pantalla que es el complemento de la original y campos de las fuentes con características de polarización opuestas. Para la pantalla original S_a, el campo eléctrico en $z > 0$, de acuerdo con [9.147] y [9.149], es:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_b} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}) \frac{e^{ikR}}{R} da' \qquad [9.152]$$

Para la pantalla complementaria S_b escogemos el emplear [9.143] en lugar de [9.147] para expresar el campo magnético difractado complementario $\boldsymbol{B}'_c$ en la forma:

$$\boldsymbol{B}'_c(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_b} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B}'_c) \frac{e^{ikR}}{R} da' \qquad [9.153]$$

Debido a las condiciones de contorno para $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}_c$ en los dos casos la integración está extendida a la pantalla S_b tanto para [9.152] como para [9.153]. Matemáticamente, ambas ecuaciones son de la misma forma. Según la linealidad de las ecuaciones de Maxwell y dada la relación existente entre los campos incidente original y complementario, se deduce que en la región $z > 0$ el

campo eléctrico total para la pantalla S_a tiene el mismo valor que el campo magnético dispersado por la pantalla completaria S_b multiplicada por c:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{B}_c'(\boldsymbol{x})$$

Los otros campos están relacionados por

$$c\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{E}_c'(\boldsymbol{x})$$

donde el signo menos es consecuencia del requisito de que en el infinito se trate de flujo de radiación saliente, al igual que con los campos de las fuentes. Si se hace uso de [9.140] para el problema complementario con el fin de obtener las correspondientes relaciones entre los campos totales en la región $z > 0$, el *principio de Babinet* para una pantalla delgada, plana y perfectamente conductora, y su complementaria, establece que los campos originales $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ y los campos complementarios $(\boldsymbol{E}_c, \boldsymbol{B}_c)$ están relacionados por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} - c\boldsymbol{B}_c &= -\boldsymbol{E}^{(0)} \\ c\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}_c &= -\boldsymbol{B}^{(0)} \end{aligned} \qquad [9.154]$$

en la región $z > 0$, supuesto que se han definido los problemas de difracción complementarios mediante [9.151]. Estas relaciones son las análogas vectoriales de [9.150]: son exactas y no aproximadas para el problema idealizado de una pantalla plana perfectamente conductora. En los casos prácticos (conductividad finita, aunque grande; pantallas curvadas cuyo radio de curvatura es grande comparado con las dimensiones de la abertura, etc.) puede esperarse que el principio de Babinet vectorial se cumpla aproximadamente. Dice que la intensidad difractada en direcciones distintas de la del campo incidente es la misma para una pantalla y su complemento. Las características de polarización están giradas, pero esto está conforme con la polarización cambiada para los campos de las fuentes en el problema complementario [9.151].

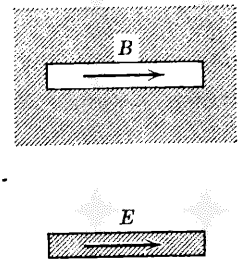


FIG. 9.13. Radiadores equivalentes de acuerdo con el principio de Babinet.

La formulación vectorial rigurosa del principio de Babinet resulta muy útil en problemas de microondas. Consideremos, por ejemplo, una rendija estrecha practicada en un plano infinito, conductor, e iluminada mediante campos en los que la inducción magnética se dirige a lo largo de la hendidura y el campo eléctrico perpendicularmente a ella, como se indica en la figura 9.13. El diagrama de radiación procedente de la rendija es el mismo que el procedente de una antena lineal delgada con el campo eléctrico dirigido a lo largo de ella,

tal como se vio en las secciones 9.2 y 9.4. La polarización de la radiación será opuesta para los dos sistemas. Según esto, podemos diseñar antenas múltiples practicando rendijas adecuadas en las caras de guías de ondas *.

9.12. DIFRACCION POR UNA ABERTURA CIRCULAR, NOTAS SOBRE ABERTURAS PEQUEÑAS

Desde la aparición del trabajo original de KIRCHHOFF se ha estudiado de modo extenso la difracción tanto en óptica, en donde la teoría escalar basada en [9.125] es suficiente por lo general, como en generación y transmisión de microondas, en donde se requieren soluciones más exactas. Hay tratados especiales que se dedican por entero al estudio de la difracción y la dispersión. Nosotros nos contentaremos con unos cuantos ejemplos que nos servirán para aprender a utilizar los teoremas escalares [9.125] y [9.131] y vectorial [9.147] y a comparar la exactitud de los esquemas de aproximación.

Históricamente, se clasificaron los diagramas de difracción como difracción de Fresnel y difracción de Fraunhofer, según la disposición geométrica relativa. Existen tres longitudes a comparar en el problema, el tamaño d del sistema difractante, la distancia r desde el sistema al punto de observación, y la longitud de onda λ. Los diagramas de difracción sólo se ponen de manifiesto para $r \gg d$. Entonces en las expresiones como [9.132] o [9.147] los factores de los integrandos que varían lentamente pueden tratarse como constantes. Con cierto cuidado basta manejar sólo el factor de fase kR en e^{ikR}. Cuando $r \gg d$, podemos hacer el desarrollo

$$kR = kr - k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}' + \frac{k}{2r}\left[r'^2 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')^2\right] + \ldots$$

siendo $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}/r$ un vector unitario en la dirección de observación. Los términos sucesivos son del orden (kr), (kd), $(kd)(d/r)$, ... El término *difracción de Fraunhofer* se aplica cuando el término tercero y superiores son despreciables en comparación con la unidad. Para sistemas difractantes pequeños esto se cumple siempre, puesto que $kd \ll 1$, y hemos supuesto $d/r \ll 1$. Pero para sistemas que son grandes comparados con la longitud de onda, (kd^2/r) puede ser del orden de la unidad o aun mayor aunque $d/r \ll 1$. Entonces se aplica el término *difracción de Fresnel*. En la mayoría de los casos prácticos resulta adecuado el límite de Fraunhofer, que es más simple. Suficientemente lejos de cualquier sistema difractante es válido siempre. Aquí consideraremos únicamente el límite de Fraunhofer (excepto para el problema 9.16).

Si el punto de observación se halla lejos del sistema de difracción, podemos utilizar el desarrollo [9.7] para $R = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$. Tomando solamente los términos de menor orden en $(1/kr)$, la expresión escalar de Kirchhoff [9.125] se convierte en

$$\psi(\boldsymbol{x}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int_{S_1} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'}\left[\boldsymbol{n}\cdot\nabla'\psi(\boldsymbol{x}') + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\psi(\boldsymbol{x}')\right] da' \qquad [9.155]$$

en donde $\boldsymbol{x}'$ es la coordenada del elemento de área da', r es la longitud del vector $\boldsymbol{x}$ desde el origen O al punto de observación P, y $\boldsymbol{k} = k(\boldsymbol{x}/r)$ es el vector de onda en la dirección de observación, tal como se indica en la figura 9.14. Para

* Véase, por ejemplo, SILVER, cap. 9.

el caso de una superficie plana, la expresión vectorial [9.147] se reduce en este límite a:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{ie^{ikr}}{2\pi r}\,\boldsymbol{k}\times\int_{S_1}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}')e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'}\,da' \qquad [9.156]$$

Como ejemplo de difracción consideraremos una onda plana que incide bajo un ángulo α sobre una pantalla plana, delgada, perfectamente conductora en la

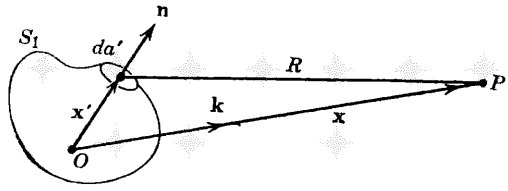


FIG. 9.14.

que hay un orificio circular de radio a. El vector de polarización de la onda incidente se halla en el plano de incidencia. En la figura 9.15 se da un sistema de coordenadas adecuado. La pantalla se encuentra en el plano x-y con el centro del orificio en el origen de coordenadas. La onda incide por debajo, de modo que la región $z > 0$ es la de los campos de difracción. Como plano de incidencia

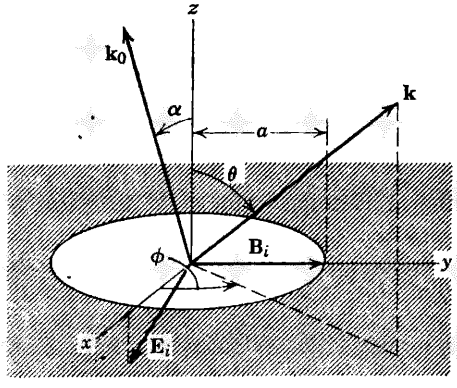


FIG. 9.15. Difracción por un orificio circular de radio a.

tomamos el x-z. El campo eléctrico de la onda incidente, expresado explícitamente en componentes cartesianas, es

$$\boldsymbol{E}_i=E_0\,(\boldsymbol{\epsilon}_1\cos\alpha-\boldsymbol{\epsilon}_3\,\mathrm{sen}\,\alpha)e^{ik\,(\cos\alpha z+\mathrm{sen}\,\alpha x)} \qquad [9.157]$$

Para calcular el campo de difracción mediante [9.155] o [9.156] haremos la aproximación de costumbre de que el valor exacto del campo que aparece en la integral de superficie puede ser reemplazado por el campo incidente. Para aplicar [9.156] necesitamos

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_i)_{z=0}=E_0\boldsymbol{\epsilon}_2\cos\alpha\,e^{ik\,\mathrm{sen}\,\alpha x'} \qquad [9.158]$$

Entonces, si introducimos coordenadas polares en el plano para efectuar la integración sobre la abertura, tenemos

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{ie^{ikr}E_0 \cos\alpha}{2\pi r}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon}_2)\int_0^a \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\beta\, e^{ik\rho[\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\theta\cos(\phi-\beta)]} \quad [9.159]$$

en donde θ, ϕ son los ángulos esféricos de $\boldsymbol{k}$. Si definimos la función angular

$$\xi = (\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha\cos\phi)^{\frac{1}{2}} \quad [9.160]$$

la integral angular puede transformarse en

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\beta' e^{-ik\rho\xi\cos\beta'} = J_0(k\rho\xi)$$

Con lo que podemos efectuar la integración radial en [9.159] de forma directa. El campo eléctrico resultante, utilizando la aproximación vectorial de Smythe-Kirchhoff, es

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{ie^{ikr}}{r}a^2E_0\cos\alpha(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon}_2)\frac{J_1(ka\xi)}{ka\xi} \quad [9.161]$$

La potencia media temporal difractada por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP}{d\Omega} = P_i\cos\alpha\frac{(ka)^2}{4\pi}(\cos^2\theta + \cos^2\phi\operatorname{sen}^2\theta)\left|\frac{2J_1(ka\xi)}{ka\xi}\right|^2 \quad [9.162]$$

donde

$$P_i = \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}\right)\pi a^2\cos\alpha \quad [9.163]$$

es la potencia total que *incide normalmente* sobre la abertura. Si ésta es grande en comparación con la longitud de onda ($ka \gg 1$), el factor $[2J_1(ka\xi)/ka\xi]^2$ presenta un pico agudo con el valor unidad para $\xi = 0$, y decrece rápidamente hasta cero (con pequeños máximos secundarios) al recorrer un intervalo $\Delta\xi \sim (1/ka)$ a ambos lados de $\xi = 0$. Esto quiere decir que la parte principal de la onda pasa a través de la abertura del modo previsto por la óptica geométrica; únicamente tienen lugar efectos de difracción pequeños *. Cuando $ka \sim 1$, la función de Bessel varía lentamente con el ángulo; la onda transmitida se distribuye en direcciones muy distintas de la dirección de incidencia. Para $ka \ll 1$, la distribución angular viene completamente determinada por el factor $(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon}_2)$ de [9.161]. Pero para este caso límite, la suposición de que el campo en la abertura es el valor no perturbado falla completamente.

---

* Para ver explícitamente esto desarrollamos ξ alrededor de la dirección $\theta = \alpha$, $\phi = 0$, de la óptica geométrica:

$$\xi \simeq \sqrt{(\theta-\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\,\phi^2}$$

Para $ka \gg 1$ es evidente que $ka\xi \gg 1$ en cuanto θ se separa apreciablemente de α, o ϕ de cero, o ambas cosas a la vez.

La potencia total transmitida puede obtenerse por integración de [9.162] sobre todos los ángulos del hemisferio superior. La razón entre la potencia transmitida y la potencia incidente recibe el nombre de *coeficiente de transmisión T*:

$$T=\frac{\cos\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta+\cos^2\phi\,\operatorname{sen}^2\theta)\left|\frac{J_1(ka\xi)}{\xi}\right|^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta \quad [9.164]$$

En los casos límite extremos $ka\gg 1$ y $ka\ll 1$, el coeficiente de transmisión tiende a los valores

$$T\to\begin{cases}\cos\alpha, & ka\gg 1\\ \frac{1}{3}(ka)^2\cos\alpha, & ka\ll 1\end{cases}$$

El límite para las longitudes de onda largas ($ka\ll 1$) no es de fiar a causa de nuestras aproximaciones, pero demuestra que la transmisión es pequeña para orificios muy pequeños. Cuando la incidencia es normal ($\alpha=0$), el coeficiente de transmisión [9.164] puede expresarse:

$$T=\int_0^{\pi/2}J_1^2(ka\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{2}{\operatorname{sen}\theta}-\operatorname{sen}\theta\right)d\theta$$

Con la ayuda de las relaciones integrales

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}J_n^2(z\operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta}&=\int_0^{2z}\frac{J_{2n}(t)}{t}\,dt\\ \int_0^{\pi/2}J_n^2(z\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta&=\frac{1}{2z}\int_0^{2z}J_{2n}(t)\,dt\end{aligned}\right\} \quad [9.165]$$

y las fórmulas de recurrencia [3.87] y [3.88], podemos poner el coeficiente de transmisión en las formas alternativas:

$$T=\begin{cases}1-\dfrac{1}{ka}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}J_{2m+1}(2ka)\\ 1-\dfrac{1}{2ka}\displaystyle\int_0^{2ka}J_0(t)\,dt\end{cases}$$

El coeficiente de transmisión aumenta más o menos monótonamente al aumentar *ka*, con pequeñas oscilaciones superpuestas. Para $ka\gg 1$, podemos utilizar la segunda forma para obtener la expresión asintótica:

$$T\simeq 1-\frac{1}{2ka}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}(ka)^{3/2}}\operatorname{sen}\left(2ka-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots \quad [1.166]$$

que presenta en forma explícita las pequeñas oscilaciones. Estas expresiones aproximadas de T dan su comportamiento general como función de *ka*, pero no son muy exactas. Para la abertura circular se han realizado cálculos exactos, así como otros más aproximados. En el libro de KING y WU (Fig. 41, pá-

gina 126) se comparan estos resultados unos con otros. La expresión asintótica correcta no tiene el término $1/2ka$ que aparece en [9.166], y el coeficiente del término en $(ka)^{-3/2}$ es el doble.

Deseamos ahora comparar los resultados obtenidos con la aproximación *vectorial* de Smythe-Kirchhoff con los de la teoría escalar basada en la expresión [9.125]. Si la onda no incide normalmente, la pregunta que se nos presenta inmediatamente es cómo elegir la función escalar $\psi(x)$. Quizá la suposición más conveniente sea elegir el módulo del campo eléctrico o magnético. Así, la intensidad difractada se considera como proporcional al cuadrado de [9.125]. Si para ψ elegimos una de las componentes de $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{B}$, deberemos decidir si conservamos o despreciamos las componentes radiales del campo difractado al efectuar el cálculo de la potencia difractada. Si como valor de ψ elegimos el módulo $\boldsymbol{E}$, tenemos por cálculo directo a partir de [9.155]:

$$\psi(x) = -ik\frac{e^{ikr}}{r}a^2E_0\left(\frac{\cos\alpha+\cos\theta}{2}\right)\frac{J_1(ka\xi)}{ka\xi}$$

como equivalente escalar de [9.161]. La potencia radiada por unidad de ángulo sólido en la aproximación *escalar* de Kirchhoff es

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq P_i\frac{(ka)^2}{4\pi}\cos\alpha\left(\frac{\cos\alpha+\cos\theta}{2\cos\alpha}\right)^2\left|\frac{2J_1(ka\xi)}{ka\xi}\right|^2 \qquad [9.167]$$

en donde P_i viene dado por [9.163]. Si se usa la fórmula escalar alternativa [9.131], el factor de oblicuidad $(\cos\alpha+\cos\theta)/2$ se reemplaza por $\cos\theta$.

Si comparamos el resultado vectorial de Smythe-Kirchhoff [9.162] con el [9.167] advertimos semejanzas y diferencias. Ambas fórmulas contienen el mismo factor de distribución «de difracción» $[J_1(ka\xi)/ka\xi]^2$ y el mismo tipo de dependencia con el número de ondas; pero el resultado escalar no presenta dependencia acimutal (aparte de la ya contenida en ξ), mientras que la expresión vectorial sí que la presenta. La variación acimutal proviene de las propiedades del campo debidas a la polarización y debe estar ausente en una aproximación escalar. Cuando la incidencia es normal ($\alpha=0$) y $ka\gg1$, la dependencia con la polarización carece de importancia. La difracción se reduce a ángulos muy pequeños respecto de la dirección de incidencia. En tal caso, ambas aproximaciones, escalar y vectorial, se reducen a la expresión común

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq P_i\frac{(ka)^2}{\pi}\left|\frac{J_1(ka\,\mathrm{sen}\,\theta)}{ka\,\mathrm{sen}\,\theta}\right|^2 \qquad [9.168]$$

En la figura 9.16 se comparan las aproximaciones vectorial y escalar para el ángulo de incidencia igual a 45 grados y para una abertura cuyo diámetro es de una longitud de onda ($ka=\pi$). Se representa la distribución angular en el plano de incidencia (que contiene el vector campo eléctrico de la onda incidente) y en el plano perpendicular a él. La curva continua (punteada) corresponde a la aproximación vectorial (escalar) en cada caso. Vemos que para $ka=\pi$, hay un desacuerdo considerable entre ambas aproximaciones. Hay razones para creer que el resultado de Smythe-Kirchhoff está cerca del correcto aun cuando la aproximación falla seriamente para $ka\leqslant1$. La aproximación

vectorial y los cálculos exactos para una abertura rectangular dan resultados que están en sorprendentemente buen acuerdo aun hasta $ka \sim 1$ *.

La difracción por aberturas u obstáculos cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda requiere métodos diferentes de las aproximaciones de Kirchhoff o semejantes. Como punto de partida puede emplearse la fórmula exacta [9.147] para una pantalla plana. Si los campos de radiación

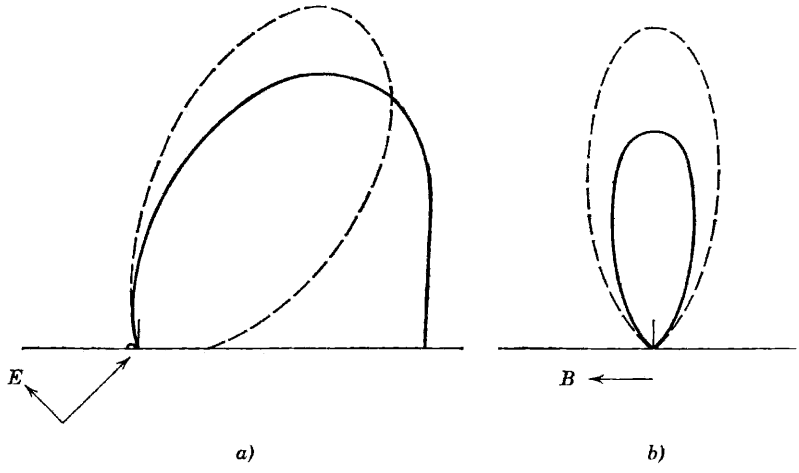


FIG. 9.16. Diagrama de difracción de Fraunhofer para un orificio circular, cuyo diámetro es de una longitud de onda, practicado en una pantalla plana delgada conductora. La onda plana incide sobre la pantalla con un ángulo de 45 grados. Las curvas continuas corresponden a la aproximación vectorial de Smythe-Kirchhoff, mientras que las punteadas corresponden a la aproximación escalar. *a)* Distribución de la intensidad en el plano de incidencia (plano *E*). *b)* Distribución de la intensidad (con un aumento de 2,5 veces) en el plano perpendicular al de incidencia (plano *H*).

de [9.147] se desarrollan en multipolos, como en las secciones 9.2 y 9.3, pueden identificarse los momentos multipolares efectivos [9.72] y [9.76] en función de integrales del campo eléctrico exacto en la abertura. La deducción de estos momentos efectivos se deja como problema 9.15. Una vez se conocen los momentos dipolares de una abertura, puede calcularse la difracción usando meramente los campos dipolares de las secciones 9.2 y 9.3. Se deja para los problemas el ejemplo de una abertura circular con momentos efectivos [9.77]. La discusión completa de la situación física sigue paralelamente a la de la sección 9.5, *d)*, y no la vamos a repetir ahora.

* Véase J. A. STRATTON y L. J. CHU, *Phys. Rev.*, **56**, 99 (1939), para una serie de comparaciones entre la aproximación vectorial de Smythe-Kirchhoff con los cálculos exactos de P. M. MORSE y P. J. RUBENSTEIN, *Phys. Rev.*, **54**, 985 (1938). El lector prevenido puede quedar desconcertado por la discrepancia aparente entre los datos de la publicación de SMYTHE (ob. cit.) y la de STRATTON y CHU. Los dos cálculos dan el mismo resultado, aunque son de apariencia y detalles de la deducción muy distintos, el primero implica una integral de línea alrededor del contorno de la abertura además de la integral de superficie extendida a la abertura misma.

9.13. DISPERSION EN EL LIMITE DE LONGITUDES DE ONDA CORTAS

En las secciones 9.6 y 9.7 se ha considerado la dispersión en el límite de longitudes de onda largas. El límite opuesto, que es semejante al dominio de Kirchhoff de la difracción, es la dispersión producida por obstáculos que son grandes comparados con la longitud de onda. Justamente como en la difracción, la aproximación de orden cero está constituida por la teoría clásica del rayo geométrico. Los aspectos ondulatorios de los campos dan lugar a correcciones, en las que la dispersión está limitada a regiones angulares que difieren sólo ligeramente de las trayectorias de la óptica geométrica. Para un obstáculo plano y delgado pueden utilizarse las técnicas de la sección 9.12, posiblemente con ayuda del principio de Babinet. Pero para otros obstáculos basamos los cálculos en la expresión integral [9.139] de la amplitud de dispersión en función de los campos dispersados $\boldsymbol{E}_d$, $\boldsymbol{B}_d$ sobre una superficie S_1 situada justamente fuera del obstáculo que dispersa.

En ausencia de un conocimiento de los campos correctos $\boldsymbol{E}_d$ y $\boldsymbol{B}_d$ sobre la superficie, debemos hacer otras aproximaciones. Si la longitud de onda es pequeña comparada con las dimensiones del obstáculo, puede dividirse aproximadamente la superficie en una región iluminada y una región en sombra *. El límite entre estas dos regiones sólo es definido en el caso extremo de la óptica geométrica. Puede demostrarse que la región de transición tiene una anchura del orden de $(2/kR)^{1/3}R$, siendo R un radio característico de curvatura de la superficie. Como R es del orden de magnitud de las dimensiones del obstáculo, el límite de longitudes de onda cortas satisface aproximadamente la condición geométrica. En la región de sombra los campos dispersados en la superficie deben ser casi exactamente iguales y opuestos a los campos incidentes, independientemente de la naturaleza del obstáculo, supuesto que sea «opaco». Por otra parte, en la región iluminada los campos dispersados en la superficie dependerán de las propiedades del obstáculo. Si la longitud de onda es corta comparada con el radio de curvatura mínimo, pueden utilizarse las ecuaciones de Fresnel de la sección 7.3, tratando la superficie como localmente plana. Eventualmente particularizaremos el resultado a un obstáculo conductor perfecto, en el cual $\boldsymbol{E}_d$ tangencial y $\boldsymbol{B}_d$ normal deben ser iguales y opuestos a los correspondientes de los campos incidentes, mientras que $\boldsymbol{B}_d$ tangencial y $\boldsymbol{E}_d$ normal serán aproximadamente iguales a los valores incidentes (véase [9.146]).

Debido a la generalidad de la contribución de la región en sombra, resulta deseable considerarla por separado. Escribimos:

$$\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{F}_{so} + \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{F}_{il} \qquad [9.169]$$

Si incide una onda plana con vector de onda $\boldsymbol{k}_0$ y polarización $\boldsymbol{\epsilon}_0$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_i &= E_0 \boldsymbol{\epsilon}_0 e^{i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{B}_i &= \frac{\boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{E}_i}{\omega} \end{aligned} \qquad [9.170]$$

* Véase MORSE y FESHBACH, págs. 1551-1555, para un tratamiento muy semejante de la dispersión de una onda *escalar* por una esfera.

la contribución de la sombra [9.139], con $\boldsymbol{E}_d \simeq -\boldsymbol{E}_i$ y $\boldsymbol{B}_d \simeq -\boldsymbol{B}_i$, es:

$$\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{F}_{so} = \frac{E_0}{4\pi i} \int_{so} \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot [\boldsymbol{n}' \times (\boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{\epsilon}_0)] e^{i(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{x}'} \, da' \qquad [9.171]$$

en la que la integración se extiende sólo a la parte en sombra de S_1. Una reordenación de los productos vectoriales permite escribir [9.171] en la forma:

$$\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{F}_{so} = \frac{E_0}{4\pi i} \int_{so} \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot [(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_0) \times (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{\epsilon}_0) + (\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0) \boldsymbol{k}_0] e^{i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0) \cdot \boldsymbol{x}'} \, da' \qquad [9,172]$$

En el límite de longitudes de onda cortas las magnitudes de $\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}'$ son grandes comparadas con la unidad. El factor exponencial de [9.172] oscila rápidamente y hace que el integrando tenga por término medio un valor muy pequeño, excepto en la dirección hacia delante en la que $\boldsymbol{k} \simeq \boldsymbol{k}_0$. En esta región, $\theta \leqslant 1/kR$, el segundo término del corchete es despreciable comparado con el primero por ser $(\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{k}_0)/k$ del orden de $\operatorname{sen} \theta \ll 1$ (recuérdese que $\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{k} \equiv 0$ y $\boldsymbol{k}_0 \simeq \boldsymbol{k}$). Por consiguiente, [9.172] puede aproximarse mediante:

$$\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{F}_{so} \simeq \frac{iE_0}{2\pi} \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 \int_{so} e^{i(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{x}'} (\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{n}') \, da'$$

En esta aproximación, la integral extendida al lado en sombra del obstáculo tiene la notable propiedad de *depender únicamente del área proyectada* normal a la dirección incidente y no depender en absoluto de la forma detallada del obstáculo. Esto puede verse del hecho de que $(\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{n}') \, da = k \, dx' \, dy' = k \, d^2x_\perp$ es precisamente k veces el área elemental proyectada y $(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{x}' = k(1 - \cos\theta)z' - \boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{x}_\perp \simeq -\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{x}_\perp$. Hemos elegido aquí $\boldsymbol{k}_0$ según el eje z, hemos introducido vectores bidimensionales $\boldsymbol{x}_\perp = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{k}_\perp = k_x\boldsymbol{e}_1 + k_y\boldsymbol{e}_2$ en el plano perpendicular a $\boldsymbol{k}_0$, y hemos hecho la aproximación de ángulos pequeños. La forma final de la contribución de la sombra a la dispersión cuando $kR \gg 1$ y $\theta \ll 1$ es, pues:

$$\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{F}_{so} \simeq \frac{ik}{2\pi} E_0 (\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0) \int_{so} e^{-i\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{x}_\perp} \, d^2x_\perp \qquad [9.173]$$

En este límite todos los objetos que presentan la misma área transversal dan igual contribución a la dispersión de la parte en sombra. El carácter de polarización de la radiación dispersada está dado por el factor $\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0$. Como la dispersión tiene lugar para ángulos pequeños, la contribución dominante tiene la misma polarización que la onda incidente. En lenguaje mecanocuántico diríamos que la dispersión de la zona en sombra no implica *inversión de spin.*

Por ejemplo, consideremos un obstáculo cuya área proyectada es un disco circular de radio a. Entonces:

$$\int_{so} e^{-i\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{x}_\perp} \, d^2x_\perp = 2\pi a^2 \frac{J_1(ka \operatorname{sen} \theta)}{ka \operatorname{sen} \theta} \qquad [9.174]$$

y la amplitud de dispersión de la zona de sombra es

$$\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{F}_{so} \simeq ika^2 E_0 (\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0) \frac{J_1(ka \operatorname{sen} \theta)}{(ka \operatorname{sen} \theta)} \qquad [9.175]$$

La dispersión procedente del lado iluminado del obstáculo no puede calcularse sin especificar la forma y naturaleza de la superficie. A título de ejemplo, supondremos que la superficie iluminada es perfectamente conductora. Al utilizar [9.139] debemos conocer las componentes tangenciales de $\boldsymbol{E}_d$ y $\boldsymbol{B}_d$ sobre S_1. Como se mencionó en los párrafos de introducción a la presente sección, en el límite de longitudes de onda cortas estas componentes son aproximadamente iguales y opuestas, respectivamente, a las componentes correspondientes de los campos incidentes. Así, pues, la contribución del lado iluminado es:

$$\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{F}_{il} = \frac{E_0}{4\pi i} \int_{il} \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot [-\boldsymbol{n}' \times (\boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{\epsilon}_0)] e^{i(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{x}'} \, da' \qquad [9.176]$$

Al comparar con la contribución de la zona en sombra al mismo nivel [9.171] se advierte que hay un signo diferente en el primer término. Este hecho resulta crucial, pues da lugar a distribuciones angulares de las dos amplitudes muy diferentes. La expresión correspondiente a [9.172] es:

$$\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{F}_{il} = \frac{E_0}{4\pi i} \int_{il} \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot [(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0) \times (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{\epsilon}_0) - (\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0) \boldsymbol{k}_0] e^{i(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{x}'} \, da' \qquad [9.177]$$

Cuando $kR \gg 1$ la exponencial oscila muy rápidamente como antes, pero ahora en la dirección hacia delante, donde se prevé la contribución mayor a la integral, el otro factor del integrando se hace cero. Esto puede atribuirse a la presencia de $(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)$ en el primer término en vez de $(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_0)$ que aparece en la amplitud [9.172] de la sombra. La parte iluminada del obstáculo da, pues, una contribución modesta a la dispersión para ángulos pequeños. Esto tiene perfecto sentido si pensamos en el límite correspondiente a la óptica geométrica. El lado iluminado debe dar la onda reflejada, y la reflexión tiene lugar principalmente en direcciones diferentes a la de incidencia.

Para avanzar más allá debemos concretar la *forma* de la parte iluminada del obstáculo, así como sus propiedades electromagnéticas. Supongamos que la superficie es esférica de radio a. Como la contribución no es principalmente hacia delante, debemos considerar ángulos de dispersión arbitrarios. El integrando de [9.177] consiste en una función vectorial de los ángulos que varía en forma relativamente lenta multiplicada por una exponencial que varía rápidamente. Como se discutió en la sección 7.11, *d)*, la contribución dominante a tal integral procede de la región de integración en la que la fase de la exponencial es estacionaria. Si llamamos (θ, ϕ) a los ángulos que forma $\boldsymbol{k}$, y (α, β) a los que forma $\boldsymbol{n}'$, con respecto a $\boldsymbol{k}_0$, el factor de fase es:

$$f(\alpha, \beta) = (\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{x}' = ka\,[(1 - \cos\theta)\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha \cos(\beta - \phi) \qquad [9.178]$$

Se demuestra fácilmente que el punto estacionario se encuentra en valores de los ángulos α_0, β_0, dados por:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \\ \beta_0 &= \phi \end{aligned}\right\} \qquad [9.179]$$

Estos ángulos son evidentemente los apropiados para que haya reflexión en la esfera de acuerdo con la óptica geométrica. En tal punto el vector unitario

$\boldsymbol{n}'$ está dirigido en el sentido de $(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)$. Si desarrollamos el factor de fase alrededor de $\alpha=\alpha_0$ y $\beta=\beta_0$, obtenemos:

$$f(\alpha,\beta)=-2ka\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\left[1-\frac{1}{2}\left(x^2+\cos^2\frac{\theta}{2}\,y^2\right)+\ldots\right] \qquad [9.180]$$

siendo $x=\alpha-\alpha_0$ e $y=\beta-\beta_0$. Entonces, la integral [9.177] puede aproximarse calculando el corchete que en ella figura para el punto $\alpha=\alpha_0$ y $\beta=\beta_0$:

$$\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{F}_{\text{il}}\simeq\frac{ka^2E_0}{4\pi i}\,\text{sen}\,\theta e^{-2ika\,\text{sen}\,(\theta/2)}\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_r\int dx\,e^{i[ka\,\text{sen}\,(\theta/2)]x^2}\int dy\,e^{i[ka\,\text{sen}\,(\theta/2)\cos^2(\theta/2)]y^2} \qquad [9.181]$$

siendo $\boldsymbol{\epsilon}_r$ un vector polarización unitario definido mediante:

$$\boldsymbol{\epsilon}_r=-\boldsymbol{\epsilon}_0+2(\boldsymbol{n}_r\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0)\boldsymbol{n}_r$$

y $\boldsymbol{n}_r$ un vector unitario en la dirección de $(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)$. El vector $\boldsymbol{\epsilon}_r$ es precisamente la polarización esperada para la reflexión, teniendo una componente perpendicular a la superficie que es igual a la componente correspondiente de $\boldsymbol{\epsilon}_0$ y una componente paralela a la superficie de signo opuesto, como se indica en

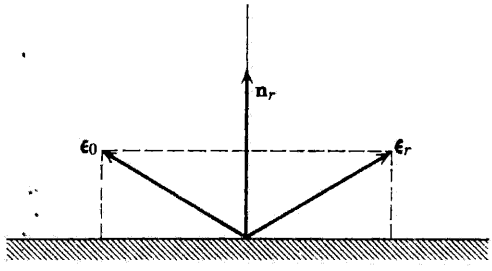


FIG. 9.17. Polarización de la onda reflejada respecto a la polarización de la incidente, $\boldsymbol{n}_r$ es la normal a la superficie en el punto apropiado para la reflexión, de acuerdo con la óptica geométrica. Para evitar complicaciones en la figura, no se han indicado los vectores de onda $\boldsymbol{k}_0$ y $\boldsymbol{k}$, pero son perpendiculares a $\boldsymbol{\epsilon}_0$ y $\boldsymbol{\epsilon}_r$, respectivamente, y están orientados de manera que su diferencia sea paralela a $\boldsymbol{n}_r$.

la figura 9.17. Las integrales en x, y en y, de [9.181] pueden calcularse aproximadamente utilizando [7.135] si $2ka\,\text{sen}\,\theta/2\gg1$, dando:

$$\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{F}_{\text{il}}\simeq E_0\frac{a}{2}e^{-2ika\,\text{sen}\,(\theta/2)}\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_r^* \qquad [9.182]$$

Cuando $2ka\,\text{sen}\,\theta/2$ es grande, la contribución a la reflexión es constante en módulo para diferentes ángulos, pero tiene una fase que varía rápidamente; cuando $\theta\to0$, se anula como θ^2.

Si se compara la amplitud [9.175] de la región en sombra con la amplitud reflejada [9.182] se advierte que en la dirección hacia adelante la contribución de la sombra predomina sobre la amplitud reflejada en un factor $ka\gg1$, mientras que para ángulos en los que $ka\,\text{sen}\,\theta\gg1$, la relación entre las magnitudes

es del orden de $1/(ka\,\mathrm{sen}^3\,\theta)^{1/2}$. Así, pues, la sección eficaz diferencial de dispersión [9.81] sumada sobre la onda que sale y promediada sobre los estados de polarización iniciales, viene dada en las dos regiones por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \begin{cases} a^2(ka)^2 \left| \dfrac{J_1(ka\,\mathrm{sen}\,\theta)}{ka\,\mathrm{sen}\,\theta} \right|^2, & \theta \lesssim \dfrac{10}{ka} \\ \dfrac{a^2}{4}, & \theta \gg \dfrac{1}{ka} \end{cases} \qquad [9.183]$$

La dispersión hacia adelante corresponde a un diagrama típico de difracción con un máximo central y un máximo secundario más pequeño, mientras que

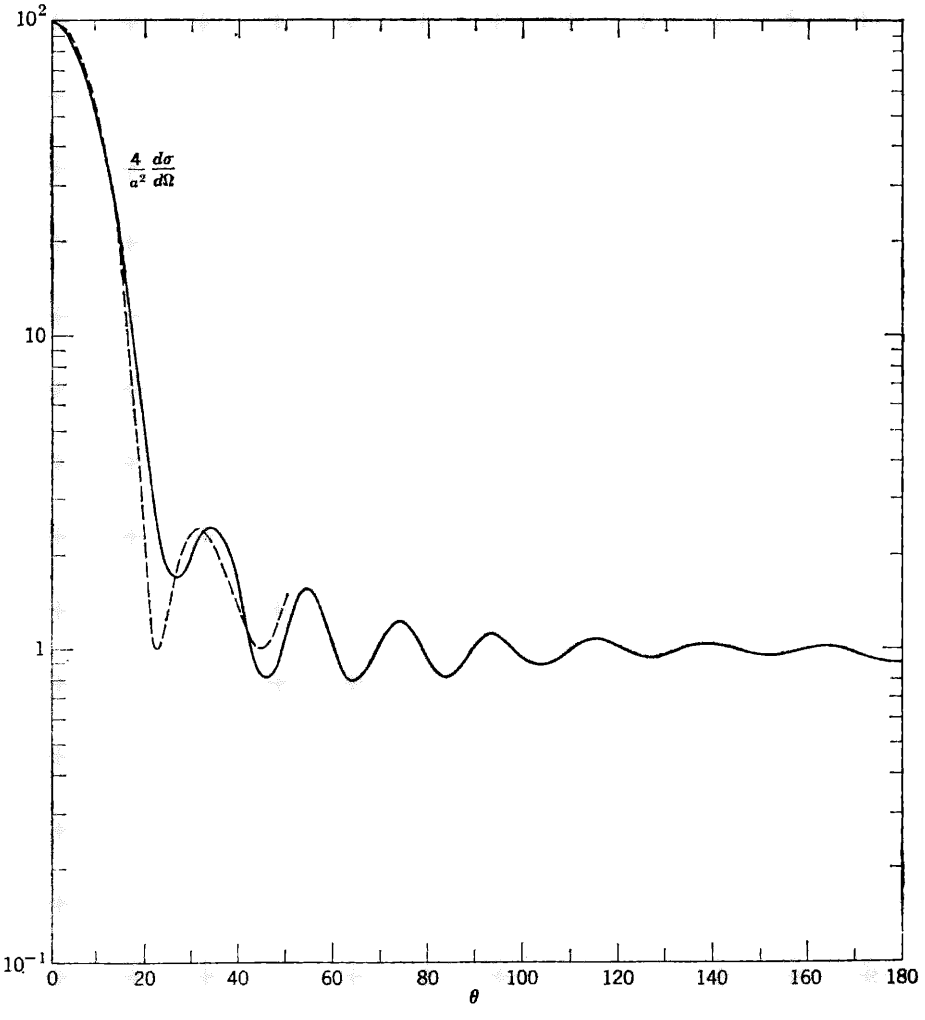


FIG. 9.18. Representación semilogarítmica de la sección eficaz de dispersión de una esfera perfectamente conductora en función del ángulo de dispersión, cuando la onda incidente es plana y no polarizada y $ka=10$. La curva continua es el resultado exacto (KING y WU). La curva de trazos es la aproximada basada en la suma de las amplitudes [9.175] y [9.182].

para ángulos grandes es isótropa. Para ángulos intermedios hay cierta interferencia entre las dos amplitudes [9.175] y [9.182], lo que hace que la sección eficaz se desvíe respecto a la suma de los dos términos dados en [9.183]. En realidad, dentro de la aproximación utilizada la interferencia es muy pequeña cuando $ka \gg 1$. En la solución exacta hay mayor grado de interferencia, como se indica en la figura 9.18, en la que los mínimos por debajo de la unidad son indicativos de existencia de interferencia destructiva *.

La sección transversal total de dispersión se obtiene integrando a todos los ángulos. Despreciando los términos de interferencia, encontramos a partir de [9.183] que el pico de difracción de la sombra da una contribución de πa^2, y lo mismo hace la parte isótropa. La sección total de dispersión es, pues, $2\pi a^2$, un factor del área geométrica proyectada proviene de la reflexión directa y el otro de la dispersión de difracción que debe acompañar a la formación de una sombra detrás del obstáculo. Puede demostrarse que esta última parte de la sección eficaz total es independiente de la forma detallada del obstáculo en el límite de longitudes de onda cortas (problema 9.21). Análogamente, para un obstáculo arbitrario que sea «opaco», la parte reflejada o absorbida de la sección eficaz total será también igual al área proyectada, aunque sin concretar las propiedades de la superficie iluminada no podemos decir cómo se divide entre dispersión y absorción.

9.14. EL TEOREMA OPTICO Y ALGUNOS TEMAS RELACIONADOS

La relación fundamental denominada *teorema óptico* establece una conexión entre la sección transversal total de dispersión y la parte imaginaria de la amplitud de dispersión hacia adelante. El teorema se deduce de consideraciones muy generales sobre la conservación de la energía y el flujo de potencia, y se corresponde con la dispersión de partículas en mecánica cuántica a través de la conservación de la probabilidad.

Para enunciar el teorema consideremos la situación geométrica indicada en la figura 9.11. Una onda plana, cuyo vector de onda es $\boldsymbol{k}_0$ y cuyos campos son $\boldsymbol{E}_i$, $\boldsymbol{B}_i$, incide en el vacío sobre un objeto dispersante finito que yace dentro de la superficie S_1. Los campos dispersados ($\boldsymbol{E}_d$, $\boldsymbol{B}_d$) se propagan desde el objeto y se observan desde grandes distancias en la dirección $\boldsymbol{k}$. Por definición, los campos totales en todos los puntos del espacio son:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_d; \qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_i+\boldsymbol{B}_d$$

En general, el objeto será disipativo y absorberá energía de la onda incidente. La potencia *absorbida* puede calcularse integrando la componente hacia dentro del vector de Poynting correspondiente a los campos *totales* a toda la superficie S_1:

$$P_{\text{abs}} = -\frac{1}{2\mu_0}\oint_{S_1} \text{Re}\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*)\cdot\boldsymbol{n}'\,da' \qquad [9.184]$$

* Para una onda incidente polarizada linealmente, la cantidad de interferencia depende de la orientación del vector de polarización incidente respecto al plano de observación que contiene a $\boldsymbol{k}$ y a $\boldsymbol{k}_0$. Cuando $\boldsymbol{\epsilon}_0$ está en este plano la interferencia es mucho mayor que cuando $\boldsymbol{\epsilon}_0$ es perpendicular a él. Véase KING y WU, apéndice, o BOWMAN, SENIOR y USLENGHI, págs. 402-405, donde aparecen numerosas gráficas para valores diferentes de ka.

La potencia *dispersada* se calcula normalmente considerando la forma asintótica del vector de Poynting para los campos dispersados en la región en que éstos son simplemente campos transversales que varían como $1/r$. Pero como entre S_1 y el infinito no hay fuentes, la potencia dispersada puede estimarse también como una integral extendida a S_1 de la componente hacia fuera del vector de Poynting *dispersado*:

$$P_{\text{dis}} = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_1} \text{Re}\,(\boldsymbol{E}_d \times \boldsymbol{B}_d^*) \cdot \boldsymbol{n}'\, da' \qquad [9.185]$$

La potencia total P extraída de la onda incidente, bien sea por dispersión o por absorción, es la suma de [9.184] y [9.185]. Haciendo algunas sustituciones y reajustes obvios, la potencia total puede escribirse en la forma:

$$P = -\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_1} \text{Re}\,[\boldsymbol{E}_d \times \boldsymbol{B}_i^* + \boldsymbol{E}_i^* \times \boldsymbol{B}_d] \cdot \boldsymbol{n}'\, da'$$

Si la onda incidente se escribe explícitamente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_i &= E_0 \boldsymbol{\epsilon}_0 e^{i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{B}_i &= \frac{1}{ck}\, \boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{E}_i \end{aligned} \qquad [9.186]$$

la potencia total toma la forma:

$$P = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left\{ E_0^* \oint_{S_1} e^{-i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{x}'} \left[\boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B}_d) + \boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \frac{\boldsymbol{k}_0 \times (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{E}_d)}{ck} \right] da' \right\}$$

Al comparar con [9.139], que da la amplitud de dispersión, se ve que la potencia total está relacionada con la amplitud de dispersión *hacia adelante* ($\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0$, $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0$) según:

$$P = \frac{2\pi}{\mu_0 ck} \text{Im}\,[E_0^* \boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0)] \qquad [9.187]$$

Este es el resultado básico del teorema óptico, aunque se acostumbra a expresarlo de una forma que sea independiente del valor del flujo incidente. La *sección eficaz total* σ_t (llamada a veces en óptica sección eficaz de extinción) se define como la relación entre la potencia total P y la potencia incidente por unidad de área, $\epsilon_0 |E_0|^2/2$. Análogamente, la *amplitud de dispersión normalizada* f se define relativa a la amplitud de la onda incidente en el origen en la forma:

$$f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_0) = \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_0)}{E_0} \qquad [9.188]$$

En función de σ_t y f el teorema óptico se expresa

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \text{Im}\,[\boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0)] \qquad [9.189]$$

La notación usada en [9.189] se corresponde con los convenios normales en mecánica cuántica. Para partículas con spin la amplitud de dispersión hacia adelante que interesa es aquella en la que ninguna de las partículas cambia su estado de spin. Para la radiación electromagnética (fotones) esto está indicado por la presencia de la amplitud $\epsilon_0^* \cdot f$ para la radiación dispersada con la misma polarización final que tenía inicialmente.

El teorema óptico relaciona aspectos diferentes de la dispersión y absorción de ondas electromagnéticas por un objeto único. Resulta también posible relacionar la amplitud de dispersión hacia adelante para un objeto único con las propiedades electromagnéticas macroscópicas, a saber, la constante dieléctrica, de un medio que esté formado por un gran número de objetos dispersantes. Nos conformaremos con una discusión elemental y breve y remitiremos al lector a la bibliografía si desea tratamientos más detallados y rigurosos *. Considérese una onda plana [9.186] que incide normalmente sobre una lámina delgada de una sustancia uniforme que está formada por N centros dispersantes idénticos por unidad de volumen, como se indica en la figura 9.19. La onda inci-

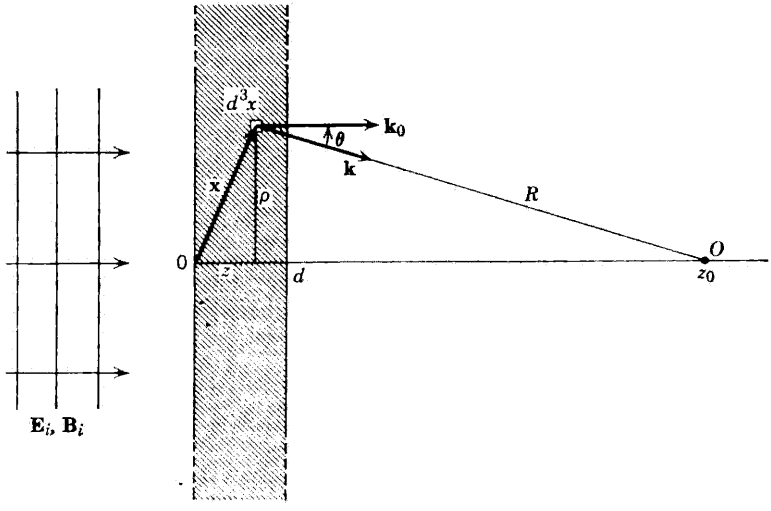


FIG. 9.19. Una onda plana que incide normalmente sobre la lámina de dieléctrico de espesor d. Los centros dispersores existentes en la lámina dan lugar a una onda dispersada que se suma coherentemente con la onda incidente para dar una onda modificada en el punto de observación O más allá de la lámina.

dente alcanza los centros dispersantes, haciendo que cada uno de ellos genere una onda dispersada. La suma coherente de la onda incidente y de todas las ondas dispersadas da lugar a una onda modificada a la derecha de la lámina. Al comparar en el punto de observación O esta onda modificada con la que se espera de considerar la transmisión de la onda al atravesar una lámina caracterizada por una constante dieléctrica macroscópica $\epsilon(\omega)$ se obtiene entonces una relación entre ϵ y la amplitud de dispersión f.

* Por ejemplo, véase la revisión muy legible de M. A. LAX, *Reviews of Modern Physics*, **23**, 287 (1951), o M. L. GOLDBERGER y K. M. WATSON, *Collision Theory*, Wiley, Nueva York (1964), Cap. 11, en especial, las págs. 766-775.

Se supone que el espesor y la densidad de la lámina son lo bastante pequeños para que sólo tengamos que considerar dispersiones simples en la lámina y, como consecuencia, que el campo excitador efectivo en cada centro dispersante es precisamente el campo incidente mismo. El campo dispersado producido en el punto de observación O de coordenadas cilíndricas $(0, 0, z_0)$ por los $N\,d^3x$ centros situados en el elemento de volumen infinitesimal d^3x situado en el punto $x(\rho, \phi, z)$ de la lámina, es dentro de esta aproximación:

$$d\boldsymbol{E}_d = \frac{e^{ikR}}{R} f(k, \theta, \phi) E_0 e^{ik_0 \cdot x} N\, d^3x$$

en la que hemos escrito la amplitud de dispersión en función de los ángulos de dispersión θ y ϕ, siendo $\operatorname{sen}\theta = \rho/R$, y hemos supuesto que el punto de observación se halla alejado de la lámina muchas longitudes de onda. La distancia desde el elemento de volumen a O es $R = [\rho^2 + (z_0 - z)^2]^{1/2}$. La presencia del factor de fase de la onda incidente es necesaria para tener en cuenta la localización de los centros dispersores en x, en lugar de en el origen de coordenadas. El campo dispersado total se obtiene integrando al volumen de la lámina:

$$\boldsymbol{E}_d = NE_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{d} dz\, e^{ikz} \int_0^{\infty} \rho\, d\rho\, \frac{e^{ikR}}{R} f(k, \theta, \phi) \qquad [9.190]$$

Como $\rho\, d\rho = R\, dR$, esta expresión puede escribirse:

$$\boldsymbol{E}_d = NE_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{d} dz\, e^{ikz} \int_{|z_0 - z|}^{\infty} dR\, e^{kiR} f(k, \theta, \phi) \qquad [9.191]$$

siendo $\cos\theta = (z_0 - z)/R$. Ahora tratamos $e^{ikR}\,dR$ como una diferencial e integramos por partes obteniendo para la integración en R,

$$\int_{|z_0 - z|}^{\infty} dR\, e^{ikR} f(k, \theta, \phi) =$$

$$= \frac{1}{ik} e^{ikR} f(k, \theta, \phi) \Big|_{R = |z_0 - z|}^{\infty} + \frac{1}{ik} \int_{|z_0 - z|}^{\infty} dR \left(\frac{z_0 - z}{R^2} \right) e^{ikR} \frac{d}{d(\cos\theta)} f(k, \theta, \phi)$$

Suponiendo que la derivada de f indicada se comporta bien para nuestros propósitos, la integral restante es del orden de $1/(k|z_0 - z|)$ veces la original. Como hemos supuesto que el punto de observación se halla a muchas longitudes de onda de la lámina, esta integral puede despreciarse. Despreciando también la contribución oscilatoria en el límite superior $R \to \infty$ (se puede hacer que se anule esta contribución de un modo algo más plausible admitiendo que el número N de centros dispersores por unidad de volumen se reduce a cero cuando ρ se hace muy grande), obtenemos el resultado:

$$\int_{|z_0 - z|}^{\infty} dR\, e^{ikR} f(k, \theta, \phi) = \frac{i}{k} e^{ik|z_0 - z|} f(k, 0)$$

Por consiguiente, el campo dispersado en O es:

$$\boldsymbol{E}_d = \frac{2\pi i}{k} N E_0 f(k, 0) \int_0^d dz\, e^{ik(z+|z_0-z|)}$$

Como $z_0 > z$ por hipótesis, tenemos finalmente:

$$\boldsymbol{E}_d = \frac{2\pi i}{k} N E_0 f(k, 0)\, e^{ikz_0}\, d \qquad [9.192]$$

El campo eléctrico *total* en el punto de observación O es:

$$\boldsymbol{E} = E_0 e^{ikz_0} \left[\epsilon_0 + \frac{2\pi i N d}{k} f(k, 0) \right] \qquad [9.193]$$

que resulta correcto en el primer orden respecto al espesor de la lámina d. La amplitud en O de una onda que tenga el mismo estado de polarización que la incidente es

$$\epsilon_0^* \cdot \boldsymbol{E} = E_0 e^{ikz_0} \left[1 + \frac{2\pi i N d}{k} \epsilon_0^* \cdot f(k, 0) \right] \qquad [9.194]$$

Supongamos ahora que consideramos la lámina desde el punto de vista macroscópico, con propiedades electromagnéticas correspondientes a una constante dieléctrica apropiada $\epsilon(\omega)$ que describa la propagación de una onda de frecuencia $\omega = ck$ y polarización ϵ_0. Un cálculo sencillo, utilizando las fórmulas del capítulo 7 nos muestra que la onda transmitida en $z = z_0$ viene dada por:

$$\epsilon_0^* \cdot \boldsymbol{E}(\text{macroscópico}) = E_0 e^{ikz_0} \left[1 + ik \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \frac{d}{2} \right] \qquad [9.195]$$

que es correcta hasta el *primer orden en d, pero en la que no se ha hecho aproximación alguna en lo referente a la pequeñez de* $(\epsilon - \epsilon_0)/\epsilon_0$. Si se comparan [9.194] y [9.195] se advierte que la constante dieléctrica puede escribirse en función de la amplitud dispersada hacia adelante en la forma

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[1 + \frac{4\pi N}{k^2} \epsilon_0^* \cdot f(k, 0) \right] \qquad [9.196]$$

Conviene hacer una serie de observaciones. Resulta evidente que nuestra deducción ha sido meramente indicativa, con un cierto número de hipótesis simplificadoras y suponiendo en lugar de deducir que es aplicable el concepto de una descripción macroscópica. Otras consideraciones más cuidadosas demuestran que la amplitud de dispersión de [9.196] debería calcularse para el número de ondas k' correspondiente al medio y no con el número de ondas k del vacío y que existe un factor en el segundo término que mide el campo excitador efectivo en un centro dispersante en relación con el campo coherente total en el medio. El lector puede consultar la bibliografía citada anteriormente para estos y otros detalles. Es suficiente decir que [9.196] constituye una aproximación razonable para sustancias no demasiado densas y en las que las correlaciones entre centros vecinos no sean importantes. Resulta interesante aplicar [9.196] al modelo sencillo de oscilador electrónico utilizado en el capí-

tulo 7 para describir la constante dieléctrica. El momento dipolar del átomo está dado por [7.50], sumando para los diferentes osciladores:

$$\boldsymbol{p}=\frac{e^2}{m}\sum_j f_j(\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j)^{-1}E_0\boldsymbol{\epsilon}_0^* \qquad [9.197]$$

deducimos de [9.80] que la amplitud de dispersión atómica es:

$$f(\boldsymbol{k})=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m}\sum_j f_j(\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j)^{-1}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon}_0)\times\boldsymbol{k} \qquad [9.198]$$

Entonces, el producto escalar de $\boldsymbol{\epsilon}_0^*$ por la amplitud de dispersión frontal es:

$$\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot f(\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_0)=\frac{e^2k^2}{4\pi\epsilon_0 m}\sum_j f_j(\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j)^{-1}$$

y al sustituir en [9.196] nos da el índice de refracción:

$$\epsilon(\omega)=\epsilon_0\left[1+\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}\sum_j f_j(\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j)^{-1}\right] \qquad [9.199]$$

de acuerdo con [7.51].

Puede establecerse una conexión entre [9.196] y el teorema óptico [9.189] recordando que el coeficiente de atenuación α está relacionado con la sección eficaz total de un centro dispersante mediante $\alpha=N\sigma_t$, y que la parte imaginaria del número de ondas en el medio lo está mediante $\alpha=2\,\mathrm{Im}\,(k')$. Según [9.196] y las relaciones [7.54] que expresan las partes real e imaginaria de k' en función de $\epsilon(\omega)$, encontramos:

$$\alpha=N\sigma_t=\frac{4\pi N}{\mathrm{Re}\,(k')}\,\mathrm{Im}\,[\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot f\,(\mathrm{Re}(k'),0)] \qquad [9.200]$$

en la que hemos mejorado [9.196] al evaluar f para el número de ondas en el medio, como se indicó anteriormente. La ecuación [9.200] indica que, si consideramos la dispersión por un solo centro embebido en el medio, el teorema óptico y las otras relaciones aparecen lo mismo que antes, supuesto que describimos la «cinemática» correctamente utilizando el número de ondas local k' del medio. Por ejemplo, se mantiene la misma situación para la dispersión de electrones en un sólido cuando se emplea la masa efectiva o alguna otra aproximación para tomar en consideración la propagación a través de la red.

Como comentario final sobre el teorema óptico señalemos el problema de las aproximaciones para f. El teorema óptico es una relación exacta. Pero puede obtenerse un resultado manifiestamente falso para la sección transversal total si se emplea una expresión aproximada para f. Por ejemplo, en el límite de longitudes de onda largas deducimos de [9.80] y [9.83] que la amplitud de dispersión para una esfera dieléctrica de radio a es:

$$f=\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\right)a^3(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon}_0)\times\boldsymbol{k}$$

La amplitud frontal es:

$$\epsilon_0^* \cdot f(k=k_0) = k^2 a^3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \qquad [9.201]$$

Para un dieléctrico sin pérdidas esta amplitud es real; entonces, el teorema óptico conduce a $\sigma_t = 0$. Por otra parte, sabemos que la sección eficaz total es, en este caso, igual a la sección eficaz de dispersión [9.89]:

$$\sigma_{\text{dis}} = \frac{8\pi}{3} k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right|^2 \qquad [9.202]$$

Aun para un dieléctrico con pérdidas ($\text{Im}\,\epsilon \neq 0$), el teorema óptico da una sección eficaz total:

$$\sigma_t = \frac{12\pi\epsilon_0 k a^3 \,\text{Im}\,\epsilon}{|\epsilon + 2\epsilon_0|^2} \qquad [9.203]$$

mientras que la sección transversal de dispersión sigue siendo [9.202]. Estas contradicciones aparentes son reflejo de que se requieren órdenes de aproximación diferentes para conseguir la compatibilidad entre los dos miembros del teorema óptico. En el límite de longitudes de onda largas es necesario evaluar la amplitud de dispersión frontal hasta términos de mayor orden en potencias de ω para hallar la contribución de la sección transversal de dispersión a la sección total por medio del teorema óptico. Para dispersores sin pérdidas, o casi sin pérdidas, resulta, por tanto, más sencillo determinar la sección transversal total directamente por integración de la sección diferencial de dispersión a los distintos ángulos. Por otra parte, para dispersores disipativos el teorema óptico da una respuesta no nula que depende de ω de forma diferente (usualmente con una potencia menor), al igual que de otros parámetros, con respecto a la de la sección transversal de dispersión. Naturalmente, esta contribución es la sección transversal de *absorción* para el orden más bajo de ω. Puede calcularse desde la base mediante [9.184], pero el teorema óptico proporciona un método conveniente y elegante. En los problemas del final del capítulo se dan ejemplos de estas consideraciones. En la dispersión mecanocuántica por un potencial real se representa una situación análoga en la que la primera aproximación de Born da una amplitud de dispersión real. La segunda aproximación de Born tiene una parte imaginaria en la dirección hacia adelante que da, mediante el teorema óptico, una sección transversal total en acuerdo con la sección transversal de dispersión integrada de la primera aproximación de Born.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

La teoría sencilla de la radiación debida a fuentes localizadas se discute en todos los textos modernos. Tratamientos análogos a los que hemos dado pueden hallarse en:

PANOFSKY y PHILLIPS, cap. 13.
SMYTHE, cap. 12.
STRATTON, cap. 8.

Para tratamientos más completos sobre antenas y conjuntos de antenas se pueden consultar libros de ingeniería tales como:

JORDAN y BALMAIN.
KRAUS.
SCHELKUNOFF y FRIIS.
SILVER.

Los tratamientos de las antenas como problemas de condiciones de contorno desde puntos de vista diferentes pueden encontrarse en

HALLÉN,
JONES,
SCHELKUNOFF, *Advanced Antenna Theory.*

El tema de la excitación de las guías de ondas por fuentes localizadas y el empleo de los momentos multipolares se discute en

COLLIN.

La bibliografía original para la descripción de aberturas pequeñas (orificios de Bethe) en función de los momentos dipolares efectivos se ha citado en la sección 9.5. La teoría básica y algunas aplicaciones aparecen en

COLLIN,
MONTGOMERY, DICKE y PURCELL, págs. 176 ss y págs. 296 ss.
VAN BLADEL.

El tema de la difracción presenta una bibliografía muy extensa. Un tratamiento exhaustivo de la teoría de Kirchhoff, escalar y vectorial, con numerosos ejemplos y excelentes figuras aparece en

BORN y WOLF, caps. 8, 9 y 11.

La revisión de

C. J. BOUWKAMP, *Diffraction Theory,* in *Reports on Progress in Physics,* ed. A. C. Stickland, vol. XVII, págs. 35-100. The Physical Society, Londres (1954),

contiene una lista de referencias extensa y trata un cierto número de puntos difíciles. Discusiones más elementales de la teoría escalar se encuentran en:

SLATER y FRANK, capítulos XIII y XIV,
SOMMERFELD, *Optics,*
STONE, capítulos 8, 9 y 10.

SOMMERFELD discute también su cálculo riguroso de la difracción por un borde rectilíneo, una de las pocas soluciones exactas en teoría de difracción.

En aplicaciones ópticas, como la teoría de Abbé de la resolución de los instrumentos ópticos y el microscopio de contraste de fase, se utiliza de modo creciente el lenguaje de difracción. Una introducción a esta área desde el punto de vista ingeniería eléctrica figura en

J. W. GOODMAN, *Introduction to Fourier Optics,* McGraw-Hill, Nueva York (1968).

BORN y WOLF y también STONE discuten algunos aspectos de estas aplicaciones.

Las técnicas matemáticas para los problemas de difracción son tratadas por

BAKER y COPSON.
JONES, capítulos 8 y 9.
MORSE y FESHBACH, capítulo 11.
A. RUBINOWICZ, *Die Beugunswele in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung,* PWN-Springer, Varsovia-Berlín, 2.ª edición (1966).

L. A. WEINSTEIN, *Theory of Diffraction and the factorization Method*, Golem Press, Boulder, Colorado (1969).

La demostración de que para la dispersión o difracción para longitudes de onda cortas la transición entre las regiones iluminadas y en sombra es del orden de $R/(kR)^{1/3}$ puede encontrarse en

V. A. FOCK, *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*, Pergamon, Oxford (1965).

Son monografías especializadas sobre la dispersión de ondas electromagnéticas por esferas y otros obstáculos las obras de

BOWMAN, SENIOR y USLENGHI,
H. C. VAN DER HULST, *Light Scattering by Small Particles*, Wiley, Nueva York (1957),
KERKER,
KING y WU.

KERKER hace una introducción histórica preciosa, que incluye citas de LEONARDO DE VINCI y de MAXWELL en una carta a RAYLEIGH. Véase también

VAN BLADEL.

En este capítulo se ha omitido por completo el empleo de principios variacionales para la difracción y la dispersión. Esta laguna puede llenarla el lector consultando

BOUWKAMP, ob. cit.,
CAIRO y KAHAN,
HARRINGTON, capítulo 7,
H. LEVINE y J. SCHWINGER, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **3**, 355 (1950),
MORSE y FESHBACH, sección 11.4.

Un tratamiento aproximado muy interesante de la dispersión, que ha sido posible por el empleo de métodos de cálculo con ordenadores de gran velocidad, lo describen

E. M. PURCELL y R. C. PENNYPACKER, *Astrophys. J.*, **186**, 705 (1973).

Se aproxima una partícula dispersante dieléctrica de forma arbitraria mediante un conjunto de dipolos dispuestos en una red cúbica simple, en número de unos 100, cada uno de ellos con sus campos dipolares [9.18]. Se busca por iteración una solución autoconsistente de la dispersión. Al comparar con los resultados exactos para esferas se obtiene un buen acuerdo en el intervalo interesante de longitudes de onda (kR, 0,5-5). El método tiene aplicaciones en la dispersión y absorción de la luz por la materia interestelar.

PROBLEMAS

9.1. Un ejemplo corriente en libros de texto de sistema radiante (véase problema 9.2) es una configuración de cargas fijas unas respecto a otras, pero en rotación. La densidad de carga es evidentemente función de tiempo, pero no de la forma [9.1].

a) Demuéstrese que para cargas en rotación existe la alternativa de calcular momentos multipolares *reales* dependientes del tiempo utilizando $\rho(x, t)$ directamente y después calcúlense los momentos multipolares para una frecuencia dada con el convenio seguido en [9.1] bien por inspección directa, bien por descomposición de los momentos dependientes del tiempo mediante el teorema de Fourier. Nótese que se debe tener cuidado al calcular $q_{lm}(t)$ para formar combinaciones lineales que sean reales antes de establecer la relación.

b) Considérese una densidad de carga $\rho(x, t)$ que sea periódica en el tiempo con periodo $T=2\pi/\omega_0$. Demuéstrese, haciendo un desarrollo en *serie* de Fourier, que puede escribirse en la forma:

$$\rho(x, t)=\rho_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}\,[2\rho_n(x)e^{-in\omega_0 t}]$$

siendo

$$\rho_n(x)=\frac{1}{T}\int_0^T \rho(x, t)e^{in\omega_0 t}\,dt$$

Esto demuestra explícitamente cómo establecer la relación con [9.1].

c) Para una sola carga q que gire alrededor del origen en el plano x-y en una circunferencia de radio R con velocidad angular constante ω_0, calcúlense los momentos multipolares $l=0$ y $l=1$ por los dos métodos, *a)* y *b)*, y compárelos. Exprésese, para el método *b)*, la densidad de carga $\rho_n(x)$ en coordenadas cilíndricas. ¿Existen multipolos superiores, por ejemplo, cuadrupolo? ¿A qué frecuencias?

9.2. Se tiene un cuadrupolo radiante que consiste en un cuadrado de lado a con cargas $\pm q$ dispuestas alternativamente en las esquinas. El cuadrado gira con una velocidad angular ω alrededor de un eje normal a su plano y que pasa por su centro. Calcúlense los elementos cuadrupolares, los campos de radiación, la distribución angular de la radiación y la potencia total radiada en la aproximación correspondiente a longitudes de onda largas.

9.3. Las dos mitades de una capa esférica de radio R y conductividad infinita están separadas por una ranura aislante muy pequeña. Entre los dos hemisferios se aplica un potencial alterno de forma que los potenciales son $\pm V\cos\omega t$. En el caso límite de longitudes de onda largas, calcúlense los campos de radiación, la distribución angular de la potencia radiada y la potencia total radiada por la esfera.

9.4. La densidad de carga de transición para el salto radiativo desde el estado $2p$, $m=0$ del hidrógeno al estado fundamental $1s$ en la notación de la ecuación [9.1] es:

$$\rho(r, \theta, \phi)=\frac{2e}{\sqrt{6}}\,a_0^{-4}\cdot re^{-3r/2a_0}Y_{00}Y_{10}e^{-i\omega_0 t}$$

siendo $a_0=4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$ el radio de Bohr, y $\omega_0=3e^2/32\pi\epsilon_0\hbar a_0$ la diferencia en frecuencia entre los niveles.

a) Calcúlense todos los multipolos de radiación para esta densidad de carga en el límite de longitudes de onda largas.

b) En la aproximación dipolar eléctrica calcúlese la potencia media-temporal radiada. Exprésese el resultado tomando como unidad $(\hbar\omega_0)\cdot(\alpha^4 c/a_0)$, siendo $\alpha=e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ la constante de estructura fina.

c) Interprétese la potencia clásica calculada como energía del fotón $(\hbar\omega_0)$ multiplicada por la probabilidad de transición y evalúese esta probabilidad en s^{-1} como unidad.

d) Si en lugar de utilizar la densidad de carga semiclásica anterior, se describe el electrón en el estado $2p$ mediante una órbita de Bohr circular de radio $2a$, girando con la frecuencia de transición ω_0, ¿cuál sería la potencia radiada? Exprésese la respuesta en las mismas unidades que en *b)* y calcúlese la relación numérica entre las dos potencias.

9.5. Una antena lineal delgada de longitud d se excita de tal modo que la corriente sinusoidal corresponde a una longitud de onda completa, como se indica en la figura.

Problema 9.5.

a) Calcúlese exactamente la potencia radiada por unidad de ángulo sólido y represéntese la distribución angular de la radiación.

b) Determínese la potencia total radiada y hállese un valor numérico para la resistencia de radiación.

9.6. Trátese el problema 9.5 de la antena lineal por el método de desarrollo en multipolos para longitudes de onda largas.

a) Calcúlense los momentos multipolares (dipolo eléctrico, dipolo magnético y cuadripolo eléctrico).

b) Compárese la distribución angular para los multipolos no nulos de menor orden con la distribución exacta del problema 9.5.

c) Determínese la potencia total radiada para el multipolo de menor orden, así como la resistencia de radiación correspondiente. Compárese el resultado con el de 9.5, *b)*. ¿Hay aquí alguna paradoja?

9.7. Puede obtenerse una interpretación cualitativa del resultado para la reactancia de una antena corta, cuyos campos de radiación están descritos por los campos dipolares eléctricos de la sección 9.2, considerando los campos dipolares ideales [9.18].

a) Demuéstrese que la integral, extendida a todos los ángulos para una distancia fija r, de $|\boldsymbol{E}|^2-|c^2\boldsymbol{B}^2|$ es:

$$\int [|\boldsymbol{E}|^2-c^2|\boldsymbol{B}|^2]\, d\Omega=\frac{1}{2\pi\epsilon_0^2}\,\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{r^6}$$

b) Utilizando el valor [6.140] para la reactancia, demuéstrese que la contribución de los campos a distancia $r>a$ a la reactancia es:

$$X_a=-\frac{\omega\,|\boldsymbol{p}|^2}{6\pi\epsilon_0|I_i|^2a^3}$$

en la que I_i es la corriente de entrada.

c) Demuéstrese que, para la antena corta de alimentación central descrita en la sección 9.2, $X_a=-d^2/24\pi\epsilon_0a^3$, que corresponde a una capacidad equivalente de valor $6a^3/d^2$. Cuando $a=d/2$, X_a representa sólo una fracción pequeña de la reactancia negativa total de la antena corta. Evidentemente, los campos próximos a la antena no tienen carácter dipolar y contribuyen de modo importante. Véase el libro de SCHELKUNOFF y FRIIS para cálculos sobre reactancias de antenas cortas.

9.8. Considérese la excitación de una guía de ondas en el problema 8.10 desde el punto de vista de los momentos multipolares de la fuente.

a) Para una antena lineal tipo poste calcúlense las componentes de los momentos multipolares $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{m}$, $Q_{\alpha\beta}$ y $Q_{\alpha\beta}{}^M$ que intervienen en [9.69].

b) Calcúlense las amplitudes para la excitación del modo $TE_{1,0}$ y también el flujo de potencia. Compárese el resultado del desarrollo multipolar con la

respuesta dada en el problema 8.10, *b)*. Discútanse las razones que justifican el acuerdo o desacuerdo. ¿Qué ocurre cuando se realiza la comparación para la excitación de otros modos?

9.9. *a)* Verifíquese por cálculo directo que el campo eléctrico tangencial *estático* [3.185] en una abertura circular practicada en un plano conductor, conduce a la expresión [9.77] cuando se introduce en la ecuación de definición del momento dipolar eléctrico $\boldsymbol{p}_{ef}$ [9.72].

b) Determínese el valor de $i\omega\boldsymbol{m}_{ef}$ que resulta de [9.72] cuando el campo eléctrico es el estático de la parte *a)*.

c) Utilícese el campo magnético normal *estático* [5.132] del problema magnético correspondiente de condiciones de contorno de la abertura circular, para calcular mediante [9.76] el momento magnético dipolar $\boldsymbol{m}_{ef}$ y comparar con [9.71].

d) Coméntense las diferencias entre los resultados *b)* y *c)* y el empleo de las definiciones [9.72] de forma compatible. (Véase la sección 9 del artículo «Diffraction theory», de C. J. B. BOUWKAMP en *Reports on Progress in Physics*, vol. 17, editor A. C. Stickland, The Physical Society, Londres, 1954.)

9.10. Una guía de ondas rectangular ideal de dimensiones (a, b), siendo $a > b$ y con $\mu=\mu_0$, $\epsilon=\epsilon_0$, tiene en su interior un obstáculo en forma de una placa perfectamente conductora de espesor despreciable y situada en $z=0$, que presenta un *pequeño* orificio circular de radio R cuyo centro tiene por coordenadas (x_0, y_0). Sobre el obstáculo incide una onda desde la región $z<0$ del modo más bajo (TE_{10}). Demuéstrese que la onda transmitida de dicho modo tiene una amplitud relativa que está dada aproximadamente por:

$$T \simeq -i\frac{16}{3}\frac{kR^3}{ab}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right)$$

siendo k el número de ondas del modo $TE_{1,0}$ en la guía. ¿Cuál es la impedancia paralelo equivalente relativa (Z/Z_0) de este obstáculo? ¿Es inductiva o capacitiva?

9.11. La guía rectangular del problema anterior, en lugar de la placa transversal en $z=0$, tiene un pequeño orificio circular de radio R en una de sus paredes estrechas (lateral). Demuéstrese que la admitancia paralelo relativa efectiva (definida según [8.151]) del orificio para la transmisión del modo $TE_{1,0}$ es aproximadamente:

$$Y_d = -i\frac{8\pi^2R^3}{3kba^3}$$

9.12. Una guía rectangular de dimensiones a, b $(a > b)$ tiene practicado un orificio circular *pequeño* de radio R en su cara superior (la más ancha) cuyo centro se halla en $x=a/2$, $y=b$, $z=0$. La frecuencia es tal que sólo puede propagarse el modo $TE_{1,0}$. Desde $z=-\infty$ incide una onda que se propaga hacia $z=+\infty$. El medio interior a la guía tiene $\mu=\mu_0$, $\epsilon=\epsilon_0$.

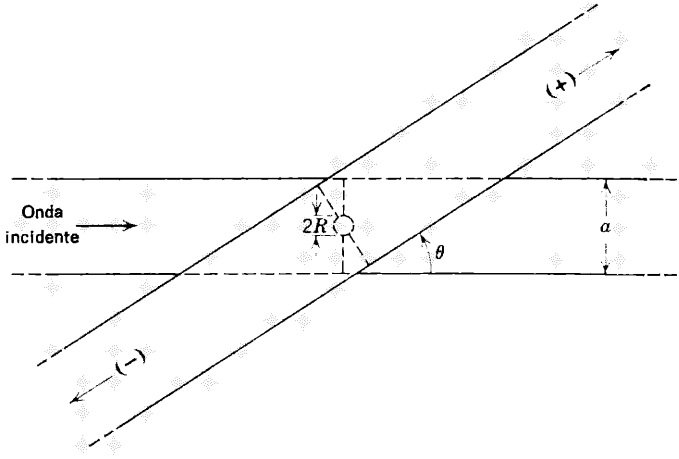
a) Demuéstrese que, tal como se ve desde el interior de la guía, el orificio actúa como la superposición de dipolos eléctrico y magnético cuyas componentes no nulas son:

$$p_y = -\frac{4\epsilon_0R^3}{3}E_y; \qquad m_x = -\frac{8R^3}{3Z}E_y$$

siendo Z la impedancia de onda del modo $TE_{1,0}$ y E_y su campo eléctrico calculado en el orificio $(E_y=(2/ab)^{1/2}$ para una onda de amplitud unidad según el convenio de la sección 8.11).

b) Calcúlense los coeficientes de reflexión y transmisión para la onda incidente. Si es posible, hállese una frecuencia de operación tal que no haya onda reflejada o no haya onda transmitida adicional.

9.13. Se acopla la guía de ondas del problema 9.12 a otra guía idéntica con un orificio centrado semejante colocando las dos guías una encima de otra con los orificios coincidentes, pero de modo que los ejes de las guías formen un ángulo θ una respecto a la otra, como se indica en la figura. También incide una onda de amplitud unidad desde la izquierda en la guía de abajo. Puede despreciarse el espesor de las paredes.



Problema 9.13.

a) Demuéstrese que las amplitudes de las ondas que se propagan en los sentidos positivo y negativo de la guía superior son proporcionales a:

$$1 \pm 2\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)\cos\theta$$

en la que $\omega_1 = \pi c/a$ es la frecuencia de corte de la guía. Determínese qué signo lleva cada amplitud.

b) Determínese la constante de proporcionalidad por la que hay que multiplicar la expresión de la parte *a)* para obtener las amplitudes en la guía de arriba. Para una guía con $b=a/2$, $\omega=\sqrt{2}\,\omega_1$, y habiendo escogido el ángulo θ para suprimir totalmente la transmisión en un sentido (¿en qué sentido?), calcúlese el valor de R/a para que el factor de acoplamiento sea 20 db (esto es, que se transmita a la guía superior el 1 por 100 de la *potencia* incidente en la guía inferior. ¿Resulta buena la aproximación $R/a \ll 1$ para esta magnitud del acoplamiento?

El dispositivo de acoplamiento de este problema se denomina acoplamiento direccional de orificio de Bethe, puesto que fue A. H. BETHE el que desarrolló su principio en 1943.

9.14. En la dispersión de la luz por un gas muy cerca del punto crítico se observa que la luz dispersada es «más blanca», esto es, en el espectro es menos acusado el predominio del azul, que lejos del punto crítico. Demuéstrese que esto puede interpretarse por el hecho de que los volúmenes en que tienen lugar las fluctuaciones de densidad se hacen lo bastante grandes para que la ley de Rayleigh deje de cumplirse. En particular, considérese la aproximación de menor orden para una esfera dieléctrica uniforme de radio a cuya constante dieléctrica ϵ difiera sólo ligeramente de la del vacío.

a) Demuéstrese que para $ka \gg 1$, la sección eficaz diferencial presenta un pico agudo en la dirección frontal y que la sección transversal de dispersión

total es aproximadamente:

$$\sigma \simeq \frac{\pi}{2\epsilon_0}(ka)^2\,|\epsilon-\epsilon_0|^2a^2$$

dependiendo de la frecuencia con k^2, en lugar de con k^4.

b) Demuéstrese que para ka arbitrario la sección eficaz total en el menor orden de $(\epsilon-\epsilon_0)/\epsilon_0$ es la expresión dada en *a)* multiplicada por la función:

$$F(z)=1+5z^{-2}-\frac{7}{2}z^{-4}(1-\cos 2z)-z^{-3}\operatorname{sen} 2z-4(z^{-2}-z^{-4})\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos t}{t}\,dt$$

siendo $z=2ka$. (Este resultado es debido a LORD RAYLEIGH, 1914.)

9.15. La abertura, o aberturas, existente en una pantalla plana perfectamente conductora puede considerarse como la posición de fuentes equivalentes que dan lugar a radiación (los campos de difracción). Una abertura cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda actúa como una fuente de radiación dipolar, siendo despreciables las contribuciones de otros multipolos.

a) Partiendo de [9.147], demuéstrese que los momentos dipolares equivalentes eléctrico y magnético pueden expresarse en función de integrales del campo eléctrico tangencial en la abertura en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \epsilon\boldsymbol{n}\int(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}_{\tan})\,da \\ \boldsymbol{m} &= \frac{2}{\pi i\mu\omega}\int(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{\tan})\,da \end{aligned} \qquad [9.72]$$

siendo $\boldsymbol{E}_{\tan}$ el valor *exacto* del campo eléctrico tangencial en la abertura, $\boldsymbol{n}$ la normal a la pantalla plana, dirigida hacia la región de interés, y la integración está extendida a la superficie de las aberturas.

b) Demuéstrese que la expresión para el momento magnético puede transformarse en:

$$\boldsymbol{m}=\frac{2}{\mu}\int\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})\,da \qquad [9.76]$$

Téngase cuidado con las posibles contribuciones del borde de la abertura donde algunas de las componentes de los campos son singulares si la pantalla es de espesor infinitesimal.

9.16. Una pantalla plana perfectamente conductora ocupa la mitad del plano x-y (a saber, $x<0$). A lo largo del eje z y desde la región $z<0$, incide una onda plana de intensidad I_0 y número de ondas k. Discútanse los valores de los campos difractados en el plano paralelo al x-y definido por $z=Z>0$. Sean $(X, 0, Z)$ las coordenadas del punto de observación.

a) Demuéstrese que para la aproximación escalar de Kirchhoff usual y en el límite $Z\gg X$ y $\sqrt{kZ}\gg 1$, el campo difractado es:

$$\psi(X,0,Z,t)\simeq I_0^{\frac{1}{2}}e^{ikZ-i\omega t}\left(\frac{1+i}{2i}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\xi}^{\infty}e^{it^2}\,dt$$

en donde $\xi=(k/2Z)^{\frac{1}{2}}X$.

b) Demuéstrese que la intensidad se puede escribir:

$$I=|\psi|^2=\frac{I_0}{2}[(C(\xi)+\tfrac{1}{2})^2+(S(\xi)+\tfrac{1}{2})^2]$$

en donde $C(\xi)$ y $S(\xi)$ son las llamadas integrales de Fresnel. Determínese el comportamiento asintótico de I para ξ grande y positivo (región iluminada) y para ξ grande y negativo (región de sombra). ¿Cuál es el valor de I para $X=0$? Represéntese I en función de X para Z fijo.

c) Utilícese la fórmula vectorial [9.147] para obtener el resultado equivalente al del apartado *a)*. Compárense las dos expresiones.

9.17. Una onda plana polarizada linealmente, de amplitud E_0 y número de ondas k, incide sobre una abertura circular de radio a practicada en una pantalla plana perfectamente conductora. El vector de onda incidente forma un ángulo α con la normal a la pantalla. El vector de polarización es perpendicular al plano de incidencia.

a) Calcúlense los campos difractados y la potencia transmitida por unidad de ángulo sólido a través de la abertura, utilizando la fórmula vectorial de Smythe-Kirchhoff [9.147] con la suposición de que el campo eléctrico tangencial en la abertura es el de la onda incidente no perturbada.

b) Compárese el resultado del apartado *a)* con la aproximación escalar de Kirchhoff y con el resultado de la sección 9.12, cuando el vector de polarización está en el plano de incidencia.

9.18. Discútase la difracción de una onda plana por un orificio circular de radio a, según la sección 9.12, pero utilizando una aproximación de Kirchhoff basada en [9.136] en lugar de en la fórmula de Smythe [9.147].

a) Demuéstrese que el campo eléctrico difractado en esta aproximación difiere de [9.159] en dos aspectos, el primero que $\cos\alpha$ está reemplazado por $(\cos\theta+\cos\alpha)/2$ y el segundo que aparece un término adicional proporcional a $(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_3)$. Compárese con los factores de oblicuidad θ de la teoría escalar.

b) Evalúese la relación entre la potencia dispersada en esta aproximación vectorial de Kirchhoff y la de [9.162] para la situación indicada en la figura 9.16. Hágase un esquema de las dos distribuciones angulares.

9.19. Una lámina plana perfectamente conductora que ocupa el plano x-y completamente, salvo que existe una abertura rectangular de lados a y $b\geqslant a$ definida por $x=\pm(a/2)$, $y=\pm(b/2)$. Una onda plana incide normalmente con su vector de polarización formando un ángulo β con las aristas largas de la abertura.

a) Calcúlense los campos difractados y la potencia por unidad de ángulo sólido con la relación vectorial de Smythe-Kirchhoff [9.156], suponiendo que el campo eléctrico tangencial en la abertura es el de la onda incidente no perturbado.

b) Calcúlese el resultado correspondiente a la aproximación escalar de Kirchhoff.

c) En el caso en que $b=a$, $\beta=45$ grados, $ka=4\pi$, calcúlense las aproximaciones escalar y vectorial para la potencia difractada por unidad de ángulo sólido en función del ángulo θ para $\phi=0$. Hágase una gráfica de comparación entre los dos resultados.

9.20. Una línea de transmisión cilíndrica coaxial de radio interno a y radio externo b, tiene su eje a lo largo de las z negativas. Ambos conductores, interior y exterior, terminan en $z=0$, y el exterior está conectado a un reborde plano infinito que ocupa todo el plano x-y (excepto el anillo de radio b alrededor del origen). La línea de transmisión se excita a una frecuencia ω en su modo dominante TEM, siendo V el voltaje de pico entre los cilindros. Usese la aproximación vectorial de Smythe-Kirchhoff para discutir los campos radiados, la distribución angular de la radiación y la potencia total radiada.

9.21. *a)* Demuéstrese, a partir de [9.137], que la integral de la sección eficaz diferencial de dispersión de sombra, sumada para todas las polarizaciones que salen, pueden escribirse en el límite de longitudes de onda cortas en la forma

$$\sigma_{so}=\int d^2x_\perp \int d^2x'_\perp \frac{1}{4\pi^2}\int e^{i(x_\perp-x'_\perp)k_\perp}\, d^2k_\perp$$

y, por consiguiente, que σ_{so} es igual al área transversal del objeto, independientemente del detalle de su forma.

b) Aplíquese el teorema óptico a la amplitud de «sombra» [9.173] con el fin de obtener la sección eficaz total en la hipótesis de que en la dirección hacia el frente la contribución del lado iluminado del objeto es despreciable en comparación.

9.22. *a)* Utilizando las amplitudes aproximadas de la sección 9.13, demuéstrese que, para una onda plana polarizada linealmente de número de ondas k incidente sobre una esfera de radio a perfectamente conductora, la sección eficaz diferencial de dispersión en el límite de ka grande en el plano E (ϵ_0, k_0 y k coplanares) es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\ (\text{plano } E)=\frac{a^2}{4}\left[4\cot^2\theta\, J_1^2(ka\,\text{sen}\,\theta)+1-4\cot\theta\, J_1(ka\,\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\left(2ka\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

y en el plano H (ϵ_0 perpendicular a k_0 y k) es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\ (\text{plano } H)=\frac{a^2}{4}\left[4\,\text{cosec}^2\theta\, J_1^2(ka\,\text{sen}\,\theta)+1+4\,\text{cosec}\,\theta\, J_1(ka\,\text{sen}\,\theta)\left(2ka\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

(La curva de trazos en la figura 9.18 es la media de estas dos expresiones.)

b) Búsquense los cálculos exactos en KING y WU, apéndice, o en BOWMAN, SENIOR y USLENGI), págs. 402-405. ¿Están de acuerdo con los resultados exactos los aspectos *cualitativos* de la interferencia entre las amplitudes difractiva y reflectiva que se presenta en la parte *a)*? ¿Y en acuerdo cuantitativo?

9.23. Discútase la difracción debida a un orificio circular de radio a en una lámina plana perfectamente conductora, suponiendo que $ka \ll 1$.

a) Si los campos cerca de la pantalla en el lado de incidencia son $E_0e^{-i\omega t}$ normal y $B_0e^{-i\omega t}$ tangencial, demuéstrese que el campo eléctrico difractado en la zona de Fraunhofer es

$$E=\frac{e^{ikr-i\omega t}}{3\pi r}k^2a^3\left[2c\frac{k}{k}\times B_0+\frac{k}{k}\times\left(E_0\times\frac{k}{k}\right)\right]$$

en donde k es el vector de onda en la dirección de observación.

b) Determínese la distribución angular de la radiación difractada y demuéstrese que la potencia total transmitida a través del agujero es

$$P=\frac{2\epsilon_0 c}{27\pi}k^4a^6(4c^2B_0^2+E_0^2)$$

9.24. Particularizar la discusión del problema 9.23 a la difracción de una onda plana por una abertura circular pequeña. Trátese el caso general de incidencia oblicua con un ángulo α respecto de la normal, y con polarización en el plano de incidencia y perpendicular a él.

a) Calcúlense las distribuciones angulares de la radiación difractada y compárese con los resultados de la aproximación vectorial de Smythe-Kirchhoff de la sección 9.12 y problema 9.17 en el caso límite $ka \ll 1$.

b) Calcúlese la intensidad de difracción en el plano de incidencia, para las condiciones de la figura 9.16 (pero con $ka \ll 1$) y compárense los valores relativos con la curva continua de la figura 9.16 (utilícese un transportador de ángulos y una regla para leer los valores de la figura 9.16 para varios ángulos).

c) Demuéstrese que los coeficientes de transmisión definidos anteriormente en [9.164] para los dos estados de polarización son

$$T_{\parallel} = \frac{64}{27\pi^2}(ka)^4 \left(\frac{4 + \operatorname{sen}^2 \alpha}{4 \cos \alpha} \right)$$

$$T_{\perp} = \frac{64}{27\pi^2}(ka)^4 \cos \alpha$$

Obsérvese que estos factores de transmisión son más pequeños, en un factor $(ka)^2$, que los dados por la aproximación vectorial de Kirchhoff en el mismo caso límite.

9.25. Una esfera sólida uniforme de radio R y conductividad σ actúa como un objeto dispersante de radiación de frecuencia ω. La longitud de onda λ es mucho mayor que R y la conductividad es lo bastante grande para que la profundidad de penetración a esta frecuencia sea pequeña comparada con R. Sobre la esfera incide un haz de radiación no polarizada.

a) Calcúlese la sección eficaz de absorción de la esfera, definida como la potencia total absorbida por la esfera dividida por la potencia incidente por unidad de área. Demuéstrese que varía como $(\omega)^{1/2}$ si la conductividad es independiente de la frecuencia.

b) Compárese la sección eficaz de absorción obtenida en la parte *a)* con la sección eficaz de dispersión, calculada en la aproximación de orden cero en δ/R. Demuéstrese que la relación es:

$$\frac{\sigma_{\text{dis}}}{\sigma_{\text{abs}}} \simeq \frac{10}{9} \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}} \frac{R^4}{c^4} \omega^{7/2}$$

9.26. Una onda plana no polarizada de frecuencia $\omega = ck$ es dispersada por una esfera dieléctrica isótropa y uniforme de radio R mucho menor que la longitud de onda. La esfera posee una constante dieléctrica real ϵ y una conductividad real σ. Los parámetros son tales que la profundidad de penetración δ es muy *grande* comparada con el radio R.

a) Calcúlense las secciones eficaces de dispersión diferencial y total.

b) Demuéstrese qué sección eficaz de absorción es

$$\sigma_{\text{abs}} = 12\pi R^2 \frac{\epsilon_0 (R\sigma/c)}{(\epsilon + 2\epsilon_0)^2 + (\sigma/\omega)^2}$$

c) A partir de los resultados de la parte *a)* exprésese la amplitud de dispersión frontal y utilícese el teorema óptico para calcular la sección eficaz total. Compárese el resultado con la suma de las secciones totales de absorción y dispersión de *a)* y *b)*. Coméntese.

9.27. La dispersión por la esfera dieléctrica del problema 9.26 se trató como una dispersión puramente dipolar eléctrica. Esto resulta adecuado salvo cuando ocurre que la parte real de la constante dieléctrica ϵ es muy grande. En estas circuns-

tancias es posible que haya una contribución importante dipolar magnética aun cuando sea de orden superior en kR.

a) Demuéstrese que el flujo magnético variable de la onda incidente induce una corriente acimutal en la esfera y produce un momento dipolar magnético:

$$\boldsymbol{m}=\frac{i\sigma}{\mu_0\omega\epsilon}(kR)^2\frac{R^3}{30}\boldsymbol{B}_{\text{inc}}$$

b) Demuéstrese que la aplicación del teorema óptico a la suma coherente de las contribuciones dipolares eléctrica y magnética conduce a una sección eficaz total

$$\sigma_t=12\pi R^2\epsilon_0(k\sigma/c)\left[\frac{1}{(\epsilon+2\epsilon_0)^2+(\sigma/\omega)^2}+\frac{1}{90}(kR)^2\right]$$

(compárese con LANDAU y LIFSHITZ, *Electrodynamics of Continuous media*, página 304).

MAGNETOHIDRODINAMICA Y FISICA DE PLASMAS

10.1. INTRODUCCION Y DEFINICIONES

La magnetohidrodinámica y la física de plasmas tratan ambas el comportamiento de un sistema combinado de campos electromagnéticos y un líquido, o gas, conductor. La conducción tiene lugar cuando existen electrones libres o casi libres que pueden moverse bajo la acción de los campos aplicados. En un conductor sólido, en realidad, los electrones están enlazados, pero pueden recorrer distancias considerables (a la escala atómica) en el interior de la red cristalina antes de sufrir colisiones. Cuando se aplican campos al conductor sólido, se observan efectos dinámicos como la conducción y el efecto Hall, pero en general no hay desplazamiento de masa. Los efectos de los campos aplicados sobre los átomos mismos se toman en consideración como tensiones en la estructura de la red. Por otra parte, en el caso de un fluido, los campos actúan sobre ambos, electrones y átomos ionizados, produciendo efectos dinámicos que incluyen el movimiento convectivo del medio mismo. Este desplazamiento de masa, a su vez, produce modificaciones en los campos electromagnéticos. Como consecuencia, hemos de tratar un sistema complicado de campos y materia acoplados.

La distinción entre la magnetohidrodinámica y la física de plasmas no es nítida. No obstante, se presentan dominios claramente separados en los cuales solamente los conceptos de una u otra son aplicables. Un modo de descubrir esta distinción es fijarnos en la forma en que se establece la relación $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ para una sustancia conductora. En el modelo sencillo de Drude se imagina que los electrones son acelerados por los campos aplicados, pero al ser alterada su dirección por las colisiones, su movimiento en la dirección del campo se ve frenado por una fuerza equivalente de fricción $\nu m\boldsymbol{v}$, siendo ν una frecuencia efectiva de colisión. La ley de Ohm representa justamente un balance entre la fuerza aplicada y la de fricción. Cuando la frecuencia de los campos aplicados se hace comparable a ν, los electrones tienen tiempo de acelerar y desacelerar entre dos colisiones. Entonces, aparecen efectos inerciales y la conductividad se hace compleja. Por desgracia, a estas mismas frecuencias la descripción de las colisiones mediante una fuerza de fricción tiende a perder su validez. El proceso global se hace más complicado. A frecuencias bastante por encima de la frecuencia de colisión sucede otra cosa. Los electrones e iones son acelerados por los campos eléctricos en sentidos opuestos y tienden a separarse. Esta separación de carga hace aparecer fuerzas electrostáticas recuperadoras muy intensas y tienen lugar oscilaciones en la densidad de carga. Estas oscilaciones se

denominan *oscilaciones de plasma* y no debemos confundirlas con oscilaciones de menor frecuencia en las que hay el movimiento del fluido, pero no separación de carga. Estas oscilaciones de baja frecuencia reciben el nombre de *ondas magnetohidrodinámicas.*

En los líquidos conductores o gases ionizados densos, la frecuencia de colisión es suficientemente alta incluso para los conductores muy buenos, de modo que hay un amplio intervalo de frecuencias en las que la ley de Ohm es válida en su forma sencilla. Bajo la acción de los campos aplicados, los electrones y los iones se mueven de tal modo que no hay separación de carga, dejando aparte ciertas fluctuaciones de alta frecuencia («jitter»). Si aparecen campos eléctricos, son debidos a movimiento del fluido que produce flujo de corriente, o como resultado de campos magnéticos variables con el tiempo o de distribuciones de carga externas al fluido. El movimiento mecánico del sistema se puede describir mediante un fluido conductor único con las variables hidrodinámicas usuales: densidad, velocidad y presión. Para bajas frecuencias se suele despreciar la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère. Esta aproximación es la que recibe el nombre de *magnetohidrodinámica.*

En gases ionizados menos densos, la frecuencia de colisión es menor. Todavía puede existir un dominio de baja frecuencia en el que las ecuaciones de la magnetohidrodinámica sean aplicables a procesos casi estacionarios. Las aplicaciones astrofísicas caen en esta categoría. Sin embargo, para frecuencias mayores no es frecuentemente permisible despreciar la separación de carga y la corriente de desplazamiento. Además, para la descripción del movimiento debemos incluir separadamente los efectos inerciales de los electrones e iones. Este es el dominio que llamamos *física del plasma.* En este caso hay un cierto margen de condiciones físicas en el que un modelo de dos fluidos, electrones e iones, suministra una descripción aproximadamente correcta de varios fenómenos. Pero para altas temperaturas y densidades pequeñas debemos incluir las discrepancias de las velocidad de las partículas respecto de sus valores medios. Entonces, la descripción se hace mediante la ecuación de Boltzmann, con correlaciones de corto alcance o sin ellas. No vamos a intentar aquí entrar en todos estos detalles. A temperaturas aún mayores y densidades menores, las fuerzas electrostáticas recuperadoras se hacen tan débiles que la escala de distancias en que tiene lugar la separación de carga se hace grande comparada con el tamaño de la región de interés. El comportamiento colectivo que lleva implícito cualquier modelo de fluido se ha perdido completamente. Lo que nos queda son unas pocas partículas cargadas que se mueven rápidamente e interaccionan mediante colisiones coulombianas. Por definición, se considera plasma a un gas ionizado en el que la longitud, que separa el comportamiento colectivo a gran escala del comportamiento como partículas individuales a pequeña escala, es pequeña comparada con las longitudes características de interés. Esta longitud, llamada *radio de apantallamiento de Debye,* se discutirá en la sección 10.10. Numéricamente, es igual a $9{,}71\ (T/n)^{\frac{1}{2}}$ cm, en donde T es la temperatura absoluta en grados Kelvin, y n, el número de electrones por centímetro cúbico. Para todos los plasmas, salvo los más calientes y los más tenues, es pequeña comparada con 1 cm.

10.2. ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINAMICA

En primer lugar, consideraremos el comportamiento de un fluido conductor, eléctricamente neutro, en campos electromagnéticos. Para simplificar, supondremos que el fluido es no permeable. El fluido viene descrito por una densidad másica $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, una velocidad $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, una presión $p(\boldsymbol{x}, t)$ (considerada como escalar) y una conductividad real σ. Las ecuaciones hidrodinámicas son la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \qquad [10.1]$$

y la de fuerza

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{F}_v + \rho \boldsymbol{g} \qquad [10.2]$$

Además de las fuerzas magnética y de presión, hemos incluido fuerzas debidas a la gravedad y a la viscosidad. Si se trata de un fluido incompresible, la fuerza viscosa puede escribirse:

$$\boldsymbol{F}_v = \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} \qquad [10.3]$$

siendo η el coeficiente de viscosidad. Deberemos hacer notar que la derivada de la velocidad con respecto al tiempo que aparece en el primer miembro de [10.2] es la *derivada convectiva*:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \qquad [10.4]$$

que da la velocidad de cambio con el tiempo de cualquier magnitud que se está moviendo en un instante dado con la velocidad $\boldsymbol{v}$.

Al despreciar la corriente de desplazamiento, los campos electromagnéticos en el fluido vienen descritos por

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{J} \end{aligned}\right\} \qquad [10.5]$$

La condición $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$, que equivale a despreciar las corrientes de desplazamiento se deduce de la segunda ecuación [10.5]. Hemos omitido en [10.5] las dos ecuaciones de la divergencia. De la ley de Faraday se deduce que $(\partial/\partial t)$ $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ y como condición inicial se puede imponer el requisito $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$. Si despreciamos la corriente de desplazamiento, resulta adecuado ignorar también la ley de Coulomb. La razón está en que el campo eléctrico queda completamente determinado por las ecuaciones [10.5] y la ley de Ohm (véase más adelante). Si se retiene la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère y se toma en cuenta que $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_e/\epsilon_0$, resultan correcciones que son sólo del orden de (v^2/c^2). En los problemas magnetohidrodinámicos normales tales correcciones son completamente despreciables.

Para completar las ecuaciones dinámicas debemos especificar la relación entre la densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ y los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Si se trata de un medio de conductividad σ, se cumple la ley de Ohm y la densidad de corriente viene dada por

$$\boldsymbol{J}'=\sigma\boldsymbol{E}' \qquad [10.6]$$

en la que $\boldsymbol{J}'$ y $\boldsymbol{E}'$ están medidas en el sistema en el que el medio está en reposo. Para un medio que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ relativa al sistema laboratorio, debemos transformar tanto la densidad de corriente como el campo eléctrico en forma apropiada. La transformación del campo no relativista viene dada por la ecuación [6.10]. Análogamente, la densidad de corriente en el laboratorio es:

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}'+\rho_e\boldsymbol{v} \qquad [10.7]$$

en donde ρ_e es la densidad de carga eléctrica. Para un fluido conductor de un solo componente, $\rho_e=0$. Por tanto, la ley de Ohm toma la forma

$$\boldsymbol{J}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad [10.8]$$

A veces es posible suponer que la conductividad del fluido es infinita. En tal caso, el fluido, bajo la acción de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, fluye de modo que se cumple:

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0 \qquad [10.9]$$

Las ecuaciones [10.1], [10.2], [10.5] y [10.8], junto con una ecuación de estado para el fluido, constituyen las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. En la sección siguiente consideraremos algunos de sus aspectos más simples y elaboraremos los conceptos básicos necesarios.

10.3. DIFUSION, VISCOSIDAD Y PRESION MAGNETICAS

El comportamiento de un fluido en presencia de campos electromagnéticos está gobernado en gran parte por el valor de la conductividad. Los efectos son a la vez electromagnéticos y mecánicos. Consideraremos en primer lugar los efectos electromagnéticos. Veremos que, según sea la conductividad, se presentan comportamientos de los campos completamente distintos. La dependencia temporal del campo magnético puede expresarse, si eliminamos $\boldsymbol{E}$ mediante [10.8], de la forma

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\boldsymbol{B} \qquad [10.10]$$

En esta fórmula se ha supuesto que σ es constante en el espacio. Cuando el fluido está en reposo [10.10] se reduce a la ecuación de difusión

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\boldsymbol{B} \qquad [10.11]$$

Esto significa que una configuración inicial del campo magnético decrecerá

con un tiempo de difusión

$$\tau = \mu_0 \sigma L^2 \qquad [10.12]$$

en donde L es una longitud característica de la variación espacial de $\boldsymbol{B}$. El tiempo τ es del orden de 1 seg para una esfera de cobre de 1 cm de radio, del orden de 10^4 años para el núcleo fundido de la Tierra y del orden de 10^{10} años para un campo magnético de los que suelen presentarse en el Sol.

Para intervalos de tiempo cortos comparados con el tiempo de difusión (o, en otras palabras, cuando la conductividad es tan grande que pueda despreciarse el segundo término de [10.10]), el comportamiento temporal del campo magnético viene dado por

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad [10.13]$$

De [6.5] y lo indicado en la nota al pie de página correspondiente, puede verse que esto es equivalente a enunciar que el flujo del campo magnético que atraviesa cualquier curva cerrada que se mueve con la velocidad local del fluido es invariable con el tiempo. Decimos que las líneas de fuerza están congeladas en el fluido y son transportadas por él. Como la conductividad es infinita, resulta aplicable [10.9]. La componente de $\boldsymbol{v}$ perpendicular a $\boldsymbol{B}$ puede identificarse como la velocidad $\boldsymbol{w}$ de las líneas de fuerza:

$$\boldsymbol{w} = \frac{(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{B}}{B^2} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2} \qquad [10.14]$$

Esta es la llamada «deriva $E \times B$» para ambos, líneas de fuerza y fluido, que puede interpretarse en función de las órbitas de las partículas individuales, electrones e iones, en los campos eléctrico y magnético cruzados (véase la sección 12.4).

Para distinguir entre las situaciones en las que tiene lugar una difusión de las líneas de campo respecto al fluido, de aquellas en que dichas líneas de fuerza se hallan congeladas, resulta útil el uso de un parámetro llamado *número de Reynolds magnético* R_M. Si V es una velocidad y L una longitud características del problema, el número de Reynolds magnético se define por:

$$R_M = \frac{V\tau}{L} \qquad [10.15]$$

siendo τ el tiempo de difusión [10.12]. Si $R_M \gg 1$, el transporte de las líneas de fuerza predomina sobre la difusión. Para los líquidos como el mercurio o el sodio fundido en condiciones usuales en el laboratorio $R_M < 1$, excepto si las velocidades son muy grandes. En cambio, en problemas geofísicos y astrofísicos, R_M puede ser muy grande frente a la unidad.

Por medio de la ecuación de fuerza [10.2], podemos estudiar el comportamiento mecánico del sistema. Si sustituimos $\boldsymbol{J}$ según [10.8], tenemos:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \sigma B^2 (\boldsymbol{v}_\perp - \boldsymbol{w}) \qquad [10.16]$$

en donde $\boldsymbol{F}$ representa la suma de todas las fuerzas no electromagnéticas, y $\boldsymbol{v}_\perp$

es la componente de la velocidad perpendicular a $\boldsymbol{B}$. Según [10.16] vemos que el flujo paralelo a $\boldsymbol{B}$ viene regido solamente por las fuerzas no electromagnéticas. Por otra parte, la velocidad de la corriente de fluido perpendicular a $\boldsymbol{B}$ decrece a partir de un cierto valor inicial arbitrario en un tiempo del orden de

$$\tau' = \frac{\rho}{\sigma B^2} \qquad [10.17]$$

hasta un valor

$$\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{w} + \frac{1}{\sigma B^2} \boldsymbol{F}_\perp \qquad [10.18]$$

Para el caso límite de conductividad infinita, este resultado se reduce al [10.14], tal como era de esperar. El término proporcional a B^2 en la expresión [10.16] es equivalente a una fuerza viscosa que tiende a impedir el flujo de fluido perpendicularmente a las líneas de fuerza magnética. A veces, se describe como una viscosidad magnética. Si la viscosidad ordinaria, que nosotros hemos englobado en $\boldsymbol{F}$, es comparable a la viscosidad magnética, el tiempo de decrecimento τ' se acorta en un factor que contiene la razón de ambas viscosidades.

Las consideraciones anteriores nos han demostrado que, si la conductividad es grande, las líneas de fuerza están congeladas en el fluido y se mueven con él. Cualquier desviación respecto a esta situación desaparece con rapidez. Al considerar los efectos mecánicos o electromagnéticos hemos considerado las magnitudes como datos, pero, naturalmente, las ecuaciones están acopladas. En el caso límite de conductividad muy grande, resulta conveniente utilizar la ley de Ampère para relacionar la densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ que aparece en la ecuación de la fuerza con la inducción magnética $\boldsymbol{B}$, y emplear la expresión [10.9], correspondiente a conductividad infinita, para eliminar $\boldsymbol{E}$ en la ley de Faraday para llegar a [10.13]. El término de fuerza magnética de [10.2] puede escribirse ahora:

$$(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) = -\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) \qquad [10.19]$$

Y mediante la identidad vectorial

$$\frac{1}{2} \nabla(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) \qquad [10.20]$$

podemos transformar la ecuación [10.19] en

$$(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \qquad [10.21]$$

Esta ecuación demuestra que la fuerza magnética equivale a una *presión hidrostática magnética,*

$$p_M = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad [10.22]$$

más un término que se puede considerar como una tensión adicional a lo largo de las líneas de fuerza. Podemos también obtener el resultado [10.21] a partir del tensor de esfuerzos de Maxwell (véase la sección 6.8).

Si despreciamos los efectos de viscosidad y suponemos que la fuerza gravitatoria es derivable del potencial $\boldsymbol{g} = -\nabla\psi$, la ecuación de fuerza [10.2] toma la forma

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla(p + p_M + \rho\psi) + \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \qquad [10.23]$$

En algunos casos geométricamente sencillos, como, por ejemplo, cuando $\boldsymbol{B}$ tiene solamente un componente, la tensión adicional es nula, y así las propiedades estáticas del fluido vienen descritas por

$$p + p_M + \rho\psi = \text{constante} \qquad [10.24]$$

Esto nos dice que, salvo los efectos gravitatorios, cualquier variación de la presión mecánica debe compensarse con una variación opuesta de la presión magnética. Si el fluido se halla confinado en una región tal que p decrece rápidamente hasta anularse fuera de dicha región, la presión magnética deberá aumentar con igual rapidez para que el fluido pueda estar confinado. Este es el principio del efecto pinza que se discute en la sección 10.5.

10.4. FLUJO MAGNETOHIDRODINAMICO ENTRE PAREDES, CON CAMPOS ELECTRICO Y MAGNETICO CRUZADOS

Con el fin de ilustrar la competición existente entre el efecto de congelación de las líneas de fuerza y la difusión a través de ellas, y entre el arrastre $E \times B$ y el comportamiento impuesto por las condiciones de contorno, consideraremos un ejemplo sencillo que consiste en un fluido conductor incompresible, pero viscoso, que fluye en la dirección del eje x entre dos superficies no conductoras situadas en los planos $z=0$ y $z=a$ (Fig. 10.1). Dichas superficies se mueven, respectivamente, con velocidades V_1 y V_2 en la dirección x. Según la dirección z, actúa un campo magnético uniforme B_0. El sistema es infinito en las direcciones x e y. Buscaremos una solución estacionaria del flujo en la

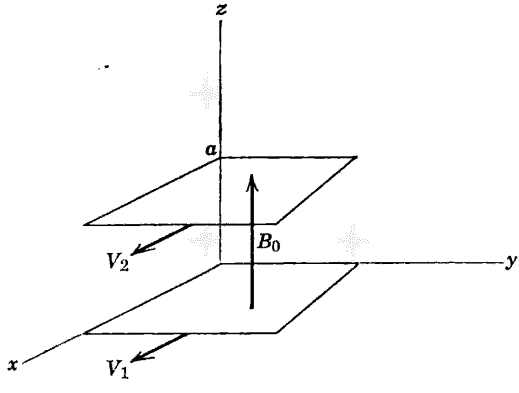


FIG. 10.1. Flujo de un fluido conductor viscoso en un campo magnético entre dos superficies planas moviéndose con velocidades distintas.

dirección x, en la que las distintas magnitudes dependan solamente de la variable z.

Si los campos no varían con el tiempo, las ecuaciones de Maxwell [10.5] nos dicen que cualquier campo eléctrico presente, debe ser un campo electrostático derivable de un potencial y determinado únicamente por las condiciones en el contorno, esto es, un campo externo arbitrario. La expresión [10.14], que nos da la velocidad de las líneas de fuerza cuando σ es infinita, implica que en la dirección y haya un campo eléctrico. Si suponemos que ésta sea la única componente del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, entonces debe ser constante, E_0. Como el fluido en movimiento tenderá a arrastrar consigo las líneas de fuerza podemos esperar que exista componente x de la inducción magnética $B_x(z)$, así como componente z, B_0.

La ecuación de continuidad [10.1] se reduce a $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ para un fluido incompresible. Esta condición es satisfecha de forma idéntica por una velocidad en la dirección x que dependa exclusivamente de la variable z. La ecuación de fuerza, despreciando el término debido a la gravedad, adquiere así la forma estacionaria

$$\nabla p = (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} \qquad [10.25]$$

La única componente de $\boldsymbol{J}$ que no se anula es $J_y(z)$:

$$J_y(z) = \sigma[E_0 - B_0 v(z)] \qquad [10.26]$$

en donde v es la componente de la velocidad según el eje x. Si escribimos las ecuaciones para las tres componentes de [10.25], obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \sigma B_0 (E_0 - B_0 v) + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\sigma B_x (E_0 - B_0 v) \end{aligned}\right\} \qquad [10.27]$$

La fuerza magnética en la dirección z queda exactamente equilibrada por el gradiente de presión. Si suponemos que no hay gradiente de presión en la dirección x, podemos expresar la primera de estas ecuaciones así:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \left(\frac{M}{a}\right)^2 v = -\left(\frac{M}{a}\right)^2 \frac{E_0}{B_0} \qquad [10.28]$$

en donde

$$M = \left(\frac{\sigma B_0^2 a^2}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad [10.29]$$

recibe el nombre de *número de Hartmann*. Según [10.17], se puede comprobar que M^2 es la razón entre la viscosidad magnética y la viscosidad ordinaria. La solución a la ecuación [10.28], sujeta a las condiciones de contorno $v(0) = V_1$

y $v(a)=V_2$, se encuentra fácilmente que es:

$$v(z)=\frac{V_1}{\operatorname{senh} M}\operatorname{senh}\left[M\left(\frac{a-z}{a}\right)\right]+\frac{V_2}{\operatorname{senh} M}\operatorname{senh}\left(\frac{Mz}{a}\right)+\frac{E_0}{B_0}\left\{1-\frac{\operatorname{senh}\left[M\left(\frac{a-z}{a}\right)\right]+\operatorname{senh}\left(\frac{Mz}{a}\right)}{\operatorname{senh} M}\right\} \qquad [10.30]$$

Para el caso límite $B_0\to 0$, $M\to 0$, se obtiene el resultado usual del flujo laminar

$$v(z)=V_1+\frac{z}{a}(V_2-V_1) \qquad [10.31]$$

En el otro caso límite que sea $M\gg 1$, será de esperar que predomine la viscosidad magnética, y el flujo vendrá determinado casi por completo por la deriva $E\times B$. Si tomamos el valor aproximado de $v(z)$ cuando $z\ll a$ y $M\gg 1$, obtenemos:

$$v(z)\simeq\frac{E_0}{B_0}+\left(V_1-\frac{E_0}{B_0}\right)e^{-Mz/a} \qquad [10.32]$$

Lo cual nos muestra que, a pesar de ser $v(z)=V_1$ exactamente sobre la superficie, hay una transición rápida en una distancia del orden de (a/M) hasta alcanzar el valor (E_0/B_0) correspondiente al arrastre $E\times B$. En las proximidades de $z=a$, la expresión [10.32] debe cambiarse reemplazando V_1 por V_2, y z por $(a-z)$. En la figura 10.2 se representa el perfil de velocidades para los dos casos límite [10.31] y [10.32].

El campo magnético $B_x(z)$ viene determinado por la ecuación

$$\frac{\partial B_x}{\partial z}=\mu_0 J_y=\mu_0\sigma(E_0-B_0 v) \qquad [10.33]$$

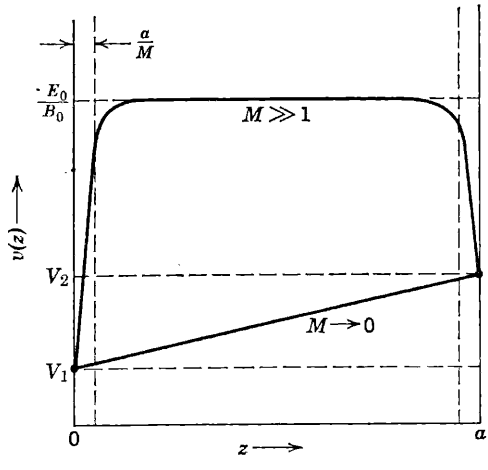


FIG. 10.2. Perfiles de velocidad para números de Hartmann grandes y pequeños. Cuando $M\to 0$, se tiene el flujo laminar. Cuando $M\gg 1$, el flujo viene dado por la velocidad de deriva $E\times B$, excepto en las proximidades de las paredes.

Las condiciones de contorno correspondientes a B_x para $z=0$ y $z=a$ no están determinadas a menos que conozcamos con detalle la historia de cómo se ha llegado al estado estacionario, o bien, que se pueda utilizar algún argumento de simetría. Todo lo que sabemos es que la diferencia en B_x está relacionada con el flujo total de corriente en la dirección y por cada unidad de longitud en la dirección x:

$$B_x(a) - B_x(0) = \mu_0 \int_0^a J_y(z)\, dz \qquad [10.34]$$

Esta indeterminación surge de la naturaleza unidimensional del problema. Para mayor sencillez, calcularemos el campo magnético solamente en el caso en que la corriente total en la dirección y es cero *. Entonces podemos suponer que B_x es nulo para $z=0$ y $z=a$. Si sustituimos en [10.33] el valor de la velocidad dado por [10.30], es fácil demostrar la expresión

$$B_x(z) = B_0 \left[(\mu_0 \sigma a^2) \left(\frac{V_2 - V_1}{2a} \right) \right] \left\{ \frac{\cosh \frac{M}{2} - \cosh \left(\frac{M}{2} - \frac{Mz}{a} \right)}{M \operatorname{senh} \frac{M}{2}} \right\} \qquad [10.35]$$

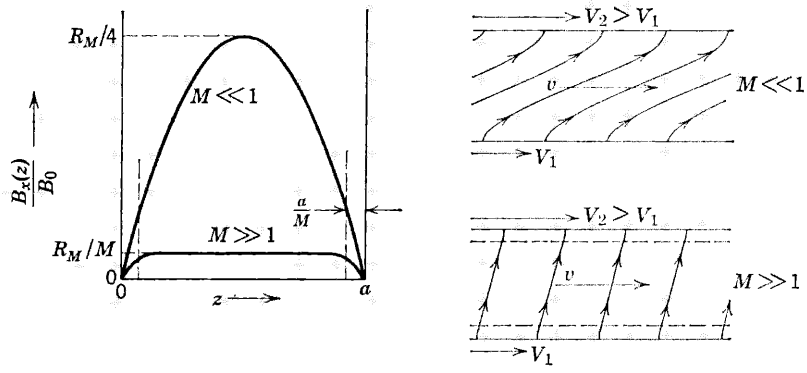


FIG. 10.3. *a)* Componente axial de la inducción magnética entre las dos superficies cuando el número de Hartmann es grande y pequeño. *b)* Transporte de las líneas de inducción magnética en la dirección de flujo.

El coeficiente adimensional que aparece en el corchete de [10.35] puede identificarse como el número de Reynolds magnético [10.15], ya que $(V_2 - V_1)/2$ es una velocidad característica del problema y a una longitud que también lo es. Para los dos casos límite $M \ll 1$ y $M \gg 1$, la expresión [10.35] se reduce a

$$B_x(z) \simeq R_M B_0 \begin{cases} \dfrac{z}{a}\left(1 - \dfrac{z}{a}\right), & \text{para } M \ll 1 \\ \dfrac{1}{M}\left[1 - (e^{-Mz/a} + e^{-M(a-z)/a})\right], & \text{para } M \gg 1 \end{cases} \qquad [10.36]$$

En la figura 10.3 se representa el comportamiento de las líneas de fuerza en los dos casos límite. Hay transporte de las líneas de fuerza apreciable única-

* Este requisito significa que $E_0/B_0 = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$.

mente cuando R_M es grande. Para un valor dado de R_M, dicho transporte es tanto menor cuanto mayor sea el número de Hartmann.

Las constantes características del mercurio a la temperatura ordinaria son:

$$\sigma = 1{,}04 \times 10^6 \text{ mhos/m}$$
$$\eta = 1{,}5 \times 10^{-2} \text{ poise}$$
$$\rho = 13{,}5 \text{ gm/cm}^3$$

El tiempo de difusión [10.12] es $\tau = 13{,}1\ [L(\text{m})]^2$ seg. El número de Hartmann [10.29] es $M = 2{,}64 \cdot 10^4 B_0(\text{tesla})\ a(\text{m})$. Si se tiene $L \simeq a \simeq 1$ cm, tenemos que el número de Reynolds magnético es $R_M \sim 10^{-4}\ V$. Por tanto, a menos que sea muy grande la velocidad de flujo, no hay transporte apreciable de las líneas de fuerza en las experiencias de laboratorio efectuadas con mercurio. Por otro lado, si la inducción magnética B_0 es del orden de 10^4 gauss, $M \sim 250$ y la velocidad de flujo viene determinada casi por completo por el arrastre $E \times B$ [10.14]. En los problemas geomagnéticos y astrofísicos, los valores de los parámetros son tales (por ejemplo, la escala de longitudes características) que sucede con frecuencia que $R_M \gg 1$ y el arrastre de las líneas de fuerza llega a ser muy importante.

10.5. EFECTO DE CONSTRICCION

El confinamiento de un plasma o fluido conductor por sus propios campos magnéticos resulta de interés considerable en la investigación termonuclear, así como en otras aplicaciones. Para ilustrar los principios básicos consideraremos un cilindro infinito de fluido conductor en el que hay una corriente axial $J_z = J(r)$ y la inducción magnética acimutal asociada $B_\phi = B(r)$. Por simplicidad, se supone que, densidad de corriente, campo magnético, presión, etc., dependen solamente de la distancia r al eje del cilindro, y vamos a despreciar las fuerzas debidas a la gravedad y a la viscosidad. En primer lugar, vamos a preguntarnos si puede existir alguna condición en estado estacionario para que la sustancia quede confinada en el interior de un cierto radio $r = R$ por la acción de su propia inducción magnética. Para un estado estacionario con $\boldsymbol{v} = 0$, la ecuación de movimiento del fluido [10.23] se reduce a

$$0 = -\frac{dp}{dr} - \frac{d}{dr}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) - \frac{B^2}{\mu_0 r} \qquad [10.37]$$

La ley de Ampère en forma integral relaciona $B(r)$ con la corriente encerrada:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{r}\int_0^r rJ(r)\,dr \qquad [10.38]$$

Sin especificar la forma de $J(r)$, salvo limitaciones físicas, como que sea finita, etc., pueden obtenerse cierto número de resultados. Según la ley de Ampère es evidente que, si el fluido está casi todo él en el interior de $r = R$, la inducción magnética en el exterior del fluido es

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad [10.39]$$

en donde

$$I = \int_0^R 2\pi r J(r)\, dr$$

es la corriente total que fluye en el interior del cilindro. Podemos expresar la ecuación [10.37] como

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2\mu_0 r^2}\frac{d}{dr}(r^2B^2) \qquad [10.40]$$

con la solución

$$p(r) = p_0 - \frac{1}{2\mu_0}\int_0^r \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2B^2)\, dr \qquad [10.41]$$

Aquí p_0 es la presión del fluido para $r=0$. Por estar el fluido contenido en $r \leqslant R$, la presión decrece hasta el valor cero para $r=R$. Por tanto, la presión en el eje p_0 viene dada por

$$p_0 = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^R \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2B^2)\, dr \qquad [10.42]$$

Podemos reemplazar el límite superior de la integral por infinito puesto que el integrando es nulo para $r \geqslant R$, tal como se puede ver por [10.39]. Con esta expresión [10.42] de p_0 podemos escribir [10.41] de la forma

$$p(r) = \frac{1}{2\mu_0}\int_r^R \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2B^2)\, dr \qquad [10.43]$$

Podemos relacionar la presión media en el interior del cilindro con la corriente total I y el radio R sin que haga falta especificar detalladamente el comportamiento radial. Así,

$$\langle p \rangle = \frac{2\pi}{\pi R^2}\int_0^R rp(r)\, dr \qquad [10.44]$$

Integrando por partes y mediante [10.40], tenemos

$$\langle p \rangle = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} \qquad [10.45]$$

que es una relación entre la presión media, la corriente total y el radio del cilindro de fluido o plasma confinado por su propio campo magnético. Obsérvese que la presión media de la sustancia es igual a la presión magnética $(B^2/2\mu_0)$ en la superficie del cilindro. En experiencias termonucleares nos enfrentamos con plasmas calientes cuya temperatura es del orden de 10^8 °K ($kT \sim 10$ kev) y cuya densidad es del orden de 10^{15} partículas/cm^3. A estas condiciones corresponden presiones de unos $10^{15} \cdot 10^8 k \simeq 1{,}4 \cdot 10^6$ newton/m^2 o 14 atm. Para que haya confinamiento se requiere una inducción magnética de unos 19 kilogauss en la superficie, que corresponden a una corriente de $9 \cdot 10^6\ R$ (m) amp. Esto nos demuestra que para confinar plasmas muy calientes se requieren corrientes extremadamente altas.

Hasta el momento no hemos entrado en la discusión del comportamiento radial del sistema. Para hacernos una idea de las distintas posibilidades, citaremos dos ejemplos sencillos. Uno es aquel en que la densidad de corriente $J(r)$ es constante para $r < R$. En tal caso $B(r) = (\mu_0 Ir/2\pi R^2)$ para $r < R$. La ecuación [10.43] nos da una función de tipo parabólico para la presión

$$p(r) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad [10.46]$$

La presión p_0 en el eje es el doble de la presión media $\langle p \rangle$. En la figura 10.4 se representa la variación de las distintas magnitudes con el radio.

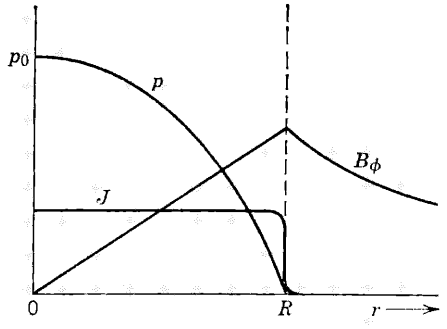


FIG. 10.4. Variación de la inducción magnética acimutal y la presión con el radio en una columna cilíndrica de plasma de densidad de corriente J uniforme.

En el otro modelo la corriente circula únicamente en una capa superficial muy delgada, como resulta adecuado para un fluido o plasma muy conductor. La inducción magnética está dada por [10.39] cuando $r > R$, pero se anula dentro del cilindro. Por tanto, la presión es constante dentro del cilindro, con el valor [10.45]. Esto es lo que se representa en la figura 10.5.

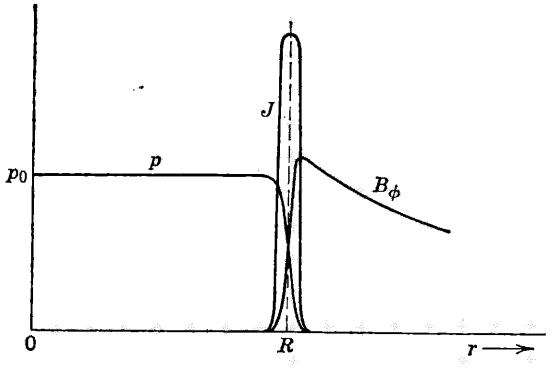


FIG. 10.5. Variación de la inducción magnética acimutal y de la presión en una columna cilíndrica de plasma con una densidad de corriente superficial.

10.6. INESTABILIDADES EN UNA COLUMNA DE PLASMA MANTENIDA POR CONSTRICCION

El régimen estacionario descrito en la sección anterior es una situación ideal que no puede conseguirse en el laboratorio sin una topología de los campos y las corrientes considerablemente más complicada que la configuración geométrica sencilla del cilindro allí considerada. La razón está en que un plasma autoconstreñido se ve sometido a numerosas inestabilidades. Hay inestabilidades magnetohidrodinámicas que pueden interpretarse en función de las presiones y tensiones magnéticas y hay inestabilidades que están asociadas al movimiento de las partículas. Aquí consideraremos sólo las del primer tipo y restringiremos la discusión a los aspectos cualitativos de dos de las clases más sencillas de inestabilidad. Como punto de partida tomaremos una columna de plasma cilíndrica y uniforme con el campo magnético que la rodea y nos preguntaremos lo que sucede cuando ocurren desviaciones de la forma de cilindro circular de radio constante.

La primera es la llamada *inestabilidad de comba,* dibujada en la figura 10.6, *a).* Las líneas de la inducción magnética acimutal se agrupan en la parte superior y se separan en la inferior, de modo que la columna desciende al deformarse. Por consiguiente, la presión magnética varía en tal sentido que hace aumentar la deformación. La distorsión es inestable.

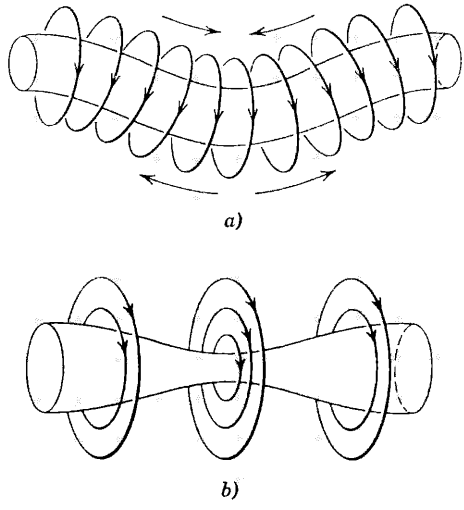


FIG. 10.6. *a)* Inestabilidad de comba. *b)* Inestabilidad de salchicha o garganta.

El segundo tipo recibe el nombre de *inestabilidad de garganta o salchicha* (Fig. 10.6, *b*). En las vecindades del estrechamiento aumenta la inducción magnética acimutal, dando lugar a una presión magnética hacia dentro mayor en la garganta que en cualquier otro lugar. Esto contribuye a aumentar la distorsión existente.

Ambos tipos de inestabilidad son obstaculizados por campos magnéticos axiales en el interior de la columna de plasma. En la distorsión por garganta,

las líneas de inducción axial son comprimidas por el estrangulamiento, dando lugar a un aumento de la presión interior que se opone al aumento de presión del campo acimutal, como se indica esquemáticamente en la figura 10.7. Es

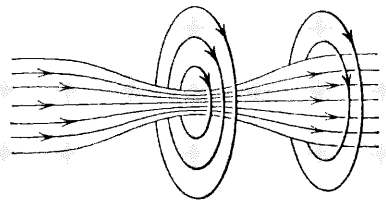


FIG. 10.7. La presión hacia fuera del campo magnético axial atrapado evita la inestabilidad de garganta.

fácil comprobar que las variaciones relativas de las dos presiones magnéticas, suponiendo que el plasma tiene un límite brusco, son:

$$\frac{\Delta p_\phi}{p_\phi} = \frac{2x}{R}; \qquad \frac{\Delta p_z}{p_z} = \frac{4x}{R} \qquad [10.47]$$

siendo x el pequeño desplazamiento hacia adentro. Como consecuencia, la columna será estable frente a las distorsiones tipo salchicha si:

$$B_z^2 > \frac{1}{2} B_\phi^2 \qquad [10.48]$$

Cuando se forman combas, las líneas de campo magnético axial se estiran en lugar de ser comprimidas lateralmente, pero el resultado es el mismo. En efecto, el aumento de tensión de las líneas de campo interiores se opone a las fuerzas externas y tiende a estabilizar la columna. Según la figura 10.8, es evidente que, para un desplazamiento lateral dado, una comba de longitud corta hará que las líneas de fuerza se estiren más que en una comba de gran longitud. Por tanto, dada una cierta razón entre el campo axial interior y el campo acimutal exterior, habrá tendencia a estabilizar las combas de longitud corta, pero no las combas de longitud muy larga. Si los campos son aproximadamente iguales, se demuestra que si la comba tiene una longitud $\lambda < 14\ R$ la perturbación queda estabilizada.

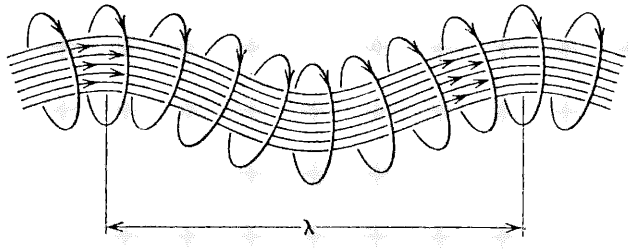


FIG. 10.8. La tensión del campo magnético axial atrapado evita la inestabilidad de comba.

Para combas de mayor longitud la estabilización puede conseguirse mediante la acción de un conductor exterior, supuesto que el radio del plasma no sea demasiado pequeño en comparación con el radio del conductor. Las líneas del campo acimutal quedan atrapadas entre el conductor y la superficie límite del plasma, como se indica en la figura 10.9. Si la columna de plasma se acerca demasiado a las paredes, las líneas de fuerza se apiñan entre él y las paredes, dando lugar a una presión magnética adicional y a una fuerza recuperadora.

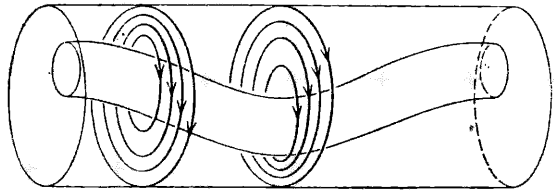


FIG. 10.9. Estabilización de las combas de gran longitud de onda mediante conductor exterior.

Cualitativamente se ve claro que debe ser posible, mediante una combinación de campos axiales atrapados y paredes conductoras, crear una configuración estable, al menos dentro de la aproximación de un plasma muy conductor con una superficie límite bien definida. Un análisis detallado * confirma esta conclusión cualitativa y establece límites para las magnitudes que intervienen. Resulta importante que el campo magnético axial en el exterior del plasma sea lo más pequeño posible, y también mantener el radio del plasma de forma que sea entre un medio o un tercio de radio del cilindro. Si el campo magnético axial exterior al plasma fuese demasiado grande, la acción combinada de B_z y B_ϕ causaría inestabilidades helicoidales que son perturbadoras en las geometrías toroidales. No obstante, si el campo axial exterior al plasma se hace muy grande, el paso de la hélice se hace tan grande que en una columna de plasma de longitud finita hay mucho menos de una vuelta de hélice. De ahí que nuevamente aparece la posibilidad de otra configuración estable. La estabilización por medio de campos axiales fuertes producidos por corrientes exteriores al plasma es el fundamento de algunos dispositivos de fusión, por ejemplo, el Stellerator.

La situación ideal de tener un plasma de contorno nítido es difícil de obtener experimentalmente; e incluso una vez obtenida se destruye por difusión del plasma a través de las líneas de fuerza en tiempos del orden de $\mu_0 \sigma R^2$ (véase la sección 10.3). En un plasma de hidrógeno con una energía de 1 eV por partícula, este tiempo es del orden de 10^{-4} s cuando $R \sim 0{,}1$ m; en un plasma de 10 keV este tiempo es del orden de 10^2 s. Naturalmente, en las experiencias termonucleares debemos intentar obtener un plasma lo más caliente posible con el fin de que el tiempo de difusión sea suficientemente largo como para permitir que se caliente aún más.

---

* V. D. SHAFRANOV, *Atomnaya Energ.* I, 5, 38 (1956); R. J. TAYLER, *Proc. Phys. Soc. (London)*, B70, 1049 (1957); M. ROSENBLUTH, *Los Alamos Report LA-2030* (1956). Véase también *Proceedings of the Second International Conference on Peaceful Use of Atomic Energy*, vol. 31 (1958), artículos de BRAGINSKY y SHAFRANOV (pág. 43) y TAYLER (página 160).

10.7. ONDAS MAGNETOHIDRODINAMICAS

En la hidrodinámica ordinaria, dejando aparte las ondas superficiales, las únicas ondas de pequeña amplitud posibles son ondas longitudinales de compresión (sonido). Estas se propagan con una velocidad s que se relaciona con la derivada de la presión respecto de la densidad a entropía constante

$$s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \qquad [10.49]$$

Si se supone una ley adiabática $p = K\rho^\gamma$, $s^2 = \gamma p_0/\rho_0$, en donde γ es la relación entre los calores específicos. En magnetohidrodinámica es posible otro tipo de movimiento ondulatorio. Está asociado con el movimiento transversal de las líneas de inducción magnéticas. La tensión de estas líneas de fuerza tiende a volverlas a la forma de línea recta causando así oscilaciones transversales. Por analogía con las ondas sonoras ordinarias, en las que el cuadrado de la velocidad de propagación es del orden de la presión hidrostática dividida por la densidad, será de esperar que estas ondas magnetohidrodinámicas, llamadas *ondas de Alfvén,* se propaguen con la velocidad,

$$v_A \sim \left(\frac{B_0^2}{2\mu_0\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad [10.50]$$

donde $B_0^2/2\mu_0$ es la presión magnética.

Con el fin de examinar el movimiento ondulatorio de un fluido conductor en presencia de un campo magnético, vamos a considerar un fluido conductor perfecto, compresible, carente de viscosidad, en un campo magnético y en ausencia de fuerzas gravitatorias. Las ecuaciones que gobiernan su comportamiento son:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ &\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) \\ &\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \end{aligned}\right\} \qquad [10.51]$$

Deberemos completar estas ecuaciones con una ecuación de estado que relacione la presión y la densidad. Supondremos que la velocidad de equilibrio es cero, pero que existe una inducción magnética $\boldsymbol{B}_0$, estática y espacialmente uniforme, en todo el fluido de densidad constante ρ_0. Imaginemos ahora pequeñas desviaciones de los valores de equilibrio:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1(x, t) \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1(x, t) \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_1(x, t) \end{aligned}\right\} \qquad [10.52]$$

Si linealizamos las ecuaciones en [10.51] respecto de las magnitudes pequeñas,

se nos convierten en

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + s^2 \nabla \rho_1 + \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}_1) = 0 \\ \frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}_0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad [10.53]$$

en donde s^2 es el cuadrado de la velocidad del sonido [10.49]. Podemos combinar estas ecuaciones y obtener otra para $\boldsymbol{v}_1$ sola:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial t^2} - s^2 \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{v}_A \times \nabla \times [\nabla \times (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_A)] = 0 \quad [10.54]$$

en donde hemos introducido la velocidad de Alfvén vectorial:

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{\boldsymbol{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \quad [10.55]$$

La ecuación de ondas [10.54] es algo complicada, pero admite soluciones sencillas para las ondas que se propagan paralela o perpendicularmente a la dirección del campo magnético *. Si $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}, t)$ es una onda plana de vector de ondas $\boldsymbol{k}$ y frecuencia ω:

$$\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_1 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t} \quad [10.56]$$

La ecuación [10.54] se convierte en

$$-\omega^2 \boldsymbol{v}_1 + (s^2 + v_A^2)(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{k}[(\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_A] = 0 \quad [10.57]$$

Si $\boldsymbol{k}$ es *perpendicular* a $\boldsymbol{v}_A$, el último término se anula. En tal caso, la solución de $\boldsymbol{v}_1$ es una onda magnetosónica *longitudinal* cuya velocidad de fase es

$$u_{\text{long}} = \sqrt{s^2 + v_A^2} \quad [10.58]$$

Obsérvese que esta onda se propaga con una velocidad que depende de la suma de las presiones hidrostática y magnética, salvo factores del orden de la unidad. Si $\boldsymbol{k}$ es paralelo a $\boldsymbol{v}_A$, [10.57] se reduce a:

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2)\boldsymbol{v}_1 + \left(\frac{s^2}{v_A^2} - 1\right) k^2 (\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_A = 0 \quad [10.59]$$

En este caso hay dos tipos posibles de movimiento ondulatorio. Existe una onda longitudinal ordinaria ($\boldsymbol{v}_1$ paralelo a $\boldsymbol{k}$ y a $\boldsymbol{v}_A$) cuya velocidad de fase es igual a la del sonido s. Pero además hay una onda *transversal* ($\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_A = 0$) cuya velocidad de fase es la velocidad de Alfvén v_A. Esta onda de Alfvén es un fenómeno puramente magnetohidrodinámico que depende solamente del campo magnético (tensión) y de la densidad (inercia).

* Se deja para el problema 10.3 la determinación de las características de las ondas cuando la dirección de propagación sea arbitraria.

Para el mercurio a la temperatura ambiente, la velocidad de Alfvén es $[B_0$ (Mgauss)/0,131] m/s, en comparación con la velocidad del sonido, que es de $1{,}45 \times 10^3$ m/s. Para todas las intensidades de campo utilizadas en laboratorio, la velocidad de Alfvén es mucho menor que la velocidad del sonido. En problemas astrofísicos, no obstante, la velocidad de Alfvén puede ser muy grande por ser las densidades mucho menores. En la fotosfera del Sol, por ejemplo, la densidad es del orden de 10^{-4} kg/m^3 ($\sim 6 \cdot 10^{16}$ átomos de hidrógeno/cm^3), con lo que $v_A \simeq 10^5 B_0$ m/s. Parece ser que los campos magnéticos solares son del orden de 1 ó 2 gauss en la superficie, con valores mucho mayores alrededor de las manchas solares. A título de comparación, la velocidad del sonido es del orden de 10^2 m/s, tanto en la fotosfera como en la cromosfera.

Mediante la tercera ecuación de [10.53] podemos hallar los campos magnéticos de las distintas ondas:

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{cases} \dfrac{k}{\omega} v_1 \boldsymbol{B}_0 & \text{para } \boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}_0 \\ 0 & \text{para las longitudinales } \boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{B}_0 \\ -\dfrac{k}{\omega} B_0 v_1 & \text{para las transversales } \boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{B}_0 \end{cases} \qquad [10.60]$$

La onda magnetosónica, que se mueve perpendicularmente a $\boldsymbol{B}_0$, produce compresiones y enrarecimientos en las líneas de fuerza sin cambiar su dirección (Fig. 10.10, *a*). La onda de Alfvén, paralela a B_0, hace que las líneas de fuerza oscilen adelante y atrás de forma lateral (Fig. 10.10, *b*). En ambos casos, las líneas de fuerza se hallan «congeladas» y se mueven con el fluido.

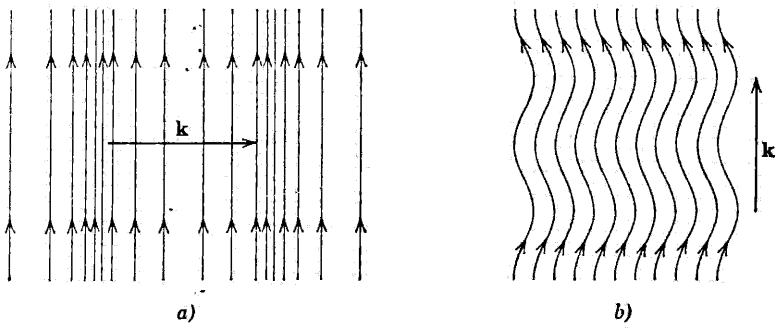


FIG. 10.10 Ondas magnetohidrodinámicas.

Si la conductividad del fluido no es infinita, o están presentes efectos de viscosidad, podemos prever que habrá pérdidas disipativas y el consecuente amortiguamiento de las oscilaciones. Las ecuaciones segunda y tercera de [10.53] se modifican con términos adicionales:

$$\left.\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} &= -s^2 \nabla \rho_1 - \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}_1) + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v}_1 \\ \frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} &= \nabla \times (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}_0) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \boldsymbol{B}_1 \end{aligned}\right\} \qquad [10.61]$$

siendo η la viscosidad * y σ la conductividad. Como ambos términos adicionales causan dispersión de la velocidad de fase, sus efectos se ven más fácilmente cuando se considera una solución en ondas planas. Resulta evidente que para ondas planas estas ecuaciones son equivalentes a:

$$\left.\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} &= \frac{1}{\left(1+i\dfrac{\eta k^2}{\rho_0 \omega}\right)}\left[-s^2 \nabla \rho_1 - \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}_1)\right] \\ \frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} &= \frac{1}{\left(1+i\dfrac{k^2}{\mu_0 \sigma \omega}\right)} \nabla \times (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}_0) \end{aligned}\right\} \qquad [10.62]$$

Como consecuencia, la ecuación [10.57], que relaciona k y ω, se modifica en: *a)* s^2 y ω^2 vienen multiplicados por el factor $\left(1+i\dfrac{k^2}{\mu_0\sigma\omega}\right)$, y *b)* ω^2 está multiplicada por el factor $\left(1+i\dfrac{\eta k^2}{\rho_0\omega}\right)$.

En el caso importante de una onda de Alfvén paralela al campo, la relación entre ω y k se convierte en:

$$k^2 v_A^2 = \omega^2 \left(1+i\frac{k^2}{\mu_0\sigma\omega}\right)\left(1+i\frac{\eta k^2}{\rho_0\omega}\right) \qquad [10.63]$$

Si los términos de corrección resistivo y viscoso son pequeños, el número de ondas es aproximadamente

$$k \simeq \frac{\omega}{v_A} + i\frac{\omega^2}{2v_A^3}\left(\frac{1}{\mu_0\sigma}+\frac{\eta}{\rho_0}\right) \qquad [10.64]$$

Esto nos muestra que la atenuación aumenta rápidamente con la frecuencia (o número de ondas), pero decrece al aumentar la intensidad del campo magnético. Si utilizamos el tiempo de difusión τ de la sección 10.3, la parte imaginaria del número de ondas nos dice que, salvo los efectos debidos a la viscosidad, la onda progresa durante un tiempo τ antes de que su intensidad disminuya al $1/e$ de su intensidad original, el parámetro de longitud en [10.12] es la longitud de onda de la oscilación. En el extremo opuesto, cuando predominan los términos resistivo y/o viscoso, el número de ondas viene dado por la anulación de los dos factores del segundo miembro de [10.63]. Por consiguiente, k tiene iguales sus partes real e imaginaria y la onda se amortigua rápidamente, independientemente del valor del campo magnético.

Las consideraciones sobre las ondas magnetohidrodinámicas hechas anteriormente sólo son válidas para frecuencias relativamente bajas, puesto que se despreció la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère. Resulta evidente que si la frecuencia es suficientemente elevada, el comportamiento de los campos pasa a ser el comportamiento «ionosférico» descrito en la sección 7.9, en el que los efectos de separación de carga desempeñan un papel importante. Pero incluso cuando se desprecian los efectos de separación de carga en la

* Realmente no es correcto el uso de la fuerza viscosa simple [10.3] cuando el fluido es compresible. No obstante, es de esperar que dé un comportamiento cualitativo correcto.

descripción magnetohidrodinámica, la corriente de desplazamiento modifica la propagación de las ondas de Alfvén y magnetosónicas. La ley de Ampère, cuando se incluye la corriente de desplazamiento, presenta la forma

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad [10.65]$$

en la que hemos eliminado el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, haciendo uso de la expresión [10.9] que corresponde a una conductividad infinita. La corriente que ahora debemos sustituir en la ecuación de fuerza que rige el movimiento del fluido es

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0} \left[\nabla \times \boldsymbol{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \right] \qquad [10.66]$$

En el conjunto de ecuaciones linealizadas [10.53], se puede generalizar entonces en la forma:

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \boldsymbol{v}_A \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} \times \boldsymbol{v}_A \right) \right] = -s^2 \nabla \rho_1 - \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}_1) \qquad [10.67]$$

Esto nos dice que la ecuación de ondas para $\boldsymbol{v}_1$ se transforma convirtiéndose en

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\boldsymbol{v}_1 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) - \frac{\boldsymbol{v}_A}{c^2} (\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_1) \right] - s^2 \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{v}_A \times \nabla \times \nabla \times (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_A) = 0 \qquad [10.68]$$

Se advierte en esta expresión que cuando $\boldsymbol{v}_1$ es paralela a $\boldsymbol{v}_A$ (esto es, a $\boldsymbol{B}_0$) no hay cambio respecto a lo anterior. Pero cuando $\boldsymbol{v}_1$ es transversal (tanto en las ondas magnetosónicas con $\boldsymbol{k}$ perpendicular a $\boldsymbol{B}_0$ como en las ondas de Alfvén con $\boldsymbol{k}$ paralelo a $\boldsymbol{B}_0$), el cuadrado de la frecuencia viene multiplicado por el factor $[1 + (v_A^2/c^2)]$. Así, pues, la velocidad de fase de las ondas de Alfvén es ahora

$$u_A = \frac{c v_A}{\sqrt{c^2 + v_A^2}} \qquad [10.69]$$

En el caso límite que ordinariamente se presenta, cuando $v_A \ll c$, la velocidad de fase es aproximadamente igual a v_A; en tal caso carece de importancia la corriente de desplazamiento. Pero si $v_A \gg c$, la velocidad de fase es igual a la velocidad de la luz. Desde el punto de vista de las ondas electromagnéticas, la onda transversal de Alfvén puede ser considerada como una onda en un medio cuyo índice de refracción viene dado por:

$$u_A = \frac{c}{n} \qquad [10.70]$$

Así, pues,

$$n^2 = 1 + \frac{c^2}{v_A^2} = 1 + \frac{\mu_0 \rho_0 c^2}{B_0^2} \qquad [10.71]$$

Debe ponerse cuidado al aplicar este índice de refracción para la propagación de ondas electromagnéticas en un plasma. Es válido únicamente a frecuencias en que los efectos de separación de carga no son importantes.

10.8. OSCILACIONES DEL PLASMA

La aproximación magnetohidrodinámica que hemos considerado en las secciones anteriores supone un fluido de un único componente, eléctricamente neutro, con una conductividad escalar σ que describe su interacción con el campo electromagnético. Sin embargo, como ya se dijo en la introducción al presente capítulo, un fluido conductor o plasma es un fluido de más de un componente; en él hay presentes electrones y uno o más tipos de iones. A bajas frecuencias o longitudes de onda largas, es válida la descripción mediante un fluido único por ser la frecuencia de colisión ν suficientemennte grande (y el recorrido libre medio suficientemente pequeño) para que los electrones y los iones mantengan en todo momento la neutralidad eléctrica local, a pesar de que exista una deriva media en direcciones opuestas, de acuerdo con la ley de Ohm bajo la acción de los campos eléctricos. Para frecuencias más altas deja ya de ser válido este modelo de un fluido único. Los electrones e iones tienden a moverse independientemente y dan lugar a que haya separaciones de carga. Estas originan fuerzas recuperadoras intensas. Aparecen, por tanto, oscilaciones de naturaleza electrostática, y si además hay presente un campo magnético, tienen lugar otros efectos. Los electrones y los iones tienden a moverse en órbitas circulares o helicoidales en las que la frecuencia orbital viene dada por:

$$\omega_B = \frac{eB}{m} \qquad [10.72]$$

Cuando se hacen los campos suficientemente grandes o las densidades suficientemente pequeñas como para que las frecuencias orbitales sean comparables a la frecuencia de colisión, deja de ser aplicable el concepto de una conductividad escalar y el flujo de corriente presenta una dependencia direccional acusada respecto del campo magnético (véase el problema 10.5). A frecuencias todavía mayores, los iones son incapaces de seguir, debido a su mayor inercia, las rápidas fluctuaciones de los campos, y solamente los electrones participan en el movimiento. Los iones constituyen simplemente un fondo de carga positiva que mantiene la neutralidad eléctrica media. La idea de un fondo de carga uniforme y un fluido electrónico es válida solamente si consideramos una escala de longitudes grande comparada con las distancias entre partículas ($l \gg n_0^{-1/3}$). De hecho, hay otra limitación, la longitud de apantallamiento de Debye, que en el caso de plasmas a temperaturas razonables es mayor que $n_0^{-1/3}$, y que marca la línea divisoria entre el comportamiento por movimiento de partículas individuales y el movimiento colectivo de un fluido.

Con el fin de evitar complicaciones innecesarias, vamos a considerar solamente el comportamiento del plasma a alta frecuencia, sin tener en cuenta los efectos dinámicos de los iones; tampoco consideraremos los efectos debidos a las colisiones. Los electrones de carga e y masa m se describen por una densidad $n(\boldsymbol{x}, t)$ y una velocidad media $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$. La densidad de carga en equilibrio de iones y electrones es $\mp en_0$. Las ecuaciones dinámicas del fluido electrónico son:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{v}) = 0 \\ &\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \frac{e}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \frac{1}{mn}\nabla p \end{aligned}\right\} \qquad [10.73]$$

en las que la presión electrónica p (que supondremos escalar) describe los efectos debidos a la energía cinética térmica de los electrones. Las densidades de carga y corriente son:

$$\left.\begin{aligned} \rho_e &= e(n-n_0) \\ \boldsymbol{J} &= en\boldsymbol{v} \end{aligned}\right\} \qquad [10.74]$$

Y así podemos expresar las ecuaciones de Maxwell:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{e(n-n_0)}{\epsilon_0} \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \\ &\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \\ &\nabla\times\boldsymbol{B}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0 en\boldsymbol{v} \end{aligned}\right\} \qquad [10.75]$$

Supondremos ahora que el estado estático es aquél en el que el fluido electrónico está en reposo con $n=n_0$ en ausencia de campos, y vamos a considerar pequeñas desviaciones de este estado debidas a cualquier perturbación inicial. Las ecuaciones de movimiento linealizadas son:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial n}{\partial t}+n_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \\ &\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\frac{e}{m}\boldsymbol{E}+\frac{1}{mn_0}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0\nabla n=0 \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{E}-\frac{en}{\epsilon_0}=0 \\ &\nabla\times\boldsymbol{B}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu_0 en_0\boldsymbol{v}=0 \end{aligned}\right\} \qquad [10.76]$$

además de las dos ecuaciones de Maxwell homogéneas. Aquí, $n(\boldsymbol{x}, t)$ y $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ representan desviaciones respecto al estado de equilibrio. Si existe una inducción magnética externa $\boldsymbol{B}_0$, deberemos retener en las ecuaciones de fuerza un término $[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0]$ (véase el problema 10.7), pero nos hallamos con que el campo fluctuante $\boldsymbol{B}$ es un infinitésimo de primer orden, con lo que $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ será de segundo orden. En realidad, la ecuación de continuidad no es una ecuación independiente, sino que puede deducirse combinando las dos últimas ecuaciones de [10.76].

Como la ecuación de fuerzas en [10.76] es independiente del campo magnético, podemos esperar que existan soluciones de naturaleza puramente electrostática para las que $\boldsymbol{B}=0$. Podemos combinar las ecuaciones de continuidad y de fuerza para obtener una ecuación de ondas de las fluctuaciones de densidad:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}+\left(\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m}\right)n-\frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0\nabla^2 n=0 \qquad [10.77]$$

Por otro lado, podemos también combinar la derivada temporal de la ley de

Ampère y la ecuación de fuerza, obteniendo así una ecuación para los campos:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \left(\frac{e^2 u_0}{\epsilon_0 m}\right)\boldsymbol{E} - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_0 \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) = \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad [10.78]$$

Los primeros miembros de estas dos ecuaciones son estructuralmente idénticos y, por tanto, no se nos presentará ninguna incompatibilidad si hacemos $\partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0$. Puesto que ya hemos excluido campos estáticos, una posibilidad es $\boldsymbol{B} = 0$. Si es $\partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0$, la ley de Faraday implica que $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$, y de aquí que $\boldsymbol{E}$ sea un campo longitudinal derivable de un potencial escalar. Resulta evidente de modo inmediato que cada una de las componentes de $\boldsymbol{E}$ satisface la misma ecuación [10.77] que las fluctuaciones de densidad. Si en [10.77] despreciamos el término de la presión, nos encontramos con que la densidad, la velocidad y el campo eléctrico, todos ellos oscilan con la frecuencia del plasma ω_p:

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \qquad [10.79]$$

Si incluimos el término de la presión, obtenemos una relación de dispersión para la frecuencia

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0 k^2 \qquad [10.80]$$

Para determinar el coeficiente de k^2 se requieren algunas precauciones. Podemos suponer la ley adiabática $p = p_0(n/n_0)^\gamma$, pero para nuestro caso no nos sirve el valor acústico de $\gamma = 5/3$. Este valor es solamente válido para un gas de partículas con tres grados de libertad externos, pero sin grados de libertad internos. La razón de todo esto se debe a que la frecuencia de estas oscilaciones de densidad es mucho mayor que la frecuencia de colisión, precisamente lo contrario de lo que ocurre en el límite acústico. Por tanto, se mantendrá la naturaleza unidimensional de dichas oscilaciones de densidad. Deberemos utilizar un valor de γ adecuado para un grado de libertad de tipo translación. Como $\gamma = (m+2)/m$, siendo m el número de grados de libertad, tenemos en este caso que $\gamma = 3$. Entonces:

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0 = 3\frac{p_0}{m n_0} \qquad [10.81]$$

Si utilizamos $p_0 = n_0 KT$ y definimos la media de los cuadrados de la componente de la velocidad de una dirección (paralela al campo eléctrico),

$$m\langle u^2 \rangle = KT = \frac{p_0}{n_0} \qquad [10.82]$$

podemos escribir así la ecuación de dispersión

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3\langle u^2 \rangle k^2 \qquad [10.83]$$

Esta es una relación aproximada, válida para las longitudes de onda larga y que en realidad constituye precisamente los dos primeros términos de un desarrollo que consta de los momentos de órdenes cada vez mayores de la distribución de velocidades de los electrones (véase el problema 10.6). En la forma

[10.83], la validez de la ecuación de dispersión rebasa el comportamiento de gas ideal, que fue el modelo utilizado para su deducción. Se aplica, por ejemplo, a las oscilaciones de un gas de Fermi degenerado en el que todas las celdillas del espacio de velocidades están llenas en el interior de una esfera de radio igual a la velocidad de Fermi V_F. El valor medio del cuadrado de un componente de la velocidad es:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{5} V_F^2 \qquad [10.84]$$

En la ecuación de dispersión aparecen explícitamente los efectos cuánticos solamente en los términos de orden superior del desarrollo en potencias de k^2.

Las oscilaciones anteriormente descritas son oscilaciones electrostáticas longitudinales en que el campo magnético oscilante es idénticamente nulo. Esto significa que no pueden dar lugar a radiación en un plasma ilimitado. No obstante, en un plasma hay modos de oscilación que son ondas electromagnéticas transversales. Con el fin de ver las diversas posibilidades de oscilación del plasma, vamos a suponer que todas las variables varían como $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t)$ y a buscar una relación definida entre ω y $\boldsymbol{k}$, tal como hicimos en la sección 10.7 para las ondas magnetohidrodinámicas. Con esta suposición, las ecuaciones linealizadas [10.76] y las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell, pueden escribirse:

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega} n_0 \\ \boldsymbol{v} &= \frac{ie\boldsymbol{E}}{m\omega} + \frac{3\langle u^2 \rangle}{\omega} \frac{n}{n_0} \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} &= -\frac{ien}{\epsilon_0} \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B} &= -\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E} - i\mu_0 e n_0 \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} &= \omega\boldsymbol{B} \end{aligned}\right\} \qquad [10.85]$$

Podemos resolver las ecuaciones de Maxwell para $\boldsymbol{v}$ en función de $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{ie}{m\omega}\right) \frac{1}{\omega_p^2} [(\omega^2 - c^2k^2)\boldsymbol{E} + c^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k}] \qquad [10.86]$$

Podemos ahora utilizar la ecuación de fuerza y la divergencia de $\boldsymbol{E}$ para eliminar $\boldsymbol{v}$ y con el fin de obtener una ecuación solamente en $\boldsymbol{E}$:

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2)\boldsymbol{E} + (c^2 - 3\langle u^2 \rangle)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k} = 0 \qquad [10.87]$$

Si expresamos $\boldsymbol{E}$ mediante componentes paralela y perpendicular a $\boldsymbol{k}$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_{\parallel} + \boldsymbol{E}_{\perp} \\ \boldsymbol{E}_{\parallel} &= \left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}}{k^2}\right)\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \qquad [10.88]$$

en donde

Entonces, podemos expresar [10.87] como dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}(\omega^2-\omega_p^2-3\langle u^2\rangle k^2)\boldsymbol{E}_{\parallel}=0\\(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2)\boldsymbol{E}_{\perp}=0\end{aligned}\right\} \qquad [10.89]$$

El primero de estos resultados nos pone de manifiesto que las ondas longitudinales satisfacen la relación de dispersión [10.83] ya tratada, mientras que el segundo nos dice que existen dos ondas transversales (dos estados de polarización) que tienen como relación de dispersión

$$\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2 \qquad [10.90]$$

Esta ecuación [10.90] es precisamente la relación de dispersión para las ondas electromagnéticas transversales descrita en la sección 7.5, *d)* desde otro punto de vista. En ausencia de campos externos, las oscilaciones electrostáticas y las electromagnéticas transversales no están acopladas entre sí. Pero, por ejemplo, en presencia de campo magnético externo, la ecuación de fuerza presenta un término adicional que incluye el campo magnético, por lo cual las oscilaciones están acopladas (véase el problema 10.7).

10.9. EL LIMITE PARA LONGITUDES DE ONDA CORTAS DE LAS OSCILACIONES DEL PLASMA Y LA DISTANCIA DE APANTALLAMIENTO DE DEBYE

En la discusión realizada hasta el momento de las oscilaciones del plasma no se ha hecho mención alguna del intervalo de frecuencias en que resulta aplicable la descripción en términos de oscilaciones colectivas. Ciertamente, que $n_0^{1/3}$ constituye una cota superior en la escala de números de ondas. Pero examinando la relación de dispersión [10.83] para las oscilaciones longitudinales puede obtenerse la clave para hallar una cota superior más significativa. La frecuencia de oscilación para longitudes de onda muy largas es muy aproximadamente $\omega=\omega_p$. La frecuencia sólo se desvía apreciablemente de ω_p para números de ondas comparables al *número de ondas de Debye* k_D:

$$k_D^2=\frac{\omega_p^2}{\langle u^2\rangle} \qquad [10.91]$$

Para números de onda $k\ll k_D$, las velocidades de fase y grupo de las oscilaciones longitudinales del plasma son:

$$\left.\begin{aligned}v_p&\simeq\frac{\omega_p}{k}\\v_g&\simeq\frac{3\langle u^2\rangle}{v_p}\end{aligned}\right\} \qquad [10.92]$$

De la definición de k_D vemos que, para tales números de onda, la velocidad de fase es mucho mayor (y la velocidad de grupo mucho menor) que la velocidad cuadrática media de tipo térmico $\langle u^2\rangle^{1/2}$. Como consecuencia, cuando el número de ondas es del orden de k_D, la onda viaja con una velocidad lo suficien-

temente baja para que exista un número de electrones apreciable que se mueven, o algo más rápidos, o algo más lentos, o aproximadamente con la misma velocidad, que la onda. La velocidad de fase se encuentra en la cola de la distribución térmica. La circunstancia de que la velocidad de la onda sea comparable con las velocidades térmicas de los electrones, es el origen de un mecanismo de transferencia de energía que provoca la destrucción de la oscilación. Dicho mecanismo consiste en que las partículas son atrapadas por la onda, resultando así una transferencia energética desde el movimiento ondulatorio a las partículas. El amortiguamiento resultante de la onda recibe el nombre de *amortiguamiento de Landau.*

No vamos a intentar calcular detalladamente el amortiguamiento de Landau, pero podemos describir el mecanismo físico. En la figura 10.11 vemos una distribución de velocidades de los electrones con una cierta desviación

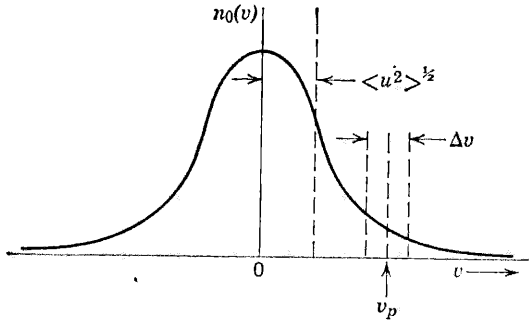


FIG. 10.11. Distribución de la velocidad térmica de los electrones.

cuadrática media y cola de tipo maxwelliano para grandes velocidades. Para valores pequeños de k, la velocidad de fase yace muy lejos, fuera de la cola de la distribución, y el amortiguamiento que tiene lugar es despreciable. Pero a medida que $k \to k_D$ la velocidad de fase cae dentro de la cola, como se indica en la figura 10.11, con lo que hay un número significativo de electrones que tienen velocidades térmicas comparables a v_p. Entonces, existe una banda de velocidades Δv alrededor de $v = v_p$ en la que los electrones se mueven con suficiente lentitud respecto de la onda como para que queden atrapados en los valles de potencial y sean arrastrados por la onda a la velocidad v_p. Si, tal como indica la figura, hay inicialmente más partículas en el intervalo Δv que se mueven a velocidad menor que v_p que partículas que se mueven a velocidad mayor que v_p, el proceso determinará un aumento neto de la energía de las partículas a expensas de la onda. Este es el mecanismo del amortiguamiento de Landau. Un cálculo detallado demuestra que el amortiguamiento puede expresarse como una parte imaginaria de la frecuencia dada por:

$$\operatorname{Im} \omega \simeq -\omega_p \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{k_D}{k} \right)^3 e^{-(k_D^2/2k^2)} \qquad [10.93]$$

siempre que $k \ll k_D$. En la obtención de [10.93] se ha supuesto una distribución de velocidades maxwelliana. Cuando $k \gtrsim k_D$, la constante de amortiguamiento

es mayor que la dada por [10.93], y se hace rápidamente mucho mayor que la parte real de la frecuencia, dada por [10.83].

La fórmula de Landau [10.93] nos dice que para $k \ll k_D$ las oscilaciones longitudinales del plasma son virtualmente no amortiguadas, pero el amortiguamiento se hace considerable tan pronto como $k \sim k_D$ (incluso para $k = 0{,}5k_D$, $\text{Im}\,\omega \simeq -0{,}7\ \omega_p$). Para números de onda mayores que el número de ondas de Debye, el amortiguamiento es tan grande que no tiene sentido hablar de oscilaciones colectivas.

Mediante otra consideración diferente llegamos al mismo número de ondas de Debye, como límite de los efectos de oscilaciones colectivas. Sabemos que un plasma electrónico es un conjunto de electrones con un fondo uniforme de carga positiva. Podemos describir su comportamiento en una escala de longitudes muy pequeña mediante una sucesión de muchas colisiones de Coulomb entre dos cuerpos. Pero en una escala de longitudes mayor, los electrones tienden a comportarse de forma colectiva; si aparece un exceso de carga positiva en cualquier punto, los electrones se precipitan sobre él para neutralizarla. Esta respuesta colectiva a las fluctuaciones de carga es lo que da lugar a las oscilaciones del plasma a gran escala. Pero además de las oscilaciones colectivas, o mejor dicho, debido a ellas, también tiende la respuesta cooperativa de los electrones a reducir la interacción de Coulomb de corto alcance entre partículas. Después de todo, un electrón individual constituye una fluctuación local de la densidad de carga. Los electrones que lo rodean son repelidos de forma tal que tienden a apantallar el campo coulombiano del electrón considerado, haciendo que la interacción sea de corto alcance. Que debe ocurrir algo semejante resulta obvio cuando se considera que la única fuente de interacción electrostática es la fuerza de Coulomb entre las partículas. Si una parte de ella se invierte en producir las oscilaciones colectivas del plasma de longitud de onda larga, el resto debe ser una suma de interacciones de corto alcance entre las partículas.

Debye y Hückel, en su teoría de los electrólitos, dieron por primera vez una deducción no rigurosa del efecto de apantallamiento descrito anteriormente. El argumento básico es el siguiente. Supóngase que tenemos un plasma con una distribución de electrones en equilibrio térmico en un potencial electrostático Φ. Entonces, los electrones se distribuyen de acuerdo con el factor de Boltzmann $e^{-H/kT}$, siendo H el hamiltoniano electrónico. La densidad espacial de electrones es, pues:

$$n(x) = n_0 e^{-(e\Phi/KT)} \qquad [10.94]$$

Imaginemos ahora que colocamos una carga de prueba Ze en el origen de esta distribución de electrones con su correspondiente fondo de iones positivos (densidad de carga $-en_0$). El potencial Φ resultante vendrá determinado por la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = \frac{-1}{\epsilon_0}\{Ze\,\delta(x) + en_0[e^{-(e\Phi/KT)} - 1]\} \qquad [10.95]$$

Si suponemos que $(e\Phi/KT)$ es pequeño, la ecuación puede linealizarse:

$$\nabla^2\Phi - k_D^2\Phi \simeq -\frac{Ze\,\delta(x)}{\epsilon_0} \qquad [10.96]$$

en donde

$$k_D^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 KT} \qquad [10.97]$$

es otra forma de expresar [10.91]. La ecuación [10.96] tiene la solución con simetría esférica:

$$\Phi(r)=\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-k_D r}}{r} \qquad [10.98]$$

lo cual nos demuestra que los electrones se mueven de tal forma que apantallan el campo coulombiano de una carga de prueba en una distancia del orden de k_D^{-1}. El equilibrio entre la energía cinética térmica y la energía electrostática nos determina la magnitud del radio de apantallamiento. Numéricamente tenemos:

$$k_D^{-1}=6{,}91\left(\frac{T}{n_0}\right)^{\frac{1}{2}}\ \text{cm} \qquad [10.99]$$

en donde T se da en grados Kelvin y n_0 es el número de electrones por centímetro cúbico. Para un plasma típico en que $T=10^6$ °K y $n_0=10^{15}$ cm^{-3}, nos encontramos con que $k_D^{-1}\simeq 2{,}2\cdot 10^{-4}$ cm.

Si se trata de un gas de electrones degenerado a bajas temperaturas, el número de ondas de Debye se reemplaza por el número de ondas de Fermi k_F:

$$k_F\sim\frac{\omega_p}{V_F} \qquad [10.100]$$

en donde V_F es la velocidad en la superficie de la esfera de Fermi. Este valor del radio de apantallamiento puede deducirse mediante una generalización de Fermi-Thomas del método de Debye-Hückel. Encaja de forma natural con la relación de dispersión [10.83] y la velocidad cuadrática media [10.84].

La distancia de apantallamiento de Debye-Hückel establece una línea divisoria natural entre las colisiones entre pares de partículas a pequeña escala y los efectos colectivos a gran escala, tales como las oscilaciones del plasma. Es algo afortunado y no fortuito que independientemente pueda demostrarse que no existen oscilaciones del plasma de longitud de onda menor debido a que tiene lugar un amortiguamiento muy importante.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

El tema de la magnetohidrodinámica y la física de plasmas presenta una bibliografía que crece rápidamente. Dos obras sobre magnetohidrodinámica que constituyen una presentación coherente de la materia son:

ALFVÉN y FÄLTHAMMAR.
COWLING.

Una discusión breve aparece en

LANDAU y LIFSHITZ, *Electrodynamics of Continuous Media*, cap. VIII.

Es un texto de ingeniería con muchos ejemplos explícitos

HUGHES y YOUNG.

Entre los libros correspondientes dedicados principalmente a la física de plasmas están

BOYD y SANDERSON,
CHANDRASEKHAR,
CLEMMOW y DOUGHERTY,
ECKER,
LINHART,
SIMON,
SPITZER.

Los procesos de radiación en plasmas están tratados en muchos de los libros anteriores, por ejemplo, en el BOYD y SANDERSON y en el CLEMMOW y DOUGHERTY. Un libro que se dedica exclusivamente a estas cuestiones es

BEKEFI.

La aplicación de los conceptos de magnetohidrodinámica y física de plasmas a los fenómenos magnéticos y de partículas cargadas en el campo terrestre, en el sistema solar y más allá puede hallarse variadamente en

ALFVÉN y FÄLTHAMMAR,
HESS,
ROSSI y OLBERT.

Las reacciones termonucleares controladas se discuten, a nivel de 1960, en

GLASSTONE y LOVBERG,
ROSE y CLARK.

Una referencia breve más reciente es

R. S. PEASE, *Phys. Bull.*, **20**, 515 (1969).

El lector que desee lo último en investigación sobre plasmas puede consultar las dos series de volúmenes de revisión

Advances in Plasma Physics, ed. A. Simon y W. B. Thomson, Interscience-Wiley, Nueva York.
Reviews of Plasma Physics, ed. M. A. Leontovich (traducción H. Lashinsky), Consultants Bureau, Nueva York.

PROBLEMAS

10.1. Un cilindro circular recto metálico, de longitud infinita, tiene radio $(R/2)$ y conductividad σ. Muy junto a él, pero aislado, se encuentra un cilindro hueco coaxial del mismo material de radio interior $(R/2)$ y radio exterior R. Por los cilindros exterior e interior fluyen corrientes iguales y opuestas distribuidas uniformemente sobre las áreas transversales. En el instante $t=0$ se cortocircuita el voltaje aplicado.

a) Hállese la distribución de la inducción magnética en el interior de los cilindros antes de $t=0$.

b) Hállese la distribución en función del tiempo después de $t=0$, despreciando la corriente de desplazamiento.

c) ¿Cuál es el comportamiento de la inducción magnética en función del tiempo para tiempos muy grandes? Defínase qué se entiende por tiempos muy grandes.

10.2. Se puede producir una columna de plasma autoconstreñida, comparativamente estable, atrapando una inducción magnética axial en el interior del plasma antes

de que comience la constricción. Supóngase que la columna de plasma llena inicialmente un tubo conductor de radio R_0 y que hay presente una inducción magnética axial uniforme B_{z0} en el tubo. A continuación se aplica un voltaje a lo largo del tubo, de modo que aparece un flujo de corriente axial que da lugar a una inducción magnética acimutal.

a) Demuéstrese que, si se dan condiciones de cuasi equilibrio, la relación de compensación de presiones puede expresarse:

$$\left[p(r)+\frac{B_z^2}{2\mu_0}+\frac{B_\phi^2}{2\mu_0}\right]_{r_1}^{r_2}+\frac{1}{\mu_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{B_\phi^2}{r}\,dr=0$$

b) Si el plasma presenta un contorno nítido y una conductividad tan grande que la corriente fluye solamente en una capa delgada junto a la superficie, demuéstrese que en una situación cuasi estática, el radio $R(t)$ de la columna de plasma viene dado por la ecuación

$$\frac{R_0}{R}\ln\left(\frac{R_0}{R}\right)=\frac{1}{t_0}\int_0^t f(t)\,dt$$

donde

$$t_0=\frac{B_{z0}R_0}{E_0}$$

y $E_0 f(t)$ es el campo eléctrico aplicado.

c) Si el campo axial inicial es de 100 gauss, y el campo eléctrico aplicado tiene un valor inicial de 1 volt/cm y cae de forma casi lineal hasta cero en un milisegundo, determínese el radio final si el radio inicial es de 50 cm. Estas condiciones son del mismo orden de magnitud que las que se presentan en el aparato toroidal británico (Zeta), pero los efectos inductivos externos limitan el efecto de constricción, siendo menor que el aquí calculado. Véase E. P. BUTT y col., *Proceedings on the Second International Conference of Peaceful Uses of Atomic Energy*, vol. 32, pág. 42 (1958).

10.3. En un fluido conductor perfecto, no viscoso, compresible, en el seno de una inducción magnética estática $\boldsymbol{B}_0$ pueden presentarse ondas magnetohidrodinámicas. Si la dirección de propagación no es ni paralela ni perpendicular a $\boldsymbol{B}_0$, las ondas no se separan en ondas longitudinales puras (magnetosónicas) o transversales puras (de Alfvén). Sea θ el ángulo entre la dirección de propagación $\boldsymbol{k}$ y el campo $\boldsymbol{B}_0$.

a) Demuéstrese que hay tres ondas diferentes con velocidades de fase dadas por

$$u_1^2=(v_A\cos\theta)^2$$

$$u_{2,3}^2=\tfrac{1}{2}(s^2+v_A^2)\pm\tfrac{1}{2}[(s^2+v_A^2)^2-4s^2v_A^2\cos^2\theta]^{\frac{1}{2}}$$

en donde s es la velocidad del sonido en el fluido, y $v_A=(B_0^2/\mu_0\rho_0)^{\frac{1}{2}}$ es la velocidad de Alfvén.

b) Hállense los vectores propios velocidad para las tres ondas diferentes y demuéstrese que la primera onda (de Alfvén) es siempre transversal, mientras que las otras dos no son ni longitudinales ni transversales.

c) Calcúlense las velocidades de fase y los vectores propios de las ondas mixtas en la aproximación correspondiente a $v_A \gg s$. Demuéstrese que para una onda, la única componente apreciable de la velocidad es paralela al campo magnético, mientras que para la otra, la única componente es perpendicular al campo y está contenida en el plano determinado por $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{B}_0$.

10.4. Un fluido perfectamente conductor, incompresible, no viscoso, de densidad constante ρ_0, se halla bajo la acción de un potencial gravitatorio ψ y de una inducción magnética $\boldsymbol{B}_0$ uniforme y estática.

a) Demuéstrese que pueden existir ondas magnetohidrodinámicas de amplitud arbitraria y forma $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ descritas por las ecuaciones

$$(\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_1 = \pm\sqrt{\mu_0\rho_0}\,\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \pm\sqrt{\mu_0\rho_0}\,\boldsymbol{v}$$

$$p + \rho_0\psi + \frac{(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1)^2}{2\mu_0} = \text{constante}$$

b) Supóngase que en el instante $t=0$ existe en el fluido una cierta perturbación $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x}, 0)$ tal que satisface las anteriores ecuaciones con el signo superior. ¿Cuál es el comportamiento de la perturbación en tiempos posteriores?

10.5. La ecuación de fuerza para un plasma electrónico, incluyendo un término de colisiones fenomenológico, pero despreciando la presión hidrostática (aproximación de temperatura cero) es

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{e}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) - \nu\boldsymbol{v}$$

en donde ν es la frecuencia de colisión.

a) Demuéstrese que en presencia de campos externos, eléctrico y magnético, estáticos y uniformes, la expresión linealizada de la ley de Ohm en estado estacionario se convierte en

$$J_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j$$

donde el tensor de conductividad es

$$\sigma_{ij} = \frac{\epsilon_0\omega_p^2}{\nu\left(1 + \dfrac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\omega_B}{\nu} & 0 \\ -\dfrac{\omega_B}{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \dfrac{\omega_B^2}{\nu^2}\right) \end{pmatrix}$$

y $\omega_p(\omega_B)$ es la frecuencia (de precesión) del plasma electrónico. La dirección de $\boldsymbol{B}$ se elige según el eje z.

b) Supóngase que en el instante $t=0$ se aplica repentinamente un campo eléctrico externo $\boldsymbol{E}$ en la dirección x, habiendo una inducción magnética $\boldsymbol{B}$ en la dirección z. La corriente es cero en el instante $t=0$. Hállense expresiones que nos den el comportamiento de la corriente en todo momento, incluido el comportamiento transitorio.

10.6. Los efectos debidos a temperatura finita en un plasma pueden ser descritos de forma aproximada por medio de la ecuación sin correlaciones de Boltzmann (Vlasov). Sea $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ la función de distribución de los electrones de carga e

y masa m en un plasma de un componente. La ecuación de Vlasov es

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_x f + \boldsymbol{a} \cdot \nabla_v f = 0$$

en donde ∇_x y ∇_v son gradientes respecto de las coordenadas y la velocidad, y $\boldsymbol{a}$ es la aceleración de una partícula. Para las oscilaciones electrostáticas del plasma $\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{E}/m$, donde $\boldsymbol{E}$ es el campo eléctrico macroscópico que satisface

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{e}{\epsilon_0} \left[\int f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)\, d^3v - n_0 \right]$$

Si $f_0(\boldsymbol{v})$ es la distribución normalizada de los electrones en equilibrio

$$\left[n_0 \int f_0(\boldsymbol{v})\, d^3v = n_0 \right]$$

a) Demuéstrese que la relación de dispersión para las oscilaciones longitudinales del plasma de pequeña amplitud es

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} = \int \frac{\boldsymbol{k} \cdot \nabla_v f_0}{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} - \omega}\, d^3v$$

b) Suponiendo que la velocidad de fase de la onda es grande frente a las velocidades térmicas, demuéstrese que la relación de dispersión nos da

$$\frac{\omega^2}{\omega_p^2} \simeq 1 + 2\frac{\langle \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} \rangle}{\omega} + 3\frac{\langle (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v})^2 \rangle}{\omega^2} + \ldots$$

en donde $\langle\ \rangle$ significa valor medio sobre la distribución de equilibrio $f_0(\boldsymbol{x})$. Relaciónese este resultado con el obtenido en el texto con el modelo del fluido electrónico.

c) ¿Qué significa la singularidad en la relación de dispersión cuando $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} = \omega$?

10.7. Considérese el problema de ondas en un plasma electrónico cuando hay presente una inducción magnética $\boldsymbol{B}_0$. Utilícese el modelo fluido, despreciando el término debido a la presión así como las colisiones.

a) Exprésense las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones de Maxwell linealizadas, suponiendo que todas las variables varían según $\exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - i\omega t)$.

b) Demuéstrese que la relación de dispersión en función del número de ondas para las frecuencias de los distintos modos se puede expresar

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_p^2 - k^2c^2)^2 = \omega_B^2((\omega^2 - k^2c^2)[\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2 - k^2c^2) + \omega_p^2c^2(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{b})^2]$$

donde $\boldsymbol{b}$ es un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{B}_0$; ω_p y ω_B son las frecuencias del plasma y precesión, respectivamente.

c) Suponiendo que $\omega_B \ll \omega_p$, resuélvase de forma aproximada para las distintas raíces en los casos 1) $\boldsymbol{k}$ paralelo a $\boldsymbol{b}$, 2) $\boldsymbol{k}$ perpendicular a $\boldsymbol{b}$. Represéntense los resultados de ω^2 frente a k^2 en los dos casos.

10.8. El campo magnético dipolar de la tierra resulta distorsionado por el «viento solar», un plasma interplanetario que sale como un chorro del sol y consiste principalmente en protones. En la órbita terrestre el viento solar tiene una densidad de aproximadamente 10 protones/cm^3, con velocidades de las partículas del orden de 400 km/seg y un campo magnético asociado de magnitud entre 3 y 7×10^{-5} gauss, valores típicos para el sol en actividad normal.

a) Calcúlese la presión cinética de las partículas del viento solar y calcúlese la distancia (medida en radios terrestres) desde el centro de la tierra y en el plano ecuatorial magnético para la cual la presión magnética del campo de la *tierra* es igual a la presión de las partículas. Supóngase que el campo magnético ecuatorial en la superficie de la tierra es de 0,31 gauss. La distancia a la que las presiones son iguales marca la región en que el viento solar desvía y contiene a las líneas del campo magnético terrestre. ¿Es importante la presión magnética propia del viento solar?

b) Estímese la velocidad del sonido [10.49] y la velocidad de Alfvén [10.55] en el radio crítico de la parte *a)* utilizando el valor del campo magnético terrestre en tal punto. Si las velocidades de las partículas son del mismo orden, o mayores, que estas velocidades, ocurre algo semejante a un fenómeno de choque en la interfase. Esta es la causa del frente de choque en arco que constituye el límite de la magnetosfera en el lado diurno de la tierra. (Consúltese para más detalles los artículos de un simposio en *Reviews of Geophysics*, 7, núms. 1 y 2 (1969).)

TEORIA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Desde su publicación, en 1905, por EINSTEIN, la teoría de la relatividad especial ha llegado a convertirse en uno de los lugares comunes de la física, tan firmemente asentada como las leyes de Newton de la mecánica clásica, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo o la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica. Es utilizada a diario por los científicos en sus estudios de fenómenos atómicos de gran precisión, de física nuclear y sobre todo de física de energías altas.

Los orígenes de la teoría de la relatividad especial yacen en el electromagnetismo. De hecho, puede decirse que el desarrollo de las ecuaciones de Maxwell, con la unificación de la electricidad y el magnetismo con la óptica, forzó la aparición de la relatividad especial. Ante todo, fue LORENTZ quien puso los cimientos con sus estudios sobre electrodinámica a partir de 1890. POINCARÉ hizo contribuciones importantes, pero dejó a EINSTEIN el realizar la generalización crucial a todos los fenómenos físicos, no limitándola a la electrodinámica, y el insistir sobre las amplias consecuencias del segundo postulado. Actualmente se cree que la teoría especial de la relatividad puede aplicarse a todo tipo de interacciones, con la excepción de los fenómenos gravitatorios a gran escala. En la física moderna desempeña el papel de piedra de toque para las posibles formas de interacción entre partículas elementales. Sólo hace falta tomar en consideración aquellas teorías compatibles con la relatividad especial. Con frecuencia, este requisito limita seriamente las posibilidades.

En muchos libros se tratan las bases experimentales y el desarrollo histórico de la teoría de la relatividad especial, así como muchas de sus consecuencias elementales. Al final del capítulo se da una lista de libros y artículos. Nosotros nos contentaremos con hacer un resumen de los puntos clave y dar algunos ejemplos de las verificaciones experimentales más recientes y definitivas. Después se resumen los resultados básicos cinemáticos, incluyendo las transformaciones de coordenadas, tiempo propio y dilatación temporal, efecto Doppler relativista y la composición de velocidades. De los principios generales se deducen la energía y el ímpetu relativistas, independientemente de la ecuación de la fuerza. Después se presenta el grupo de Lorentz y su descripción matemática, con su representación específica mediante matrices 4×4. A continuación se discute el importante fenómeno de la precesión de Thomas, se analizan las bases experimentales de la invariancia de la carga eléctrica, la covariancia de la electrodinámica y las propiedades explícitas de transformación de los campos eléctrico y magnético. El capítulo termina con un tratamiento de las ecuaciones de movimiento relativistas para una partícula con spin y con una breve nota sobre los convenios y la notación en cinemática relativista.

11.1. LA SITUACION ANTERIOR A 1900. LOS DOS POSTULADOS DE EINSTEIN

En los cuarenta años anteriores al 1900, la teoría ondulatoria basada en las ecuaciones de Maxwell había establecido la correlación entre el electromagnetismo y la óptica, explicándolos de un modo triunfal. Como la experiencia previa con el movimiento ondulatorio siempre había requerido un medio para la propagación de las ondas, resultó natural para los físicos el suponer que la luz necesitaba un medio para propagarse a su través. A la vista de los hechos conocidos acerca de la luz, fue necesario suponer que este medio, llamado éter, llenaba todo el espacio, era de densidad despreciable y su interacción con la materia era igualmente despreciable. Existía exclusivamente como vehículo para la propagación de las ondas electromagnéticas.

La hipótesis del éter singularizaba los fenómenos electromagnéticos respecto al resto de la física. Se sabía desde hacía mucho tiempo que las leyes de la mecánica eran las mismas en sistemas de coordenadas diferentes que se movían uniformemente uno respecto al otro. Decimos que las leyes de la mecánica son invariantes bajo las transformaciones galileanas. Para destacar la distinción entre la mecánica clásica y el electromagnetismo consideremos explícitamente la cuestión de la relatividad galileana para cada uno de ellos. Las coordenadas espaciales y el tiempo, para dos sistemas de referencia K y K', con coordenadas (x, y, z, t) y (x', y', z', t'), respectivamente, que se mueven con la velocidad relativa $\boldsymbol{v}$, están relacionados de acuerdo con la relatividad galileana por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t \\ t' &= t \end{aligned} \qquad [11.1]$$

supuesto que se escogen apropiadamente los orígenes espacial y temporal. Como ejemplo de sistema mecánico, considérese un grupo de partículas en interacción mutua mediante potenciales centrales del tipo de dos cuerpos. La ecuación de movimiento de la partícula i-ésima, en una notación obvia, en el sistema de referencia K' es:

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i'}{dt} = -\nabla_i' \sum_j V_{ij}(|\boldsymbol{x}_i' - \boldsymbol{x}_j'|) \qquad [11.2]$$

A partir de las relaciones [11.1] entre las coordenadas de K y K' resulta evidente que $\boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}$, $\nabla_i' = \nabla_i$, $d\boldsymbol{v}_i'/dt' = d\boldsymbol{v}_i/dt$, y $\boldsymbol{x}_i' - \boldsymbol{x}_j' = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j$. Así, pues, [11.2] puede transformarse en

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\nabla_i \sum_j V_{ij}(|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|) \qquad [11.3]$$

a saber, la ecuación de movimiento de Newton en el sistema de referencia K.

La conservación de la *forma* de las ecuaciones de la mecánica clásica en la transformación [11.1] contrasta con el cambio de forma de las ecuaciones que gobiernan los fenómenos ondulatorios. Supóngase que un campo $\psi(\boldsymbol{x}', t')$ satis-

face en el sistema de referencia K' la ecuación de ondas:

$$\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi = 0 \qquad [11.4]$$

Utilizando [11.1] de modo directo se encuentra que, en función de las coordenadas en el sistema de referencia K, la ecuación de ondas [11.4] se convierte en

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\psi = 0 \qquad [11.5]$$

Es decir, la forma de la ecuación de ondas no es invariante bajo las transformaciones galileanas. Además ninguna transformación cinemática de ψ puede devolver a [11.5] la apariencia de [11.4] *. Para las ondas sonoras la falta de invariancia respecto a las transformaciones galileanas es perfectamente aceptable. El viento arrastra nuestras voces. Las ondas sonoras son compresiones y enrarecimientos en el aire o en otros materiales y, evidentemente, el sistema de referencia privilegiado K', en el que es válida [11.4], es aquél en el que el medio transmisor está en reposo.

También parecía suceder igual en electromagnetismo. Con una vital diferencia. Las ondas sonoras y otros fenómenos ondulatorios similares son consecuencias de la mecánica clásica galileana. Se entiende bien la existencia de sistemas de referencia privilegiados, en los que los fenómenos son simples en función de movimientos de conjunto del medio en que tiene lugar la propagación. Sin embargo, para las perturbaciones electromagnéticas el medio parecía verdaderamente etéreo sin ningún otro propósito o manifestación que soportar la propagación.

Cuando EINSTEIN empezó a meditar sobre estas cuestiones existían varias posibilidades:

1. Las ecuaciones de Maxwell eran incorrectas. La teoría apropiada del electromagnetismo era invariante respecto a las transformaciones de Galileo.
2. La relatividad galileana se aplicaba a la mecánica clásica, pero el electromagnetismo tenía un sistema de referencia privilegiado, aquél en el que el éter luminífero estaba en reposo.
3. Existía un principio de relatividad tanto para la mecánica clásica como para el electromagnetismo, pero no era la relatividad galileana. Esto implicaría que las leyes de la mecánica estaban necesitadas de una modificación.

La primera posibilidad era difícilmente viable. El éxito abrumador de la teoría de Maxwell en las manos de HERTZ, LORENTZ, y otros, hacía dudoso que en las ecuaciones del electromagnetismo hubiera un error serio. La se-

---

* Puede que al lector le guste ponderar las diferencias entre la ecuación de onda y la ecuación de Schrodinger bajo transformaciones galileanas. Si en K' la ecuación de Schrodinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2\psi' - V\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t'}$$

entonces en K la ecuación tiene la misma forma para la función de ondas ψ supuesto que V es un invariante galileano y que $\psi = \psi' e^{i(m/\hbar)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} - i(mv^2/2\hbar)t}$. La ecuación de Schrodinger es invariante bajo las transformaciones galileanas.

gunda alternativa era la aceptada por la mayoría de los físicos de la época. Los esfuerzos para observar el movimiento de la tierra y sus laboratorios respecto al sistema de referencia en el que el éter está en reposo, por ejemplo, el experimento de Michelson-Morley, habían fallado. Sin embargo, para este importante experimento el resultado nulo podía explicarse mediante la hipótesis de la contracción de FitzGerald-Lorentz (1892) según la cual los objetos que se mueven con una velocidad v a través del éter están contraídos en la dirección de movimiento de acuerdo con la expresión:

$$L(v)=L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad [11.6]$$

Esta hipótesis, bastante poco usual, yacía aparentemente fuera del electromagnetismo, puesto que se aplica a la materia, pero LORENTZ arguyó más tarde que tenía sus raíces en el electromagnetismo. LORENTZ y POINCARÉ demostraron que las ecuaciones de Maxwell son invariantes en forma bajo lo que ahora conocemos como transformaciones de Lorentz (véase la sección 11.9) y que la contracción [11.6] se cumplía para densidades de carga en movimiento, esto es, en electrodinámica. Con la idea de que la materia es de naturaleza electromagnética (el descubrimiento del electrón dio fuerza a esta hipótesis) es plausible suponer que [11.6] es válida para agregados macroscópicos de electrones y átomos. LORENTZ salvó así la hipótesis del éter de la contradicción con el experimento de Michelson-Morley.

Otros experimentos causaron reveses a la idea del éter. Los famosos experimentos de FIZEAU (1851, 1853), y los posteriores experimentos semejantes de MICHELSON y MORLEY (1886), sobre la velocidad de la luz en los fluidos en movimiento sólo podían ser interpretados si se suponía que el éter era arrastrado parcialmente por el fluido en movimiento, estando relacionada la efectividad del medio para arrastrar el éter con su índice de refracción.

Aparentemente, fue para EINSTEIN la implausibilidad de la explicación de las observaciones de FIZEAU, más que ninguna otra cosa, la que le convenció de la inaceptabilidad de la hipótesis del éter. EINSTEIN eligió la tercera de las anteriores alternativas y buscó principios de relatividad que abarcaran la mecánica clásica, la electrodinámica y, por tanto, todos los fenómenos naturales. La teoría especial de la relatividad de Einstein está basada en dos postulados:

1. Postulado de la relatividad

Las leyes de la naturaleza y los resultados de todos los experimentos realizados en un sistema de referencia determinado son independientes del movimiento de traslación del sistema como conjunto. Más exactamente, existe un conjunto triplemente infinito de sistemas de referencia euclídeos equivalentes que se mueven unos con respecto a otros en trayectorias rectilíneas y con velocidad constante en los cuales todos los fenómenos físicos ocurren de manera idéntica.

Para abreviar, estos sistemas de coordenadas equivalentes se llaman *sistemas de referencia inerciales*. El postulado de relatividad, enunciado aquí más o menos en la forma en que lo hizo POINCARÉ, es compatible con toda nuestra experiencia en mecánica, donde sólo importan movimientos relativos entre cuerpos, y ha sido una hipótesis explícita en mecánica desde los tiempos de

COPÉRNICO, si no antes. Es también compatible con el experimento de Michelson-Morley y deja sin sentido la cuestión de poner de manifiesto el movimiento relativo al éter.

2. Postulado de la constancia de la velocidad de la luz

La velocidad de la luz no depende del movimiento de la fuente.

Este postulado, no comprobado cuando EINSTEIN lo propuso (y verificado decisivamente sólo en años recientes), es la simplicidad misma. Nos fuerza a una reconsideración tan radical de nuestras ideas sobre el espacio y el tiempo que fue rehusado durante muchos años.

La historia de la teoría especial de la relatividad y su establecimiento gradual mediante experimentos posee una bibliografía extensa. Al final del capítulo se dan algunas referencias. De particular relieve es el artículo «Resource Letter on Relativity», publicado en el *American Journal of Physics,* vol. 30, página 462 (1962). En él figuran referencias a libros y artículos de revistas sobre la historia, verificación experimental y demostraciones de laboratorio de todos los aspectos de la relatividad especial.

De pasada señalaremos que los postulados de Einstein exigen la modificación de las leyes de la mecánica para movimientos a gran velocidad. No existía evidencia alguna en aquel momento que indicara un fallo de la relatividad galileana para la mecánica. Básicamente esto es debido a que las partículas relativistas y su dinámica fueron desconocidas hasta el descubrimiento de los rayos beta hacia 1900. POINCARÉ había especulado que la velocidad de la luz podía ser una velocidad límite para las partículas materiales, pero la teoría especial de la relatividad de Einstein tuvo su origen en su deseo de tratar todos los fenómenos físicos de la misma manera y no en ninguna necesidad de «fijar» la mecánica clásica. Las consecuencias de la teoría especial sobre conceptos mecánicos como el ímpetu y la energía se discuten en la sección 11.5.

11.2. ALGUNOS EXPERIMENTOS RECIENTES

Con objeto de omitir la discusión de tópicos estándar, apelamos a los conocimientos previos del lector y a la existencia de muchos libros sobre la teoría especial de la relatividad. A pesar de ello, existen dos experimentos dignos de ser señalados. Uno de ellos se refiere al primer postulado, esto es, a la búsqueda de una «deriva del éter» (evidencia del movimiento del laboratorio respecto al éter) y el otro se refiere al segundo postulado.

a) *Deriva del éter*

El resultado nulo del experimento de Michelson-Morley (1887) estableció que la velocidad de la Tierra a través del presunto éter era menor que la tercera parte de su velocidad orbital, que es aproximadamente de 3×10^4 m/s. El experimento ha sido repetido muchas veces con diferentes modificaciones, siempre sin poner en evidencia segura el movimiento relativo al éter. SHANKLAND y otros, en *Rev. Mod. Phys.,* **27,** 167 (1955), han realizado un resumen de toda la evidencia disponible sobre el tema.

Como ya se ha señalado, estos resultados nulos pueden explicarse sin abandonar el concepto del éter mediante la hipótesis de la contracción de FitzGerald-Lorentz. El descubrimiento por MÖSSBAUER (1958) de la emisión, o absorción, «sin retroceso» de rayos gamma, el llamado *efecto Mössbauer,* permite comparar frecuencias con una exactitud pasmosa, y proporciona la posibilidad de realizar experimentos de gran precisión sobre la deriva del éter, basándose en el efecto Doppler. En el efecto Mössbauer, el ímpetu de retroceso, debido a la emisión o absorción de rayos gamma, es absorbido por todo el sólido en lugar de por el núcleo aislado que emite o absorbe. Esto significa que la *energía* de retroceso es completamente despreciable. El rayo gamma es emitido con toda la energía E_0 de la transición nuclear, no con la energía reducida $E \simeq E_0 - E_0^2/2Mc^2$, siendo M la masa del núcleo que retrocede, que resulta del proceso. Además, con tales transiciones, sin retroceso no hay desplazamientos Doppler de tipo térmico. La línea de rayos gamma se aproxima a su anchura natural sin ensanchamiento o desplazamiento en frecuencia. Empleando un absorbente constituido por el mismo material que el emisor, se puede estudiar la absorción nuclear de resonancia o puede utilizarse como un instrumento para analizar cambios de frecuencia extremadamente pequeños.

Para comprender el principio de un experimento de deriva del éter basado en el efecto Mössbauer, necesitamos recordar los resultados clásicos del efecto Doppler. La fase de una onda plana es una magnitud invariante, igual en todos los sistemas de referencia. Esto es debido a que el avance de fase de una onda es proporcional al número de crestas de la onda que han sobrepasado al observador. Puesto que éste es un mero proceso de contar, debe ser independiente del sistema de coordenadas. Si tenemos una onda electromagnética plana en el vacío, su fase, tal como se observa en los sistemas inerciales K y K', relacionados entre sí mediante la transformación de coordenadas [11.1], es

$$\phi = \omega\left(t - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}}{c}\right) = \omega'\left(t' - \frac{\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{x}'}{c'}\right) \qquad [11.7]$$

Si mediante [11.1] t y x se expresan en función de t' y x', obtenemos:

$$\omega\left[t'\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right) - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}'}{c}\right] = \omega'\left(t' - \frac{\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{x}'}{c'}\right)$$

Como esta igualdad debe cumplirse para todo t' y x' es necesario que los coeficientes de t', x_1', x_2' y x_3' en ambos miembros sean iguales por separado. Por tanto, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{n}' \\ \omega' &= \omega\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right) \\ c' &= c - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} \end{aligned}\right\} \qquad [11.8]$$

Que son las fórmulas usuales del efecto Doppler en la relatividad galileana.

De [11.8] se deduce que el vector unitario normal de la onda $\boldsymbol{n}$ es un invariante, el mismo en todos los sistemas inerciales. Sin embargo, la dirección del flujo de energía cambia de un sistema a otro. Para darse cuenta de ello, considérense los segmentos de onda plana dibujados en la figura 11.1. Puede imaginarse que estos segmentos son representaciones esquemáticas de los tre-

nes de onda. En el instante $t=t'=0$, el centro del segmento se halla en el punto A tanto en K como en K'. Si el sistema inercial K es el sistema de referencia privilegiado (éter en reposo) el tren de ondas se mueve en la dirección $\boldsymbol{n}$, alcanzando el punto B de dicho sistema cuando haya transcurrido una unidad de tiempo. La distancia AB es igual a c. Después de un tiempo unidad, en el sistema K' el centro del segmento de onda llega al punto B'. Tal como se indica en la mitad inferior de la figura 11.1, el punto B' difiere del B en la magnitud vectorial $-\boldsymbol{v}$, debido a la transformación galileana de coordenadas

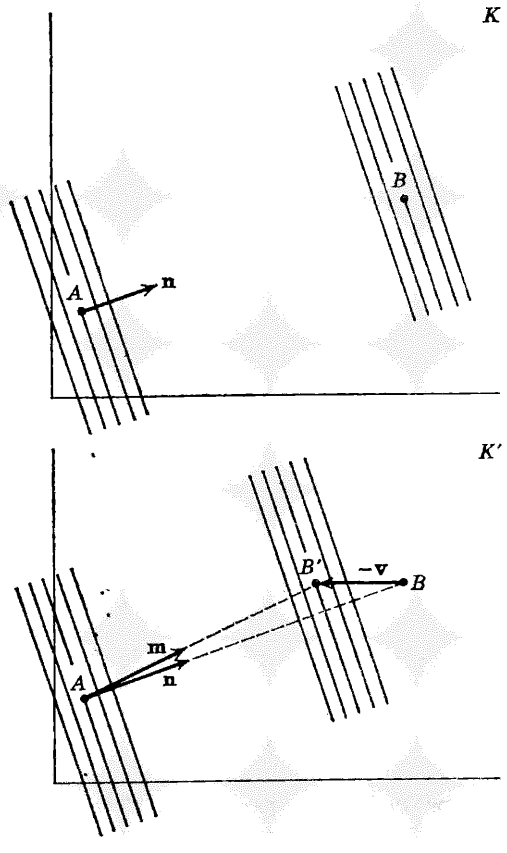


FIG. 11.1.

[11.1]. La dirección de movimiento del tren de ondas, que se supone es la dirección de flujo de la energía, no es, por tanto, paralela a $\boldsymbol{n}$ en K', sino que está dirigida según el vector unitario $\boldsymbol{m}$, que se ha dibujado en la figura 11.1 y viene dado por:

$$\boldsymbol{m}=\frac{c\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}}{|c\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}|} \qquad [11.9]$$

Como los experimentos implican propagación de fotones en el sistema laboratorio, es conveniente disponer de las fórmulas [11.8] del efecto Doppler expresadas en función del vector $\boldsymbol{m}$ apropiado para el laboratorio en lugar de

en función de $\boldsymbol{n}$. Para ello, es suficiente expresar $\boldsymbol{n}$ en función de $\boldsymbol{m}$ de modo correcto en primer orden de v/c. Despejando de [11.9] encontramos

$$\boldsymbol{n} \simeq \left(1 - \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{v}_0}{c}\right) \boldsymbol{m} + \frac{\boldsymbol{v}_0}{c} \qquad [11.10]$$

siendo $\boldsymbol{v}_0$ la velocidad del laboratorio relativa al sistema en el que el éter está en reposo.

Considérese ahora una onda plana cuya frecuencia es ω en el sistema del éter en reposo, ω_0 en el laboratorio y ω_1 en un sistema inercial K_1 que se mueve con una velocidad $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_0$ relativa al sistema del éter en reposo. Según [11.8], las frecuencias observadas son:

$$\omega_1 = \omega \left(1 - \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_1}{c}\right)$$

$$\omega_0 = \omega \left(1 - \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_0}{c}\right)$$

Se demuestra fácilmente que si ω_1 se expresa en función de la frecuencia del laboratorio ω_0 y se elimina el vector normal a la onda $\boldsymbol{n}$, por medio de [11.10], el resultado, correcto hasta términos en v^2/c^2, es

$$\omega_1 \simeq \omega_0 \left[1 - \frac{\boldsymbol{u}_1}{c} \cdot \left(\boldsymbol{m} + \frac{\boldsymbol{v}_0}{c}\right)\right] \qquad [11.11]$$

siendo $\boldsymbol{u}_1$ la velocidad del sistema K_1 respecto al laboratorio, $\boldsymbol{m}$ la dirección de propagación de la energía en el laboratorio, ω_0 la frecuencia de la onda en el laboratorio y $\boldsymbol{v}_0$ la velocidad del laboratorio con respecto al éter.

La ecuación [11.11] constituye la base del análisis de los experimentos de deriva del éter tipo Mössbauer. Es una consecuencia de la validez de la ecuación de onda en el sistema en que el éter está en reposo y de la relatividad galileana para pasar a otros sistemas de referencia. Puesto que en ella aparece $\boldsymbol{v}_0$ es obvio que predice un efecto de deriva del éter. Considérense dos sistemas Mössbauer, uno emisor y el otro absorbente, moviéndose con velocidades $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ en el laboratorio. Según [11.11], la diferencia de frecuencia entre el emisor y el absorbente es

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{c} (\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1) \cdot \left(\boldsymbol{m} + \frac{\boldsymbol{v}_0}{c}\right)$$

Si el emisor y el absorbente están situados en los extremos opuestos de una barra de longitud $2R$ que gira alrededor de su centro con velocidad angular Ω, tal como se indica en la figura 11.2, entonces $(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1) \cdot \boldsymbol{m} = 0$ y la diferencia relativa de frecuencia es

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{2\Omega R}{c^2} \operatorname{sen} \Omega t \cdot |(\boldsymbol{v}_0)_\perp| \qquad [11.12]$$

donde $(\boldsymbol{v}_0)_\perp$ es la componente de $\boldsymbol{v}_0$ perpendicular al eje de rotación.

En 1963 fue realizado, en Birmingham, un experimento de absorción resonante de este tipo *. La línea Mössbauer utilizada fue los rayos gamma de 14,4 keV del ^{57}Fe, procedente de la desintegración β^+ del ^{57}Co. El isótopo ^{57}Fe es estable y se presenta con una abundancia natural del 2,2 por 100; el absorbente fue hecho con hierro enriquecido hasta un 52 por 100 en ^{57}Fe. La fuente de cobalto estaba implantada en ^{56}Fe. Las hojas emisora y absorbente estaban situadas, como se indica en la figura 11.2, siendo $R \simeq 4$ cm. La anchura relativa observada de la línea Mössbauer fue $\Delta\omega/\omega \simeq 2 \times 10^{-12}$. Unos contadores situados fijos en el laboratorio, simétricamente a lo largo de un diámetro de

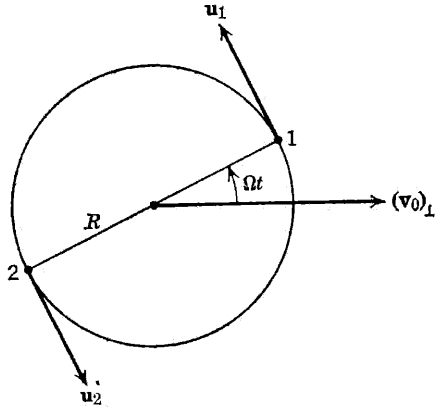


FIG. 11.2.

la circunferencia en el plano de la fuente, recogían los rayos gamma transmitidos a través del absorbente. Cada cuatro horas se alternaron dos velocidades de rotación $\Omega_L = 1\,257$ s^{-1} y $\Omega_H = 7\,728$ s^{-1}, mientras se estaban tomando los datos y se buscaba un efecto diurno conectado a la rotación de la Tierra. De [11.12], puede verse que con $\Omega \simeq 6\,000$ s^{-1} y $R = 4$ cm, una velocidad de deriva del éter de 200 m/s produciría un cambio total de la frecuencia de la magnitud de la anchura de la línea Mössbauer. Los datos no mostraron cambio diurno alguno en la transmisión con una precisión del 1 o 2 por 100. Los autores concluyeron que la magnitud de la componente v_0 en un plano perpendicular al eje de rotación de la Tierra es $|(v_0)_\perp| = 1{,}6 \pm 2{,}8$ m/s, un resultado prácticamente nulo. Un experimento mejorado según las mismas líneas dio, en 1970, un límite de 5 cm/s (véase ISAAK, ob. cit.).

Un experimento conceptualmente semejante fue realizado en 1958 empleando masers de amoniaco **. Las moléculas de amoniaco poseen velocidades no nulas y de dirección bien definida cuando entran en la cavidad del maser. De acuerdo con [11.11] hay, por consiguiente, una desviación de frecuencia. Si se comparan las frecuencias de dos masers cuyas moléculas de amoniaco viajan en sentidos opuestos, debe existir una frecuencia de batido observable. Además, si los dos masers se hacen girar conjuntamente 180°, la frecuencia de

* D. C. CHAMPENEY, G. R. ISAAK y A. M. KHAN, *Phys. Letters*, 7, 241 (1963). Véase también G. R. ISAAK, *Phys. Bull.*, 21, 255 (1970).

** C. J. CEDARHOLM, G. F. BLAND, B. L. HAVENS y C. H. TOWNES, *Phys. Rev. Letters*, 1, 342 (1958). Véase también T. S. JASEJA, A. JAVAN, J. MURRAY y C. H. TOWNES, *Phys. Rev.*, 133, A1221 (1964).

batido debería cambiar en $\Delta\omega/\omega_0 = 4\,|\boldsymbol{u}_{\text{mol}} \cdot \boldsymbol{v}_0|/c^2$. El resultado nulo de este experimento estableció que la componente de la velocidad de deriva del éter era menor de 30 m/s.

Estos dos experimentos de efecto Doppler establecen límites para la velocidad de deriva del éter observable que son 6 000 y 1 000 veces menores que la velocidad de la Tierra en su órbita y hacen muy improbable que podamos nunca detectar cualquier movimiento relativo a cierto sistema de referencia «absoluto».

b) *Velocidad de la luz desde una fuente en movimiento*

El segundo postulado de Einstein, que la velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente, destruye el concepto de tiempo como variable universal independiente de las coordenadas espaciales. Debido a que ésta era una idea revolucionaria e impaladeable, se hicieron muchos intentos para inventar teorías que pudieran explicar todos los hechos observados sin esta hipótesis. El esquema más notable y elástico fue la versión de RITZ de la electrodinámica (1908-1911). RITZ mantuvo intactas las dos ecuaciones de Maxwell homogéneas, pero modificó las ecuaciones que contienen las fuentes de modo que la velocidad de la luz fuera igual a c solamente cuando se medía con respecto a la fuente. La teoría de Ritz está de acuerdo con la observación de la aberración en las posiciones estelares, con los experimentos de FIZEAU y con el experimento original de MICHELSON-MORLEY. Sin embargo, se acostumbra a citar los experimentos de MICHELSON-MORLEY realizados con fuentes de luz extraterrestres (luz solar o estelar) y el comportamiento de la luz procedente de las estrellas binarias como pruebas del segundo postulado y que, por tanto, invalidan la teoría de Ritz.

Actualmente parece claro que la mayoría de las pruebas primitivas del segundo postulado resultan invalidadas por la interacción de la radiación con la materia a cuyo través pasa antes de su detección *. El fenómeno se halla implícito matemáticamente en el *teorema de extinción*, de EWALD (1912) y OSEEN (1915), que establece (véase BORN y WOLFF, págs. 100 y ss., o ROSENFELD, páginas 105 y ss.) que si una onda electromagnética que viaja con la velocidad c correspondiente al vacío penetra en un medio dispersivo, sus campos resultan compensados por una parte de los campos debidos a los dipolos inducidos (desde el punto de vista macroscópico por la polarización $\boldsymbol{P}$) y reemplazados por otra onda que se propaga con la velocidad característica del medio. *La onda incidente queda extinguida por interferencia y reemplazada por otra.* El análisis matemático demuestra que si la dependencia temporal es armónica la compensación de los campos incidentes dentro del medio es debida a los dipolos situados en la *superficie* del medio. Desde el punto de vista físico de un tren de ondas que alcanza la superficie del medio y empieza a propagarse en él, es plausible considerar que la extinción de la onda incidente y su sustitución por la onda correspondiente al medio tiene lugar en una distancia finita X. Además, X debe ser del orden de la distancia requerida para que la onda del vacío y la onda del medio adquieran una diferencia de fase significativa debida a sus velocidades de fase distintas. Como la diferencia de fase

* Véanse los trabajos críticos de J. G. FOX, *Am. J. Phys.*, **30**, 297 (1962); *Am. J. Phys.*, **33**, 1 (1965); *J. Opt. Soc.*, **57**, 967 (1967). El segundo de los trabajos citados contiene una discusión detallada de la teoría de emisión de Ritz y una crítica de los diferentes argumentos contra ella. Véase también T. ALVAGER, A. NILSSON y J. KJELLMAN, *Arkiv f. Fys.*, **26**, 209 (1963).

a la frecuencia ω es $\Delta\phi = \omega(n-1)x/c$, siendo n el índice de refracción, definimos la distancia X del teorema de extinción como:

$$X = \frac{c}{\omega|n-1|} = \frac{\lambda}{2\pi|n-1|} \qquad [11.13]$$

siendo λ la longitud de onda en el vacío. El lector debe advertir con cuidado que X no es el coeficiente de absorción o atenuación (o su recíproco) definido en [9.113]. En este momento estamos tratando con fase, no con absorción.

A título de orientación, señalaremos que para los vidrios ($n \simeq 1{,}5$), y con luz visible ($\lambda \simeq 6\,000$ Å), resulta $X \simeq 2 \times 10^{-7}$ m. Para el aire en condiciones normales ($n - 1 \simeq 2{,}8 \times 10^{-4}$) y la misma longitud de onda, $X \simeq 0{,}04$ cm. Para fotones más energéticos (desde la energía de enlace correspondiente a la capa K hasta rayos gamma de varios MeV) el índice de refracción puede aproximarse mediante la expresión

$$n - 1 \simeq -\frac{1}{2k^2} \cdot \frac{Ne^2}{\epsilon_0 mc^2}$$

en la que N es el número total de *electrones* por unidad de volumen. Con esta aproximación para n, la distancia de extinción es

$$X \simeq (\lambda r_0 N)^{-1}$$

en la que $r_0 = e^2 4\pi\epsilon_0/mc^2 = 2{,}82 \times 10^{-15}$ m es el radio clásico del electrón (y la amplitud de dispersión hacia adelante (Thomson) cambiada de signo). Con rayos gamma de 1 MeV en el aire en condiciones normales encontramos, por ejemplo, $X \simeq 0{,}73$ m. Resulta de interés para casos astronómicos que para la luz visible se estima que $X \simeq 0{,}06 N^{-1}$ años-luz. Como los estudios sobre la dispersión de la radiación de los pulsares indican que en el espacio interestelar $\langle N \rangle \simeq 0{,}03$ cm^{-3}, resulta, por tanto, que para la propagación de la luz visible a través de la galaxia $X \sim 2$ años luz.

Con los distintos valores estimados para X podemos ver que, cualquiera que sea la velocidad de la luz a su salida de la fuente, el medio interpuesto la reemplaza fácilmente por una perturbación de igual frecuencia, pero moviéndose con una velocidad de fase característica del medio en reposo. Los observadores en reposo respecto al medio medirán una velocidad de la luz igual a c, después de hacer las correcciones correspondientes a las propiedades ópticas del medio. El movimiento de la fuente y la velocidad de la luz respecto a ella no importan para nada. Tal como se discute con detalle por Fox (ob. cit.), esencialmente todas las pruebas antiguas y muchos de los experimentos recientes referentes al segundo postulado quedan invalidados como consecuencia del teorema de extinción.

Sin embargo, existen algunos experimentos recientes que no son afectados por las críticas de Fox. El más definitivo es un bello experimento realizado en el CERN, Ginebra (Suiza) en 1964 *. Se midió la velocidad de fotones de 6 GeV, producidos en la desintegración de piones neutros de alta energía, determinando el tiempo de tránsito para distancias de hasta 80 metros. Los piones se obtenían al bombardear con protones de 19,2 GeV un blanco de berilio y tenían velocidades de $0{,}9975c$ (deducida de la velocidad de los piones

* T. Alvager, J. M. Bailey, F. J. M. Farley, J. Kjellman e I. Wallin, *Phys. Letters*, **12**, 260 (1964), y *Arkiv. f. Fys.*, **31**, 145 (1965).

cargados que aparecían en el mismo bombardeo). El control de tiempo se realizó aprovechando la estructura de radiofrecuencia del haz. Se encontró que dentro del error experimental la velocidad de los fotones emitidos por tal fuente en movimiento extremadamente rápido era igual a c. Si se escribe la velocidad observada en la forma $c' = c + kv$, siendo v la velocidad de la fuente, se demostró con el experimento que $k = (0 \pm 1{,}3) \times 10^{-4}$. El valor apropiado de X para fotones de 6 GeV no es totalmente seguro, pero obviamente debe ser mucho mayor que 100 metros (la fórmula sencilla dada anteriormente conduce a $X = 5 \times 10^3$ metros).

El experimento del CERN establece de modo concluyente y a escala de laboratorio la validez del segundo postulado de la teoría especial de la relatividad.

c) *Dependencia con la frecuencia de la velocidad de la luz en el vacío*

La velocidad de la luz se conoce con una precisión de unas pocas partes en 10^9 a partir de medidas a las frecuencias del infrarrojo y con menor precisión a frecuencias mayores. Puede preguntarse si existe alguna evidencia sobre una dependencia de la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío con la frecuencia. Una posible causa de variación sería atribuible a la masa del fotón. La velocidad de grupo en este caso es

$$c(\omega) = c\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

siendo $\hbar\omega_0$ la energía en reposo del fotón. Tal como se discutía en la introducción, la mera existencia de modos normales en la cavidad resonante tierra-ionosfera establece un límite de $\omega_0 < 10c/R$, siendo R el radio de la Tierra. Por consiguiente, desde las radiofrecuencias ($\omega \simeq 10^8$ s^{-1}) hasta $\omega \to \infty$, el cambio en la velocidad de propagación debido a la masa del fotón es menor de $\Delta c/c \simeq 10^{-10}$.

Otra causa de variación con la frecuencia de la velocidad de la luz es la dispersión del vacío, concepto ajeno a la relatividad especial que aparece en modelos con un espacio-tiempo discreto. El descubrimiento de los pulsares hizo posible comprobar esta idea con gran exactitud. Las observaciones de pulsares cubren como mínimo 13 décadas de frecuencia, de modo que cualquier aparato de observación posee una cierta «anchura de ventana» en el espectro de frecuencias. La duración extremadamente pequeña del impulso procedente de algunos pulsares permite realizar una estimación sencilla de un límite superior para la variación de la velocidad de la luz entre dos frecuencias ω_1 y ω_2 pertenecientes al ancho de ventana de cada aparato:

$$\left| \frac{c(\omega_1) - c(\omega_2)}{c} \right| \leqslant \frac{c\Delta t}{D}$$

donde Δt es la duración del impulso y D es la distancia desde la fuente al observador. Para el pulsar de la nebulosa del Cangrejo Np 0532, $\Delta t \simeq 10^{-3}$ s y $D \simeq 6 \times 10^3$ años luz, de modo que $(c\,\Delta t/D) \simeq 1{,}7 \times 10^{-14}$. Por medio de esta estimación sencilla, diferentes observaciones que se superponen desde $\sim 4 \times 10^8$ hertzios, pasando por la región visible y hasta energías de los fotones de 1 MeV indican la constancia de la velocidad de la luz con un nivel de precisión de $\Delta c/c < 10^{-14}$ *. Para energías mayores, un experimento reciente realizado en el

* J. M. RAWLS, *Phys. Rev.*, **D5**, 487 (1972).

acelerador lineal de Stanford comparó la velocidad de fotones de 7 GeV con la de la luz visible y encontró $\Delta c/c < 10^{-5}$ *. Hasta frecuencias muy elevadas no existe, por tanto, evidencia de dispersión en el vacío. La velocidad de la luz es una constante universal, independiente de la frecuencia.

11.3. LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ Y LOS RESULTADOS CINEMATICOS BASICOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Como es bien sabido, la constancia de la velocidad de la luz, independiente del movimiento de la fuente, da lugar a relaciones entre las coordenadas espaciales y temporal en diferentes sistemas inerciales, conocidas como transformaciones de Lorentz. Deducimos estos resultados de modo más formal en la sección 11.7, pero por ahora vamos a resumir la deducción elemental y algunas consecuencias importantes, omitiendo los detalles que pueden encontrarse en los numerosos textos sobre la relatividad. El lector que desee algo más que un recordatorio puede consultar los libros citados al final del capítulo.

a) *La transformación de Lorentz restringida*

Considérense dos sistemas de referencia inerciales K y K' con velocidad relativa v entre sí. Las coordenadas espaciales y temporal de un punto en los sistemas K y K' son, respectivamente, (t, x, y, z) y (t', x', y', z'). Los ejes de coordenadas en los dos sistemas son paralelos y orientados de modo que el sistema K' se mueve en la dirección z positiva con velocidad v, visto desde K. Por simplicidad, supongamos que los orígenes de coordenadas de K y K' coinciden para $t=t'=0$. Si una fuente de luz en reposo en el sistema K (y, por tanto, moviéndose con velocidad v en la dirección negativa del eje z, vista desde K') emite destellos rápidamente para $t=t'=0$, el segundo postulado de Einstein implica que los observadores en ambos sistemas K y K' verán un frente esférico de radiación propagándose hacia afuera desde los orígenes respectivos con velocidad c. El frente de onda alcanza un punto (x, y, z) en el sistema K en un instante t dado por la ecuación

$$c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=0 \qquad [11.14]$$

Análogamente, en el sistema K' el frente de onda queda descrito por

$$c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2)=0 \qquad [11.15]$$

Con la hipótesis de que el espacio-tiempo es homogéneo e isótropo, tal como implica el primer postulado, la relación entre los dos conjuntos de coordenadas debe ser lineal. Entonces, las formas cuadráticas [11.14] y [11.15] estarán relacionadas por la ecuación

$$c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2)=\lambda^2[c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)]$$

en la que $\lambda=\lambda(v)$ representa un posible cambio de escala entre los dos sistemas. Con la elección de la orientación de los ejes y considerando la transfor-

* B. C. BROWN y otros, *Phys. Rev. Letters*, **30**, 763 (1973).

mación inversa desde K' a K es inmediato demostrar que $\lambda(v)=1$ para cualquier v y que las coordenadas espaciales y temporal en K' están relacionadas con las de K por la *transformación de Lorentz*

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= \gamma(x_0-\beta x_1) \\ x_1' &= \gamma(x_1-\beta x_0) \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\} \qquad [11.16]$$

en la que hemos introducido la sugestiva notación $x_0=ct$, $x_1=z$, $x_2=x$, $x_3=y$ y, por conveniencia, los símbolos

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{v}}{c}; \quad \beta=|\boldsymbol{\beta}|; \quad \gamma=(1-\beta^2)^{-1/2} \qquad [11.17]$$

La transformación de Lorentz inversa es

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \gamma(x_0'+\beta x_1') \\ x_1 &= \gamma(x_1'+\beta x_0') \\ x_2 &= x_2' \\ x_3 &= x_3' \end{aligned}\right\} \qquad [11.18]$$

que puede deducirse de [11.16] por cálculos directos. Sin embargo, sabemos por el primer postulado que debe obtenerse a partir de [11.16] intercambiando las variables con y sin prima juntamente con un cambio de signo de β. Según [11.16] u [11.18] las coordenadas perpendiculares a la dirección del movimiento relativo no se alteran mientras que la coordenada paralela y *el tiempo* se transforman. Puede verse el contraste con la transformación de Galileo [11.1].

Las ecuaciones [11.16] y [11.17] describen la situación especial de una transformación de Lorentz entre un sistema y otro que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ paralela al eje x_1. Si los ejes permanecen paralelos, pero la velocidad $\boldsymbol{v}$ del sistema K' con respecto al sistema K tiene una dirección arbitraria, la generalización de [11.16] es

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= \gamma(x_0-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{x}+\frac{(\gamma-1)}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}-\gamma\boldsymbol{\beta}x_0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.19]$$

La primera de estas ecuaciones se deduce de manera casi trivial de la primera de las ecuaciones [11.16]. La segunda parece algo complicada, pero en realidad sólo es el resultado de separar las componentes de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}'$ perpendiculares y paralelas a $\boldsymbol{v}$ para su tratamiento por separado de acuerdo con [11.16].

La relación entre β y γ dada en [11.17] y sus valores $0\leqslant\beta\leqslant 1$, $1\leqslant\gamma\leqslant\infty$ permiten la notación alternativa.

y también

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \tanh\zeta \\ \gamma &= \cosh\zeta, \quad \gamma\beta=\operatorname{senh}\zeta \end{aligned}\right\} \qquad [11.20]$$

en la que ζ recibe el nombre de *rapidez* o *parámetro de refuerzo*. En función

de ζ las dos primeras ecuaciones de las [11.16] se convierten en

$$\begin{aligned} x_0' &= x_0 \cosh \zeta - x_1 \operatorname{senh} \zeta \\ x_1' &= -x_0 \operatorname{senh} \zeta + x_1 \cosh \zeta \end{aligned} \qquad [11.21]$$

La estructura de estas ecuaciones recuerda las de una rotación de coordenadas, salvo que figuran funciones hiperbólicas en lugar de circulares, debido básicamente al signo negativo existente en [11.14] entre los términos espaciales y el temporal (véase la sección 11.7 y [11.95]).

b) *Cuadrivectores*

La transformación de Lorentz [11.16], o más generalmente [11.19] describe la transformación de las coordenadas de un punto desde un sistema inercial a otro. Al igual que para las rotaciones en tres dimensiones, la ley básica de transformación está definida en función de las coordenadas de un punto. En tres dimensiones llamamos a $\boldsymbol{x}$ vector y hablamos de x_1, x_2, x_3 como las componentes del vector. Designamos con el mismo nombre a cualquier conjunto de tres magnitudes físicas que se transforman bajo las rotaciones de la misma manera que $\boldsymbol{x}$. Es natural, pues, anticipar que existen muchas magnitudes físicas que se transforman bajo la transformación de Lorentz de igual manera que las coordenadas espaciales y temporal de un punto. Por analogía hablamos de *cuadrivectores*. El 4-vector de posición es (x_0, x_1, x_2, x_3); análogamente designaremos mediante (A_0, A_1, A_2, A_3) las componentes de un cuadrivector cualquiera *, siendo A_1, A_2, A_3 las componentes del 3-vector $\boldsymbol{A}$. La ley de transformación de Lorentz para un 4-vector arbitrario, equivalente a [11.16], es

$$\left.\begin{aligned} A_0' &= \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{A}) \\ A_{\parallel}' &= \gamma(A_{\parallel} - \beta A_0) \\ A_{\perp}' &= A_{\perp} \end{aligned}\right\} \qquad [11.22]$$

en las que los signos de paralelo y perpendicular indican las componentes que tienen tal carácter respecto a la velocidad $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{\beta}$. La invariancia de un sistema inercial a otro incorporada en [11.15] como consecuencia del segundo postulado tiene su contrapartida para cualquier 4-vector en la invariancia

$$A_0'^2 - |\boldsymbol{A}'|^2 = A_0^2 - |\boldsymbol{A}|^2 \qquad [11.23]$$

en la que las componentes $(A_0', \boldsymbol{A}')$ y $(A_0, \boldsymbol{A})$ se refieren a dos sistemas inerciales de referencia cualesquiera. Para dos 4-vectores (A_0, A_1, A_2, A_3) y (B_0, B_1, B_2, B_3) el «producto escalar» es un invariante, esto es

$$A_0' B_0' - \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}' = A_0 B_0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \qquad [11.24]$$

Este resultado puede verificarse construyendo expresamente el segundo miembro, utilizando [11.22] para las componentes con prima, o utilizando [11.23] para la suma de dos 4-vectores. Es el análogo en la transformación de Lorentz de la invariancia de $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ bajo la rotación en tres dimensiones.

* Como diferimos el tratamiento algebraico explícito del grupo de Lorentz hasta la sección 11.7, no escribimos un símbolo único para este 4-vector. Tal como están escritas, son las componentes del 4-vector contravariante A^{α}.

c) *El cono de luz, el tiempo propio y la dilatación temporal*

En relatividad especial son conceptos fructíferos la idea del cono de luz y los intervalos entre dos sucesos, de tipo «espacial» y de tipo «temporal». Considérese la figura 11.3, en la que el eje temporal (en realidad ct) se ha dibujado verticalmente y los ejes espaciales son perpendiculares a él. Por simplicidad sólo se ha dibujado una de las direcciones espaciales. En el instante

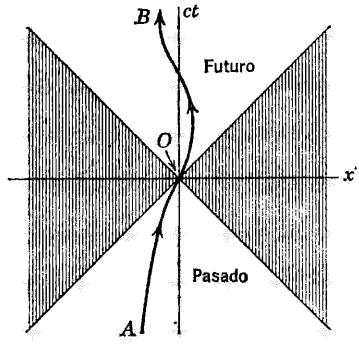


FIG. 11.3. Línea de universo de un sistema y cono de luz. La parte interior del cono (no rayada) representa el pasado y el futuro, mientras que la región rayada exterior del cono representa «cualquier otro lugar». Se dice que un punto interior (exterior) al cono de luz tiene una separación respecto del origen de tipo temporal (tipo espacial).

$t=0$ se encuentra en el origen un sistema físico, por ejemplo, una partícula. Puesto que la velocidad de la luz es un límite superior para cualquier velocidad, la región del espacio-tiempo puede dividirse mediante un «cono», llamado el cono de luz, en tres regiones. La superficie del cono corresponde a la ecuación $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$. Las señales luminosas emitidas desde el origen para $t=0$ recorrerían las líneas inclinadas 45° en la figura. Pero cualquier sistema material posee una velocidad menor que c. Como consecuencia, al avanzar el tiempo dibujaría una trayectoria, llamada línea del universo, en el interior del semicono superior, por ejemplo, la curva OB. Como la trayectoria del sistema yace en el interior del *semicono superior* para instantes $t>0$, dicha región se denomina *el futuro*. Análogamente el *semicono inferior* se denomina *el pasado*. El sistema puede haber alcanzado el origen O mediante una trayectoria tal como la AO que yace en el interior del semicono inferior. La región rayada exterior al cono de luz se denomina *otro lugar*. Un sistema en O nunca puede alcanzar o provenir de un punto del espacio-tiempo situado en esta región.

La división del espacio-tiempo en la región pasado-futuro (dentro del cono de luz) y otro lugar (fuera del cono de luz) puede destacarse aún más considerando el invariante distancia o intervalo s_{12} entre dos sucesos $P_1(t_1, x_1)$ y $P_2(t_2, x_2)$ del espacio-tiempo (por el momento volvemos a la notación t, x para evitar la proliferación de subíndices). El cuadrado del invariante llamado intervalo es

$$s_{12}^2=c^2(t_1-t_2)^2-|x_1-x_2|^2 \qquad [11.25]$$

Para dos sucesos cualesquiera P_1 y P_2 existen tres posibilidades: 1) $s_{12}^2>0$, 2) $s_{12}^2<0$ y 3) $s_{12}^2=0$. Si $s_{12}^2>0$, se dice que los sucesos presentan una sepa-

ración *tipo temporal.* Siempre es posible encontrar una transformación de Lorentz * a un nuevo sistema de coordenadas K' tal que $x_1' = x_2'$. En tal caso

$$s_{12}^2 = c^2(t_1' - t_2')^2 > 0$$

En el sistema K' los dos sucesos ocurren en el mismo lugar del espacio, pero están separados en el tiempo. Sobre la figura 11.3, un punto puede localizarse en el origen y el otro yace en el pasado o en el futuro. Si $s_{12}^2 < 0$, se dice que los sucesos presentan una separación *tipo espacial.* Ahora es posible encontrar un sistema inercial K'' en el cual $t_1'' = t_2''$. Por tanto,

$$s_{12}^2 = -|\boldsymbol{x}_1'' - \boldsymbol{x}_2''|^2 < 0$$

En K'' los dos sucesos ocurren en puntos espaciales diferentes en el mismo instante de tiempo. Sobre la figura 11.3, un suceso está en el origen mientras que el otro se halla en la región «otro lugar». La posibilidad final, $s_{12}^2 = 0$, implica una separación *tipo luz.* Los sucesos yacen uno respecto al otro sobre el cono de luz y sólo pueden estar conectados mediante señales luminosas.

Esta división del intervalo entre dos sucesos del espacio-tiempo en dos clases, separaciones tipo espacial o separaciones tipo temporal, con el cono de luz como superficie límite entre ellas, es un invariante de Lorentz. Dos sucesos con una separación tipo espacial en un sistema de coordenadas presentan una separación tipo espacial en todos los sistemas de coordenadas. Esto significa que los dos sucesos no pueden estar relacionados de modo causal. Como las interacciones físicas se propagan de un punto a otro con velocidades no mayores que la de la luz, sólo los sucesos con separaciones tipo temporal pueden estar relacionados causalmente. Un suceso en el origen de la figura 11.3 sólo puede estar influido causalmente por los sucesos que ocurran en la región del cono de luz que corresponde al pasado.

Otro concepto útil es el de *tiempo propio.* Considérese un sistema, que para concretar pensaremos que es una partícula, que se mueve con la velocidad instantánea $\boldsymbol{u}(t)$ respecto a cierto sistema inercial K. En el intervalo de tiempo dt su posición cambia en $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}\, dt$. Según [11.25] el cuadrado del correspondiente intervalo infinitesimal invariante es

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - |d\boldsymbol{x}|^2 = c^2\, dt^2\,(1 - \beta^2)$$

donde $\beta = u/c$. En el sistema de coordenadas K' en el que el sistema considerado se halla instantáneamente en reposo, los incrementos espacio-temporales son $dt' = d\tau$, $d\boldsymbol{x}' = 0$. Por tanto, el invariante intervalo es $ds = c\, d\tau$. El incremento de tiempo $d\tau$ en el sistema en el que la partícula se halla instantáneamente en reposo es, pues, una *magnitud invariante de Lorentz* que toma la forma:

$$d\tau = dt\,\sqrt{1 - \beta^2(t)} = \frac{dt}{\gamma(t)} \qquad [11.26]$$

El tiempo τ se denomina *tiempo propio de la partícula o sistema.* Es el tiempo tal como se ve en el sistema en reposo de la partícula. De [11.26] se deduce que un cierto intervalo de tiempo propio $\tau_2 - \tau_1$ será visto en el sistema K

* Al considerar las ecuaciones [11.16], el lector puede verificar que existe una transformación de Lorentz con $\beta < 1$, supuesto que $s_{12}^2 > 0$. Explícitamente, $|\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| / c|t_1 - t_2|$.

como un intervalo de tiempo

$$t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2(\tau)}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma(\tau)\, d\tau \qquad [11.27]$$

La ecuación [11.27], o la [11.26], expresa el fenómeno conocido como la *dilatación del tiempo.* Un reloj en movimiento corre más lentamente que un reloj estacionario. Para intervalos de tiempo iguales en el sistema en el que el reloj está en reposo, los intervalos de tiempo observados en el sistema K son mayores en un factor $\gamma > 1$. Este resultado paradójico se verifica diariamente en los laboratorios de física de altas energías, en los que se transportan haces de partículas inestables de vida media conocida τ_0 a distancias muchas veces mayores que el límite superior para la distancia de desintegración galileana, $c\tau_0$, sin que se desintegren. Por ejemplo, en el Fermi National Accelerator Laboratory se producen piones cargados con energías de 200 GeV y se transportan a distancias de 300 metros con menos de un 3 por 100 de pérdidas por desintegración. Con una vida media de $\tau_0 = 2{,}56 \times 10^{-8}$ s, la distancia de desintegración galileana es $c\tau_0 = 7{,}7$ metros. Sin la dilatación del tiempo, sólo $e^{-300/7{,}7} \simeq 10^{-17}$ de los piones sobrevivirían. Pero a 200 GeV, $\gamma \simeq 1\,400$ y el recorrido libre medio para la desintegración de los piones es en realidad $\gamma c\tau_0 = 11$ km.

El estudio de la desintegración de mesones μ que giran a velocidad prácticamente constante en un campo magnético ofrece una prueba cuidadosa de la dilatación temporal en condiciones controladas en el laboratorio. Tal prueba, subproducto de otro experimento, confirma plenamente la fórmula [11.27]. (Véase la revisión de BAILEY y PICASSO citada al final de la sección 11.11.)

Con relojes macroscópicos del tipo usado para mantener la hora oficial se ha realizado un experimento entretenido y totalmente distinto *. El movimiento de los relojes era relativo a la Tierra en un avión comercial, la altísima precisión de los relojes de haz atómico de cesio compensaba las velocidades relativamente bajas del avión de reacción. Se transportaron cuatro relojes alrededor del mundo dos veces, una en sentido hacia el Este y la otra hacia el Oeste. Durante los viajes se registraba la posición del avión y la velocidad respecto al suelo de modo que la integral que aparece en [11.27] podía calcularse. Antes y después de cada viaje los relojes se compararon con otros relojes idénticos en el U.S. Naval Observatory. Haciendo las correcciones debidas a la rotación terrestre y al «corrimiento hacia el rojo» de la relatividad general, las diferencias medias de tiempo observadas y calculadas en nanosegundos -59 ± 10 y -40 ± 23, respectivamente, para el viaje hacia el Este y 273 ± 7 y 275 ± 21 para el viaje hacia el Oeste. El efecto cinemático de la relatividad especial es comparable al efecto de la relatividad general. El acuerdo entre la observación y los cálculos establece que la gente que vuela hacia el Este en un avión de reacción envejece menos aprisa que aquellos de nosotros que permanecemos en casa, ¡pero no demasiado!

d) *Desplazamiento Doppler relativista*

Como ya se hizo notar en la sección 11.2, *a),* la fase de una onda es una magnitud invariante debido a que la fase puede identificarse con la operación simple de contar el número de crestas de un tren de ondas, operación que

* J. C. HAFELE y R. E. KEATING, *Science,* **177**, 166, 168 (1972).

debe ser la misma en todos los sistemas inerciales. En la sección 11.2 se utilizó la transformación galileana de coordenadas [11.1] para obtener las fórmulas [11.8] del efecto Doppler galileano (no relativista). Ahora vamos a emplear la transformación de coordenadas de Lorentz [11.16] para obtener el *efecto Doppler relativista.* Considérese una onda plana de frecuencia ω y vector propagación $\boldsymbol{k}$ en el sistema inercial K. En el sistema en movimiento K' esta onda tendrá, en general, una frecuencia ω' y un vector propagación $\boldsymbol{k}'$ diferentes, pero la fase de la onda es un invariante:

$$\phi = \omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = \omega' t' - \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}' \qquad [11.28]$$

(Señalemos de pasada que una onda plana en K con fase ϕ, continúa siendo una onda plana en el sistema K', por ser lineales las ecuaciones [11.16].) Utilizando [11.16] y los mismos argumentos que hicimos al pasar de [11.7] a [11.8], encontramos que la frecuencia $\omega' = ck_0'$ y el vector propagación $\boldsymbol{k}'$ vienen dados en función de $\omega = ck_0$ y $\boldsymbol{k}$ por

$$\left.\begin{aligned} k_0' &= \gamma(k_0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k}) \\ k_{\parallel}' &= \gamma(k_{\parallel} - \beta k_0) \\ \boldsymbol{k}_{\perp}' &= \boldsymbol{k}_{\perp} \end{aligned}\right\} \qquad [11.29]$$

La transformación de Lorentz de $(k_0, \boldsymbol{k})$ tiene exactamente la misma forma que la de $(x_0, \boldsymbol{x})$. *La frecuencia y el número de ondas de cualquier onda plana forman, por tanto, una cuadrivector.* La invariancia de la fase en [11.28] resulta ser la invariancia del «producto escalar» de dos 4-vectores [11.24]. Esta correspondencia constituye de hecho una alternativa para pasar de la fórmula [11.28] a la ley de transformación [11.29].

Para las *ondas luminosas* $|\boldsymbol{k}| = k_0$, $|\boldsymbol{k}'| = k_0'$. Por tanto, los resultados pueden expresarse en la forma más familiar de las expresiones del desplazamiento Doppler

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \gamma\omega(1 - \beta\cos\theta) \\ \tan\theta' &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)} \end{aligned}\right\} \qquad [11.30]$$

donde θ y θ' son los ángulos que forman $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{k}'$ con la dirección de $\boldsymbol{v}$. Las ecuaciones inversas se obtienen intercambiando las magnitudes con y sin primas y cambiando β de signo.

La primera ecuación de las [11.30] es el efecto Doppler usual, pero modificado por el factor γ. Su presencia demuestra que hay un desplazamiento Doppler *transversal,* aunque $\theta = \pi/2$. Este efecto Doppler transversal relativista ha sido observado espectroscópicamente con átomos en movimiento (experimento de IVES-STILWELL, 1938). También ha sido observado en un experimento de absorción de resonancia Mössbauer muy exacto, con una fuente de rayos gamma nucleares en el eje de un cilindro que gira rápidamente en tanto que el absorbente se halla adosado a la circunferencia del cilindro *.

* H. J. HAY, J. P. SCHIFFER, T. E. CRANSHAW y P. E. EGELSTAFF, *Phys. Rev. Letters,* 4, 165 (1960). Véase también T. E. CRANSHAW, *en Proceedings of the International School of Physics,* Varenna, Curso XX, 1961, Academic Press, Nueva York (1962), página 208.

11.4. LA ADICION DE VELOCIDADES. CUADRIVELOCIDAD

La transformación de Lorentz para las coordenadas [11.16] u [11.18] puede emplearse para obtener la ley de adición de velocidades. Supóngase que existe un punto en movimiento P cuyo vector velocidad $\boldsymbol{u}'$ tiene las coordenadas esféricas (u', θ', ϕ') en el sistema inercial K', tal como se muestra en la figura 11.4. El sistema K' se está moviendo con velocidad $\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{\beta}$ en la dirección positiva del eje x_1 con respecto al sistema inercial K. Deseamos saber las com-

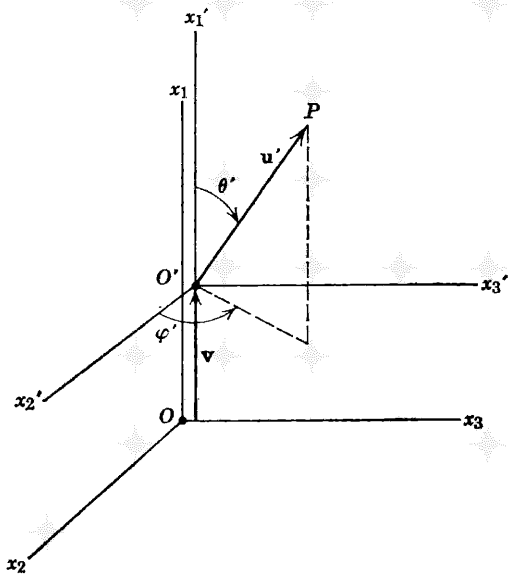


FIG. 11.4. Adición de velocidades.

ponentes de la velocidad $\boldsymbol{u}$ del punto P tal como se ven desde K. Según [11.18] las expresiones diferenciales de dx_0, dx_1, dx_2, dx_3 son

$$\begin{aligned} dx_0 &= \gamma_v(dx_0' + \beta\, dx_1') \\ dx_1 &= \gamma_v(dx_1' + \beta\, dx_0') \\ dx_2 &= dx_2' \\ dx_3 &= dx_3' \end{aligned}$$

en las que hemos puesto un subíndice a γ con el fin de distinguirla más adelante de $\gamma_u=(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ y $\gamma_{u'}=(1-u'^2/c^2)^{-1/2}$. Las componentes de la velocidad en cada sistema son $u_i'=c\,dx_i'/dx_0'$ y $u_i=c\,dx_i/dx_0$, respectivamente. Esto significa que las componentes de la velocidad se transforman de acuerdo con

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{\parallel} &= \frac{\boldsymbol{u}_{\parallel}' + \boldsymbol{v}}{1 + \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}'}{c^2}} \\ \boldsymbol{u}_{\perp} &= \frac{\boldsymbol{u}_{\perp}'}{\gamma_v\left(1 + \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}'}{c^2}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad [11.31]$$

La notación $\boldsymbol{u}_{\parallel}$ y $\boldsymbol{u}_{\perp}$ se refiere respectivamente a los componentes de la velocidad paralela y perpendicular a $\boldsymbol{v}$. El módulo de $\boldsymbol{u}$ y sus ángulos polares θ, ϕ en el sistema K se hallan fácilmente. Como $u_2/u_2' = u_3/u_3'$, los ángulos acimutales en los dos sistemas son iguales. Además

$$\tan\theta = \frac{u' \operatorname{sen}\theta'}{\gamma_v(u'\cos\theta' + v)}$$

y

$$u = \frac{\sqrt{u'^2 + v^2 + 2u'v\cos\theta' - \left(\dfrac{u'v\operatorname{sen}\theta'}{c}\right)^2}}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}\cos\theta'} \qquad [11.32]$$

Los resultados inversos expresando $\boldsymbol{u}'$ en función de $\boldsymbol{u}$ pueden encontrarse, como es usual, a partir de [11.31] y [11.32] intercambiando las magnitudes con y sin prima y cambiando el signo de $\boldsymbol{v}$.

Cuando ambas velocidades u' y v son pequeñas comparadas con la de la luz, la ley de adición de velocidades [11.31] se reduce al resultado galileano, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}$, pero si cualquiera de las velocidades es comparable a c aparecen modificaciones. Es imposible obtener una velocidad mayor que la de la luz sumando dos velocidades, aún si cada una es muy próxima a c. En el caso sencillo de velocidades paralelas la ley de composición es

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{vu'}{c^2}} \qquad [11.33]$$

Si $u' = c$, entonces también $u = c$. Este es un ejemplo explícito del segundo postulado de Einstein. El lector puede comprobar a partir de la segunda de las ecuaciones [11.32] que $u' = c$ implica también $u = c$ para velocidades no paralelas.

Esta fórmula de adición de velocidades está de acuerdo con pruebas experimentales tales como los experimentos de FIZEAU sobre la velocidad de la luz en líquidos en movimiento y la aberración de las posiciones estelares debida al movimiento de la Tierra en su órbita.

De la estructura de [11.31] resulta obvio que la ley de transformación de las velocidades no es la de los 4-vectores, dada por [11.22], de la que son ejemplos las [11.16] y [11.29]. Sin embargo, existe un cuadrivector estrechamente relacionado con la velocidad ordinaria. Para poner de manifiesto este 4-vector vamos a reescribir las [11.31]. Puede demostrarse de modo directo a partir de la segunda de las ecuaciones [11.32] que el factor $(1 + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}'/c^2)$ puede expresarse alternativamente en la forma

$$\gamma_u = \gamma_v\gamma_{u'}\left(1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}'}{c^2}\right) \qquad [11.34]$$

siendo γ_v, γ_u y $\gamma_{u'}$ las gammas definidas para $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{u}'$, respectivamente, por medio de [11.17]. Cuando se sustituye [11.34] en [11.31] aquellas ecuaciones se

convierten en

$$\begin{aligned} \gamma_u u_{\parallel} &= \gamma_v(\gamma_{u'} u'_{\parallel} + v\gamma_{u'}) \\ \gamma_u \boldsymbol{u}_{\perp} &= \gamma_{u'} \boldsymbol{u}'_{\perp} \end{aligned} \qquad [11.35]$$

Una comparación de [11.34] y [11.35] con la inversa de [11.22] sugiere que las *cuatro cantidades* $(\gamma_u c, \gamma_u \boldsymbol{u})$ se transforman de la misma manera que $(x_0, \boldsymbol{x})$ y, por tanto, forman un 4-vector para las transformaciones de Lorentz. Estas cuatro cantidades se denominan componentes temporal y espaciales de la cuadrivelocidad $(U_0, \boldsymbol{U})$.

De modo alternativo se puede obtener la cuadrivelocidad a través del concepto de tiempo propio τ. La velocidad ordinaria $\boldsymbol{u}$ se define como la derivada temporal de las coordenadas $\boldsymbol{x}(t)$. La ley de adición de velocidades [11.31] no es una ley de transformación entre 4-vectores, puesto que el tiempo no es invariante bajo las transformaciones de Lorentz. Pero hemos visto que el tiempo propio τ es un invariante de Lorentz. Por consiguiente, podemos construir un 4-vector «velocidad» por derivación del 4-vector $(x_0, \boldsymbol{x})$ con respecto a τ en lugar de a t.

Haciendo uso de [11.26] tenemos

$$\left.\begin{aligned} U_0 &\equiv \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dx_0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_u c \\ \boldsymbol{U} &\equiv \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \boldsymbol{u} \end{aligned}\right\} \qquad [11.36]$$

En la próxima sección veremos que las componentes de la 4-velocidad de una partícula son proporcionales a su energía total y a su ímpetu.

11.5. ENERGIA E IMPETU RELATIVISTAS DE UNA PARTICULA

A continuación consideramos las generalizaciones relativistas del ímpetu y la energía cinética de una partícula. Estas generalizaciones pueden obtenerse para las partículas cargadas a partir de la ecuación de la fuerza de Lorentz y las propiedades de transformación de los campos electromagnéticos establecidas ya por LORENTZ antes de 1900, pero resulta útil dar una deducción más general basada únicamente en la cinemática de las transformaciones de Lorentz y en las leyes de conservación de la energía y el ímpetu. Este procedimiento muestra claramente la universalidad de las relaciones, independientemente de la existencia de interacciones electromagnéticas para la partícula en cuestión.

Para una partícula cuya velocidad sea pequeña comparada con la velocidad de la luz su ímpetu y su energía son, como es sabido:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{u} \\ E &= E(0) + \tfrac{1}{2}mu^2 \end{aligned} \qquad [11.37]$$

siendo m la masa de la partícula, $\boldsymbol{u}$ su velocidad, y $E(0)$ una constante que se identifica como la energía en reposo de la misma. En consideraciones no relativistas las energías en reposo pueden ignorarse; contribuyen con la misma

constante aditiva en ambos lados de la ecuación que expresa el balance de energía. Sin embargo, en la relatividad especial la energía en reposo no puede ser ignorada. Veremos más adelante que es la energía total (la suma de la energía en reposo más la energía cinética) de la partícula la que resulta significativa.

Nuestro propósito es hallar expresiones para el ímpetu y la energía de una partícula que sean compatibles con la ley de transformación de velocidades de Lorentz [11.31] y que se reduzcan a [11.37] para el caso de movimiento no relativista. Las únicas generalizaciones posibles compatibles con el primer postulado son

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \mathcal{M}(u)\boldsymbol{u} \\ E &= \mathcal{E}(u) \end{aligned} \qquad [11.38]$$

donde $\mathcal{M}(u)$ y $\mathcal{E}(u)$ son funciones del módulo de la velocidad $\boldsymbol{u}$. Al comparar con [11.37] se obtienen los valores límite

$$\mathcal{M}(0) = m \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u^2}(0) = \frac{m}{2} \qquad [11.39]$$

Haremos la hipótesis razonable de que $\mathcal{M}(u)$ y $\mathcal{E}(u)$ son funciones monótonas y bien comportadas de sus argumentos.

Para determinar la forma de $\mathcal{M}(u)$ y $\mathcal{E}(u)$ consideremos el choque elástico de dos partículas *idénticas* y exigiremos que la conservación del ímpetu y de la energía se cumplan para todos los sistemas inerciales equivalentes, tal como implica el primer postulado. En particular, consideremos el choque desde dos sistemas K y K' relacionados mediante una transformación de Lorentz paralela al eje z. Es inevitable cierta cantidad de álgebra. Para reducirla a un mínimo, se abren dos posibilidades. Una es disponer las velocidades y direcciones de las partículas de modo tan sagaz que las expresiones se reduzcan rápidamente dando un resultado elegante y transparente. El otro es tomar una situación cinemáticamente inmediata y proceder juiciosamente. El primer procedimiento carece de motivación. Adoptaremos el segundo.

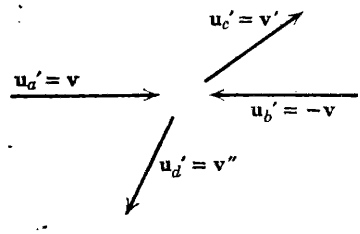


FIG. 11.5. Vectores velocidad inicial y final en el sistema K' para la colisión de dos partículas idénticas.

Sea el sistema inercial K' el sistema «centro de masas» y que las dos partículas idénticas tengan velocidades iniciales $\boldsymbol{u}'_a = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}'_b = -\boldsymbol{v}$ a lo largo del eje z. Las partículas chocan y se dispersan, saliendo con velocidades finales, $\boldsymbol{u}'_c = \boldsymbol{v}'$ y $\boldsymbol{u}'_d = \boldsymbol{v}''$ Las distintas velocidades se indican en la figura 11.5. En el sistema K' las ecuaciones de conservación para el ímpetu y la energía son

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}'_a + \boldsymbol{p}'_b &= \boldsymbol{p}'_c + \boldsymbol{p}'_d \\ E'_a + E'_b &= E'_c + E'_d \end{aligned}$$

o, con la notación de [11.38],

$$\mathcal{M}(v)\boldsymbol{v} - \mathcal{M}(v)\boldsymbol{v} = \mathcal{M}(v')\boldsymbol{v}' + \mathcal{M}(v'')\boldsymbol{v}''$$
$$\mathcal{E}(v) + \mathcal{E}(v) = \mathcal{E}(v') + \mathcal{E}(v'') \qquad [11.40]$$

Por ser idénticas las partículas es necesario que $\mathcal{E}(v') = \mathcal{E}(v'')$ y, con la hipótesis de comportamiento monótono de $\mathcal{E}(v)$, debe ser $v' = v''$. La segunda ecuación de las [11.40] exige entonces que $v' = v'' = v$. La primera ecuación requiere que $\boldsymbol{v}'' = -\boldsymbol{v}'$. Las cuatro velocidades tienen el mismo módulo, siendo las velocidades finales iguales y opuestas exactamente igual que lo eran las iniciales. Esta situación bastante obvia se indica en la parte derecha de la figura 11.6, en la que se ha llamado θ' al ángulo de dispersión medido en K'.

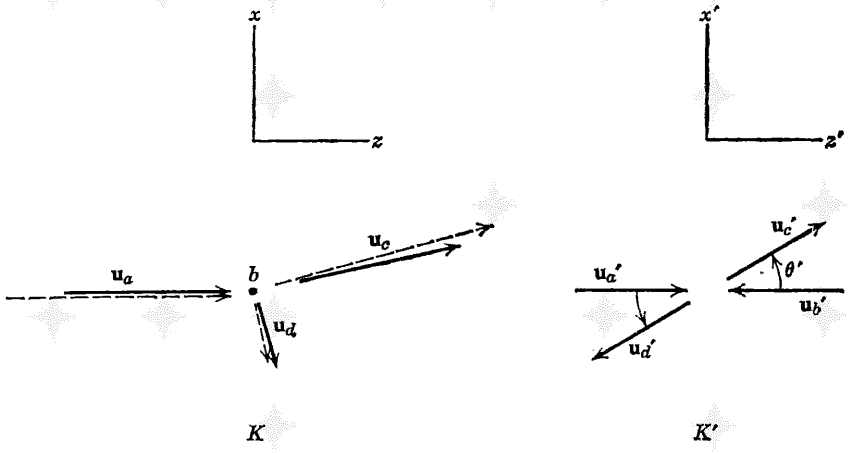


FIG. 11.6. Vectores velocidad inicial y final en los sistemas K y K' para la colisión de dos partículas idénticas. Las longitudes y los ángulos de las líneas continuas que representan las velocidades corresponden a $\theta' = 30°$ y $\beta^2 = 1/3$. Las líneas de trazos en K son los resultados de una transformación de Galileo desde K' a K.

Consideremos ahora la colisión desde otro sistema inercial K que se mueve con velocidad $-v$ en la dirección z con respecto a K'. Puede verse mediante las ecuaciones de transformación [11.31] que la partícula b se encuentra en reposo en K mientras que la partícula a incide a lo largo del eje z con una velocidad

$$\boldsymbol{u}_a = \frac{2\boldsymbol{v}}{1 + \dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{2c\boldsymbol{\beta}}{1 + \beta^2} \qquad [11.41]$$

siendo $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$. Análogamente, las componentes de las velocidades finales $\boldsymbol{u}_c$ y $\boldsymbol{u}_d$ en K son

$$\left.\begin{aligned} (u_c)_x &= \frac{c\beta \operatorname{sen}\theta'}{\gamma(1 + \beta^2\cos\theta')}; & (u_c)_z &= \frac{c\beta(1 + \cos\theta')}{1 + \beta^2\cos\theta'} \\ (u_d)_x &= -\frac{c\beta \operatorname{sen}\theta'}{\gamma(1 - \beta^2\cos\theta')}; & (u_d)_z &= \frac{c\beta(1 - \cos\theta')}{1 - \beta^2\cos\theta'} \end{aligned}\right\} \qquad [11.42]$$

con $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Las ecuaciones de conservación del ímpetu y la energía en el sistema inercial K son

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u_a)\boldsymbol{u}_a + \mathcal{M}(u_b)\boldsymbol{u}_b &= \mathcal{M}(u_c)\boldsymbol{u}_c + \mathcal{M}(u_d)\boldsymbol{u}_d \\ \mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(u_b) &= \mathcal{E}(u_c) + \mathcal{E}(u_d) \end{aligned} \qquad [11.43]$$

Se deduce de [11.41] y [11.42], o de la parte izquierda de la figura 11.6, que en tanto que la partícula b está en reposo, las otras tres velocidades son, en general, todas distintas. Así, pues, la determinación de $\mathcal{M}(u)$ y $\mathcal{E}(u)$ a partir de [11.43] parece oscura. Sin embargo, podemos considerar la situación límite de un choque rasante en el cual θ' es muy pequeño. Entonces en el sistema K $\boldsymbol{u}_d$ será no relativista y $\boldsymbol{u}_c$ sólo diferirá ligeramente de $\boldsymbol{u}_a$. Por tanto, podemos desarrollar en series de Taylor apropiadas alrededor de $\theta'=0$ y obtener expresiones de $\mathcal{M}(u)$, $\mathcal{E}(u)$ y quizás sus primeras derivadas. En forma explícita, la componente x de la ecuación de conservación del ímpetu en [11.43] es

$$0 = \mathcal{M}(u_c)\frac{c\beta \operatorname{sen}\theta'}{\gamma(1+\beta^2\cos\theta')} - \mathcal{M}(u_d)\frac{c\beta \operatorname{sen}\theta'}{\gamma(1-\beta^2\cos\theta')}$$

Eliminando factores comunes y reordenando términos, tenemos

$$\mathcal{M}(u_c) = \left(\frac{1+\beta^2\cos\theta'}{1-\beta\cos\theta'}\right)\mathcal{M}(u_d)$$

Esta relación es válida para todo θ' y en particular para $\theta'=0$. La inspección de [11.42] muestra que en este límite $\boldsymbol{u}_c=\boldsymbol{u}_a$, $\boldsymbol{u}_d=0$. Así, obtenemos

$$\mathcal{M}(u_a) = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)\mathcal{M}(0) \qquad [11.44]$$

Partiendo de [11.41] es fácil demostrar que

$$\frac{1+\beta_a^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u_a^2}{c^2}}} \equiv \gamma_a \qquad [11.45]$$

Con el valor $\mathcal{M}(0)=m$ de [11.39] tenemos, pues,

$$\mathcal{M}(u_a) = \gamma_a m$$

o, lo que es equivalente, que el ímpetu de una partícula de masa m y velocidad $\boldsymbol{u}$ es

$$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{u} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad [11.46]$$

Determinar la forma funcional de $\mathcal{E}(u)$ requiere algo más que el sencillo cálculo de la ecuación de conservación de la energía para $\theta'=0$. Debemos examinar la ecuación para valores de θ' pequeños. Según [11.43]

$$\mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(u_c) + \mathcal{E}(u_d) \qquad [11.47]$$

en la que u_c y u_d son funciones de θ'. A partir de [11.42] u [11.32] con aproximación del orden θ'^2, hallamos

$$u_c^2 = u_a^2 - \frac{\eta}{\gamma_a^3} + 0(\eta^2); \qquad u_d^2 = \eta + 0(\eta^2)$$

en las que γ_a está dado por [11.45] y $\eta = c^2\beta^2\theta'^2/(1-\beta^2)$ es un parámetro conveniente para el desarrollo. Desarrolando ambos miembros de [11.47] en serie de Taylor e igualando los coeficientes de las distintas potencias de η:

$$\mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(u_a) + \eta \cdot \left(\frac{d\mathcal{E}(u_c)}{du_c^2} \frac{\partial u_c^2}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} + \ldots \mathcal{E}(0) + \eta \cdot \left(\frac{d\mathcal{E}(u_d)}{du_d^2} \cdot \frac{\partial u_d^2}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} + \ldots$$

Los términos de orden cero dan una identidad, pero el término de primer orden da

$$0 = -\frac{1}{\gamma_a^3} \frac{d\mathcal{E}(u_a)}{du_a^2} + \left(\frac{d\mathcal{E}(u_d)}{du_d^2} \right)_{u_d=0}$$

Con el valor no relativista conocido para el segundo término según [11.39], encontramos

$$\frac{d\mathcal{E}(u_a)}{du_a^2} = \frac{m}{2} \gamma_a^3 = \frac{m}{2\left(1 - \frac{u_a^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Que conduce, por integración, a la expresión

$$\mathcal{E}(u) = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} + [\mathcal{E}(0) - mc^2] \qquad [11.48]$$

para la energía de una partícula de masa m y velocidad $\boldsymbol{u}$, salvo una constante de integración arbitraria. Indicaremos de pasada que en un proceso de dispersión elástica la condición de conservación de la energía puede expresarse en términos de energías cinéticas sólo. Por consiguiente, la constante indeterminada en [11.48] es necesaria y no es, como el lector podría haber conjeturado, el resultado de nuestros desarrollos en serie de Taylor. Nótese que la energía *cinética* $T(u_a)$ está dada de forma no ambigua por

$$T(u) = \mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(0) = mc^2 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1 \right] \qquad [11.49]$$

Las ecuaciones [11.46] y [11.48] constituyen las generalizaciones relativistas necesarias para el ímpetu y la energía de una partícula, que son compatibles con las leyes de conservación y los postulados de la relatividad especial. La única cuestión pendiente es el valor de la energía en reposo $\mathcal{E}(0)$. Podemos apelar directamente a la experiencia o examinar la estructura teórica. Veamos en primer lugar el aspecto experimental. Aunque $\mathcal{E}(0)$ no puede determinarse por dispersión elástica, puede encontrarse mediante procesos inelásticos en los

que un tipo de partícula se transforma en otro, u otros de masas diferentes. Los procesos de desintegración son particularmente sencillos. Por ejemplo, considérese la desintegración de un mesón K neutro en dos fotones, $K^0 \rightarrow \gamma\gamma$. En el sistema en el que el mesón K está en reposo, la conservación de la energía requiere que la suma de las energías de los dos fotones sea igual a $\mathcal{E}_K(0)$. Para otro modo de desintegración del mesón K neutro, en dos piones, la energía cinética de cada pión en el sistema en el que el mesón K está en reposo debe ser

$$T_\pi = \frac{1}{2}\mathcal{E}_K(0) - \mathcal{E}_\pi(0)$$

La medida de la energía cinética del pión [11.49] y el conocimiento de $\mathcal{E}_K(0)$ permite la determinación de $\mathcal{E}_\pi(0)$. En estos ejemplos, y en cualquier otro caso, se encuentra que la energía en reposo de una partícula (o sistema más complicado) de masa m viene dada por la famosa relación de Einstein entre masa y energía

$$\mathcal{E}(0) = mc^2 \qquad [11.50]$$

Así, pues, el segundo término (entre corchetes) de la [11.48] es nulo. La energía total de una partícula de masa m y velocidad $\boldsymbol{u}$ es

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad [11.51]$$

La segunda vía para obtener los resultados [11.50] y [11.51] es la teórica. Aunque hemos encontrado las expresiones [11.46] y [11.48] para el ímpetu y la energía de una partícula aplicando los principios de la relatividad especial a la conservación de la energía y del ímpetu, aún no se han establecido explícitamente las propiedades de $\boldsymbol{p}$ y E en las transformaciones de Lorentz. Las ecuaciones de conservación son un conjunto de cuatro ecuaciones que se suponen válidas en todos los sistemas inerciales equivalentes. La conservación del ímpetu consiste en tres ecuaciones que relacionan las componentes espaciales de ciertos vectores. En el marco de la relatividad especial es natural intentar el identificar las *cuatro* ecuaciones de conservación como relaciones entre 4-vectores. Observamos que el ímpetu [11.46] es proporcional a las componentes espaciales de la cuadrivelocidad $(U_0, \boldsymbol{U})$ definida en [11.36], a saber, $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{U}$. La componente temporal de este 4-vector es $p_0 = mU_0 = m\gamma_u c$. Una comparación con [11.48] demuestra que la energía de una partícula difiere de cp_0 en una constante aditiva $[\mathcal{E}(0) - mc^2]$. Esto significa que las cuatro ecuaciones de conservación de la energía y el ímpetu para un proceso de colisión arbitrario pueden escribirse en la forma

$$\sum_{\substack{a \\ \text{inicial}}} (p_0)_a = \sum_{\substack{b \\ \text{final}}} (p_0)_b = \Delta_0; \qquad \sum_{\substack{a \\ \text{inicial}}} \boldsymbol{p}_a = \sum_{\substack{b \\ \text{final}}} \boldsymbol{p}_b = \boldsymbol{\Delta} \qquad [11.52]$$

siendo $(\Delta_0, \boldsymbol{\Delta})$ un 4-vector con $\boldsymbol{\Delta} = 0$ y

$$c\Delta_0 = \sum_{\text{final}} [\mathcal{E}_b(0) - m_b c^2] - \sum_{\text{inicial}} [\mathcal{E}_a(0) - m_a c^2]$$

Según el primer postulado, [11.52] debe ser válida en todos los sistemas inerciales equivalentes. Pero si $\Delta \equiv 0$ en todos los sistemas inerciales puede verse, según [11.22], que es necesario que $\Delta_0 \equiv 0$; el cuadrivector (Δ_0, Δ) es un vector nulo. Si en un cierto proceso pueden presentarse diferentes tipos o números de partículas en los estados inicial y final, sólo puede satisfacerse la condición $\Delta_0 = 0$, exigiendo que [11.50] se cumpla para cada partícula por separado. De este modo, nos vemos conducidos a [11.51] como la forma correcta para la energía total.

La velocidad de la partícula puede expresarse evidentemente en función de su ímpetu y energía combinando [11.46] y [11.51] en la forma

$$\boldsymbol{u} = \frac{c^2 \boldsymbol{p}}{E} \qquad [11.53]$$

La «longitud» invariante del 4-vector energía-ímpetu $(p_0 = E/c, \boldsymbol{p})$ es

$$p_0^2 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = (mc)^2 \qquad [11.54]$$

Vemos que la propiedad invariante que caracteriza el ímpetu y la energía de la partícula es su masa m, llamada algunas veces masa en reposo *. La ecuación [11.54] constituye, en combinación con las ecuaciones de conservación, un medio elegante y poderoso de tratar la cinemática relativista en procesos de colisión y desintegración (véanse los problemas al final de capítulo). Nótese que [11.54] permite que la energía E se exprese en función del ímpetu mediante

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \qquad [11.55]$$

Las relaciones [11.46], [11.51] y [11.53] para el ímpetu, la energía y la velocidad de una partícula son tan universalmente aceptadas que parece superfluo hablar de pruebas experimentales. No obstante, quizás vale la pena citar algunas demostraciones en el laboratorio. Una de ellas es la relación entre la energía cinética de una partícula [11.49] y su velocidad **. Se midieron las velocidades de electrones de energías cinéticas conocidas desde 0,5 a 15 MeV (acelerados a través de una diferencia de potencial conocida en un generador de Van der Graaf y verificada después en el captador del haz por calorimetría) haciendo que ráfagas de electrones (de duración $\Delta t = 3 \times 10^{-9}$ s) viajaran a través de una trayectoria de 8,4 metros. Al aumentar la energía el tiempo de tránsito disminuye hacia un valor límite de $2{,}8 \times 10^{-8}$ s en buen acuerdo con [11.49]. La verificación de que c es una velocidad límite para las partículas materiales ha sido realizada con electrones de 11 GeV ($\gamma \simeq 2 \times 10^7$) en el experimento de Stanford citado al fin de la sección 11.2, en el que se encontró que la velocidad de los electrones difería relativamente de c en menos de 5×10^{-6}. En un experimento para pregraduados se verifica la relación [11.55] entre el ímpetu y la energía de rayos beta empleando un imán simple para la medida del ímpetu (con un radio de curvatura de aproximadamente 10 cm) y un cristal de INa para la medida de la energía ***.

---

* Algunos autores definen la masa una partícula como E/c^2, designándola con el símbolo m, o $m(u)$, y reservando el símbolo m_0 para la masa en reposo. Nosotros empleamos siempre la palabra masa para la magnitud invariante de Lorentz cuyo cuadrado aparece en [11.54].

** W. BERTOZZI, *Am. J. Phys.*, **32**, 551 (1964).

*** S. PARKER, *Am. J. Phys.*, **40**, 241 (1972).

Se pueden especificar las propiedades cinemáticas de una partícula (velocidad, ímpetu, energía) en cualquier sistema inercial dando su masa y, o bien su velocidad $\boldsymbol{u}$ o su ímpetu $\boldsymbol{p}$, en dicho sistema. Una transformación de Lorentz [11.22] de $(p_0, \boldsymbol{p})$ daría los resultados en cualquier otro sistema. En algunos casos resulta conveniente manejar las dos componentes de $\boldsymbol{p}$ perpendiculares al eje z y la rapidez ζ [11.20] como variables cinemáticas. Supóngase que una partícula tiene el ímpetu $\boldsymbol{p}$ en el sistema K con un ímpetu transversal $\boldsymbol{p}_\perp$ y una componente z de valor $p_\parallel$. Existe una transformación de Lorentz única en la dirección z a un sistema K' en el que la partícula no tenga componente z del ímpetu. En K' la partícula tiene ímpetu y energía

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}_\perp; \qquad \frac{E'}{c} = \Omega = \sqrt{p_\perp^2 + m^2c^2} \qquad [11.56]$$

Sea ζ el parámetro de rapidez asociado a la transformación de Lorentz desde K a K'. Entonces, según la inversa de la [11.21] las componentes del ímpetu y la energía de la partícula en el sistema original K pueden escribirse

$$\boldsymbol{p}_\perp; \qquad p_\parallel = \Omega \operatorname{senh} \zeta; \qquad \frac{E}{c} = \Omega \cosh \zeta \qquad [11.57]$$

siendo $\Omega = \sqrt{p_\perp^2 + m^2c^2}$. La magnitud Ω/c se denomina algunas veces masa transversal (debido a que depende de $\boldsymbol{p}_\perp$) o masa longitudinal (debido a que aparece en una aceleración longitudinal). Si la partícula está en reposo en K', esto es, si $\boldsymbol{p}_\perp = 0$, entonces las expresiones [11.57] se convierten en

$$p = mc \operatorname{senh} \zeta; \qquad E = mc^2 \cosh \zeta \qquad [11.58]$$

que son fórmulas alternativas de las [11.46] y [11.51].

Una de las ventajas de $\boldsymbol{p}_\perp^{(i)}$ y $\zeta^{(i)}$ como variables cinemáticas es que una transformación de Lorentz en la dirección z desplaza todos los parámetros de rapidez en una cantidad constante, $\zeta^{(i)} \to \zeta^{(i)} - Z$, siendo Z el parámetro de rapidez de la transformación. Con estas variables la configuración de las partículas en un proceso de colisión descrito en el sistema laboratorio difiere únicamente en un desplazamiento trivial del origen de rapideces del mismo proceso descrito en el sistema centro de masas.

11.6. PROPIEDADES MATEMATICAS DEL ESPACIO-TIEMPO DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

La cinemática de la relatividad especial presentada en las secciones anteriores puede discutirse de manera más profunda y elegante que al mismo tiempo aclara y simplifica la teoría. Las rotaciones tridimensionales en mecánica clásica y cuántica pueden tratarse en función del grupo de transformaciones de las coordenadas que dejan invariante la norma de un vector $\boldsymbol{x}$. En la teoría especial de la relatividad, las transformaciones de Lorentz de las coordenadas cuadridimensionales $(x_0, \boldsymbol{x})$ se deducen de la invariancia de

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \qquad [11.59]$$

Por consiguiente, podemos reformular la cinemática de la relatividad especial como la consideración del grupo de todas las transformaciones que dejan s^2 invariante. Técnicamente, este grupo se denomina el *grupo homogéneo de Lorentz*. Contiene tanto las rotaciones ordinarias como las transformaciones de Lorentz de la sección 11.3. El grupo de transformaciones que dejan invariante

$$s^2(x, y) = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2$$

se denomina *grupo inhomogéneo de Lorentz* o *grupo de Poincaré*. Contiene las traslaciones y reflexiones tanto en el espacio como en el tiempo, así como las transformaciones del grupo de Lorentz homogéneo. Restringiremos nuestra discusión a las transformaciones homogéneas y en lo que sigue omitiremos la palabra homogéneo al referirnos al grupo de Lorentz.

Del primer postulado se deduce que las ecuaciones matemáticas que expresan las leyes de la naturaleza deben ser *covariantes*, esto es, invariantes en su forma, bajo las transformaciones del grupo de Lorentz. Por tanto, deben ser relaciones entre escalares de Lorentz, entre 4-vectores, entre 4-tensores, etc., que se definen por sus propiedades de transformación bajo el grupo de Lorentz de un modo análogo a las especificaciones usuales para los tensores de un orden dado bajo las rotaciones tridimensionales. Así, pues, vamos a considerar brevemente la estructura matemática del espacio-tiempo cuya norma está definida por [11.59].

Empezaremos por resumir los elementos del análisis tensorial en un espacio vectorial no euclídeo. El continuo espacio-tiempo se define en función de un espacio cuadridimensional con coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3. Supondremos que existe una transformación bien definida que conduce a nuevas coordenadas x'^0, x'^1, x'^2, x'^3, de acuerdo con cierta regla

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3 \qquad [11.60]$$

Por el momento, la ley de transformación no está especificada.

Los tensores de orden k asociados con el punto x del espacio-tiempo se definen por sus propiedades de transformación bajo la transformación $x \to x'$. Un *escalar* (tensor de orden cero) es una sola cantidad cuyo valor no resulta modificado por la transformación. Obviamente, el intervalo s^2 [11.59] es un escalar de Lorentz. Entre los tensores de orden uno, llamados *vectores*, hay que distinguir dos clases. En primer lugar, se llama *vector contravariante* A^α a un vector cuyas cuatro componentes A^0, A^1, A^2, A^3 se transforman de acuerdo con la regla

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \qquad [11.61]$$

En esta igualdad la derivada se calcula mediante [11.60] y a la repetición del β indica una suma sobre $\beta = 0, 1, 2, 3$. Así, pues, explícitamente tendríamos:

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^0} A^0 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^3} A^3$$

En adelante emplearemos este *convenio de suma* sobre los índices repetidos. Un *vector covariante*, o tensor de orden uno, B_α se define por la regla

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta \qquad [11.62]$$

o bien, explícitamente

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^0}{\partial x'^\alpha} B_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^\alpha} B_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^\alpha} B_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^\alpha} B_3$$

La derivada parcial en [11.62] ha de ser calculada a partir de la inversa de [11.60], con x^β expresada como función de x'^0, x'^1, x'^2, x'^3.

Nótese que los vectores contravariante llevan superíndices y los vectores covariantes llevan subíndices, en correspondencia a la presencia de $\partial x'^\alpha/\partial x^\beta$, o de su inversa en la regla de transformación. Puede verificarse a partir de [11.61] que si la ley de transformación [11.60] es lineal las coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3 forman las componentes de un vector contravariante.

Un tensor contravariante de segundo orden $F^{\alpha\beta}$ consiste en 16 cantidades que se transforman según

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta} \qquad [11.63]$$

Un tensor covariante de segundo orden $G_{\alpha\beta}$ se transforma como

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} G_{\gamma\delta} \qquad [11.64]$$

y el tensor mixto de segundo orden $H^\alpha{}_\beta$ se transforma como

$$H'^\alpha{}_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} H^\gamma{}_\delta \qquad [11.65]$$

Con estos ejemplos, debe ser obvia la generalización a tensores contravariantes, covariantes o mixtos de cualquier orden.

El producto interno, o escalar, de dos vectores se define como el producto de las componentes de un vector covariante y de otro contravariante

$$B \cdot A \equiv B_\beta A^\alpha \qquad [11.66]$$

Con esta definición el producto escalar es un invariante, o escalar, bajo la transformación [11.60]. Esto puede comprobarse considerando el producto escalar $B' \cdot A'$ y sustituyendo [11.61] y [11.62]:

$$B' \cdot A' = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\gamma} B_\beta A^\gamma = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\gamma} B_\beta A^\gamma = \delta^\beta_\gamma B_\beta A^\gamma = B \cdot A$$

El producto interno, o contracción con respecto a cualquier par de índices, bien del mismo tensor, bien uno de un tensor y el otro del otro tensor, se define de modo análogo a [11.66]. Siempre uno de los índices es contravariante y el otro covariante.

Los resultados o definiciones anteriores son generales. La geometría específica del espacio-tiempo de la relatividad especial se define por medio del invariante intervalo s^2, [11.59]. En forma diferencial, el intervalo infinitesimal ds que define la norma de nuestro espacio es

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \qquad [11.67]$$

En esta fórmula hemos utilizado superíndices en las coordenadas de acuerdo con nuestros convenios actuales. Esta *norma,* o *métrica,* es un caso especial del elemento diferencial de longitud general

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad [11.68]$$

donde $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ se denomina *tensor métrico.* Para el espacio-tiempo plano de la relatividad especial el tensor métrico es diagonal (a diferencia de lo que ocurre en el espacio-tiempo curvo de la relatividad general). Sus elementos son

$$g_{00} = 1; \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \qquad [11.69]$$

El tensor métrico contravariante $g^{\alpha\beta}$ se define como el determinante menor normalizado de $g_{\alpha\beta}$. Para el espacio-tiempo plano es el mismo

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \qquad [11.70]$$

Nótese que la contracción de los tensores métricos contravariante y covariante da la delta de Kronecker en cuatro dimensiones

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha{}^\beta \qquad [11.71]$$

siendo $\delta_\alpha{}^\beta = 0$ para $\alpha \neq \beta$ y $\delta_\alpha{}^\alpha = 1$ para $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

La comparación de [11.68], el elemento de longitud invariante, con [11.66], producto escalar análogamente invariante, sugiere que el 4-vector de coordenadas covariante x_α puede obtenerse a partir del contravariante x^β por contracción con $g_{\alpha\beta}$, esto es

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \qquad [11.72]$$

y su inversa

$$x^\alpha = g^{\alpha\beta} x_\beta \qquad [11.73]$$

De hecho, la contracción con $g_{\alpha\beta}$ o $g^{\alpha\beta}$ es el procedimiento para, en cualquier tensor, cambiar un índice de contravariante a covariante, y viceversa. Así

$$F_{\cdot\cdot}{}^{\alpha\cdots} = g^{\alpha\beta} F^{\cdots}{}_{\cdot\beta\cdot\cdot}$$

y [11.74]

$$G^{\cdots}{}_{\cdots\alpha\cdot} = g_{\alpha\beta} G^{\cdots\beta}{}_{\cdots}$$

Con el tensor métrico [11.69] se deduce que si un 4-vector contravariante tiene las componentes A^0, A^1, A^2, A^3, su compañero covariante tiene las componentes $A_0 = A^0$, $A_1 = -A^1$, $A_2 = -A^2$, $A_3 = -A^3$. En forma abreviada esto se escribe

$$A^\alpha = (A^0, \boldsymbol{A}); \qquad A_\alpha = (A^0, -\boldsymbol{A}) \qquad [11.75]$$

en las que el 3-vector $\boldsymbol{A}$ tiene componentes A^1, A^2, A^3. El producto escalar de dos 4-vectores es

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \equiv B_\alpha A^\alpha = B^0 A^0 - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$$

de acuerdo con [11.24].

Considérense ahora los operadores de derivación parcial con respecto a x^α y a x_α. Las propiedades de transformación de estos operadores pueden establecerse directamente empleando las reglas de derivación implícita. Por ejemplo, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

Si se compara con [11.62] se advierte que *la derivación con respecto a una componente contravariante* del vector de coordenadas se transforma como la componente de un *operador vectorial covariante*. De [11.72] se deduce que la derivación con respecto a una componente covariante da un operador vectorial contravariante. Por consiguiente, empleamos la notación

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right); \qquad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right) \qquad [11.76]$$

La 4-divergencia de un 4-vector A es el invariante

$$\partial^\alpha A_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot A \qquad [11.77]$$

una ecuación cuya forma es familiar por la expresión de la continuidad de las densidades de carga y corriente, por la condición de Lorentz sobre los potenciales escalar y vector, etc. Estos ejemplos proporcionan un primer indicio de cómo surge la covariancia de una ley física si se atribuyen a las magnitudes que intervienen en la ecuación las propiedades adecuadas frente a la transformación de Lorentz.

El operador laplaciano cuadrimensional se define como el invariante por contracción

$$\Box \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \nabla^2 \qquad [11.78]$$

Naturalmente, éste es precisamente el operador de la ecuación de ondas en el vacío.

11.7. REPRESENTACION MATRICIAL DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ. GENERADORES INFINITESIMALES

A continuación vamos a volver a considerar el grupo de transformaciones de Lorentz. Para hacer explícitas y menos abstractas las manipulaciones, es conveniente emplear una representación matricial de modo que las componentes de un 4-vector contravariante formen los elementos de un vector columna. Así, las coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3 definen un vector cuya representación es

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad [11.79]$$

Los productos escalares matriciales de 4-vectores (a, b) se definen del modo habitual sumando los productos de los elementos de a y b, o de forma equivalente, por multiplicación matricial del traspuesto de a por b:

$$(a, b) \equiv \tilde{a}b \qquad [11.80]$$

El tensor métrico tiene como representante la matriz cuadrada 4×4

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [11.81]$$

siendo $g^2 = I$ la matriz unitaria 4×4. El vector de coordenadas covariante es

$$gx = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} \qquad [11.82]$$

y se obtiene por multiplicación matricial de g [11.81] por x [11.79]. *Nótese que en la notación presente el producto escalar* [11.66] *de dos 4-vectores se escribe*

$$a \cdot b = (a, gb) = (ga, b) = \tilde{a}gb \qquad [11.83]$$

Con los argumentos ya presentados en la sección 11.3 como base buscamos un grupo de transformaciones lineales de las coordenadas

$$x' = Ax \qquad [11.84]$$

siendo A una matriz cuadrada 4×4, tal que la norma (x, gx) permanezca invariante:

$$\tilde{x}'gx' = \tilde{x}gx \qquad [11.85]$$

Al sustituir [11.84] en el primer miembro se obtiene la igualdad

$$\tilde{x}\tilde{A}gAx = \tilde{x}gx$$

Como esta expresión debe ser válida para todos los vectores de coordenadas x, A debe satisfacer la ecuación matricial

$$\tilde{A}gA = g \qquad [11.86]$$

A partir de [11.86] pueden deducirse inmediatamente algunas propiedades de la matriz de transformación A. La primera se refiere al determinante de A. Tomando determinantes de ambos miembros de [11.86] nos resulta

$$\det(\tilde{A}gA) = \det g \, (\det A)^2 = \det g$$

puesto que el $\det g = -1 \neq 0$, obtenemos

$$\det A = \pm 1$$

Hay dos clases de transformaciones, *transformaciones de Lorentz propias,* que son continuas con la transformación identidad y, por tanto, tienen necesariamente $\det A = +1$, y *transformaciones de Lorentz impropias.* Para las transformaciones *impropias* es suficiente, pero no necesario, que tengan $\det A = -1$. El hecho de que el $\det A = \pm 1$ no separa de forma inambigua las dos clases es una consecuencia de que la métrica del espacio-tiempo es indefinida. Ilustran este punto dos ejemplos de transformaciones impropias, $A = g$ (inversión espacial) con $\det A = -1$ y $A = -I$ (inversión espacial y temporal) con $\det A = +1$.

La segunda propiedad de A es el número de parámetros que se necesitan para especificar completamente una transformación del grupo. Puesto que A y g son matrices 4×4, [11.86] representa 16 ecuaciones para los $4^2 = 16$ elementos de A. Pero no son todos independientes debido a la simetría por transposición. Hay, pues, $16 - (1 + 2 + 3) = 10$ ecuaciones linealmente independientes para los 16 elementos de A. Esto significa que hay *seis parámetros libres*; el grupo de Lorentz es un grupo de seis parámetros. Resulta conveniente considerar los seis parámetros como *a),* tres parámetros para especificar la orientación relativa de los ejes (por ejemplo, los ángulos de Euler), y *b),* tres parámetros para especificar la velocidad relativa de los dos sistemas inerciales (por ejemplo, las componentes de β). Señalaremos de paso que para cada A de seis parámetros que corresponde a una transformación de Lorentz propia, existe otra impropia representada por $-A$. De ahora en adelante consideraremos solamente transformaciones de Lorentz propias.

La construcción explícita de A puede desarrollarse como sigue. Hacemos el cambio:

$$A = e^L \qquad [11.87]$$

siendo L una matriz 4×4. El determinante de A es *

$$\det A = \det (e^L) = e^{\mathrm{Tr}\, L}$$

Si L es una matriz real, $\det A = -1$ queda excluida. Además, si L es de traza nula, debe ser entonces $\det A = +1$. Por consiguiente, L es, para las transformaciones de Lorentz propias, una matriz 4×4 real y de traza nula. La ecuación [11.86] puede escribirse

$$g\tilde{A}g = A^{-1} \qquad [11.88]$$

A partir de la definición [11.87] y del hecho de que $g^2 = I$ tenemos

$$\tilde{A} = e^{\tilde{L}}; \qquad g\tilde{A}a = e^{g\tilde{L}g}; \qquad A^{-1} = e^{-L}$$

Por consiguiente, [11.88] es equivalente a

$$g\tilde{L}g = -L$$

o bien

$$\widetilde{gL} = -gL \qquad [11.89]$$

---

* Para demostrar esto, nótese en primer lugar que el valor del determinante o la traza de una matriz permanecen inalterados por una transformación de semejanza. Por tanto, realícese tal transformación para poner L en forma diagonal. La matriz A será entonces diagonal y tendrá elementos que son las exponenciales de los elementos correspondientes de L. El resultado deseado se obtiene inmediatamente.

La matriz gL es, pues, antisimétrica. Resulta evidente de las propiedades de g [11.81] que la forma general de L es

$$L=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ \hline L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{array}\right) \qquad [11.90]$$

Se han introducido las líneas punteadas para separar la matriz espacial antisimétrica 3×3, correspondiente a las familiares *rotaciones* en un sistema inercial dado de la parte espacio-temporal simétrica de la matriz que corresponde a transformaciones de Lorentz puras desde un sistema inercial a otro.

La matriz [11.90], con sus seis parámetros, constituye una construcción explícita (mediante [11.87]) de la matriz de transformación A. Sin embargo, se acostumbra a sistematizar L y sus seis parámetros introduciendo un conjunto de seis matrices fundamentales definidas en la forma

$$S_1=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad S_2=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$S_3=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad [11.91]$$

$$K_1=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right), \quad K_2=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 1 & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right), \quad K_3=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 1 & & & \end{array}\right)$$

Las matrices S_i generan evidentemente rotaciones en tres dimensiones, en tanto que las matrices K_i producen transformaciones puras. Señalemos, a título de referencia, que los cuadrados de estas seis matrices son todos diagonales y de la forma

$$S_1^2=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad S_2^2=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3^2=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$K_1^2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2^2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad K_3^2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad [11.92]$$

Además, puede demostrarse que $(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S})^3=-\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S}$ y que $(\boldsymbol{\epsilon}'\cdot\boldsymbol{K})^3=\boldsymbol{\epsilon}'\cdot\boldsymbol{K}$ siendo $\boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\epsilon}'$ 3-vectores unitarios reales cualesquiera. De este modo cualquier potencia de una de las matrices puede expresarse como un múltiplo de la propia matriz o de su cuadrado.

El resultado general para L [11.90] puede escribirse ahora de forma alternativa como

$$\left.\begin{aligned} L&=-\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{K} \\ \text{y}\qquad A&=e^{-\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{K}} \end{aligned}\right\} \qquad [11.93]$$

en las que $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\zeta}$ son 3-vectores constantes. Cada una de las tres componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\zeta}$ corresponden a los seis parámetros de la transformación. Para conectar con resultados previos, como las ecuaciones [11.16] u [11.21], consideremos, en primer lugar, una situación sencilla en la que $\boldsymbol{\omega}=0$ y $\boldsymbol{\zeta}=\zeta\boldsymbol{\epsilon}_1$. En tal caso, $L=-\zeta K_1$ y con la ayuda de [11.92], sabiendo que $K_1^3=K_1$, hallamos:

$$A=e^L=(I-K_1^2)-K_1\operatorname{senh}\zeta+K_1^2\cosh\zeta \qquad [11.94]$$

En forma explícita:

$$A=\begin{pmatrix} \cosh\zeta & -\operatorname{senh}\zeta & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh}\zeta & \cosh\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [11.95]$$

Esta matriz corresponde exactamente a la transformación [11.21] *. Análogamente puede obtenerse, si $\boldsymbol{\zeta}=0$ y $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{\epsilon}_3$, que la transformación es

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \operatorname{sen}\omega & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [11.96]$$

que corresponde a una rotación de los ejes de coordenadas en el sentido de las agujas del reloj alrededor del eje 3.

Para una transformación sin rotación en dirección arbitraria

$$A=e^{-\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{K}}$$

El vector $\boldsymbol{\zeta}$ puede escribirse en función de la velocidad relativa $\boldsymbol{\beta}$ en la forma

$$\boldsymbol{\zeta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}\tanh^{-1}\beta$$

siendo $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ un vector unitario en la dirección de la velocidad relativa de los dos sistemas inerciales. La transformación pura es, pues,

$$A_p(\boldsymbol{\beta})=e^{-\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{K}\tanh^{-1}\beta} \qquad [11.97]$$

---

* Se recuerda al lector que en las secciones 11.3, 11.4 y 11.5 no se hacía distinción entre subíndices y superíndices. De acuerdo con [11.75], hay que interpretar todas las componentes de los vectores como componentes contravariantes.

Se deja como ejercicio verificar que esta transformación da la matriz explícita:

$$A_p(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad [11.98]$$

la ecuación $x' = A_p(\boldsymbol{\beta})x$ es una expresión matricial de las cuatro ecuaciones [11.19].

Las seis matrices [11.91] son una representación de los *generadores infinitesimales* del grupo de Lorentz. Cálculos sencillos demuestran que satisfacen las relaciones de conmutación siguientes:

$$\left.\begin{aligned} [S_i, S_j] &= \epsilon_{ijk} S_k \\ [S_i, K_j] &= \epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} S_k \end{aligned}\right\} \quad [11.99]$$

en las que la notación de conmutadores es $[A, B] \equiv AB - BA$. La primera relación corresponde a las relaciones de conmutación para el momento cinético (angular), la segunda relación muestra sencillamente que K se transforma como un vector en las rotaciones y la relación final indica que, en general, las transformaciones no conmutan. Las relaciones de conmutación [11.99], con el signo menos característico en el último conmutador, especifican la estructura algebraica del grupo de Lorentz, que es $SL(2, C)$, o bien $O(3, 1)$.

11.8. PRECESION DE THOMAS

La descripción de las transformaciones de Lorentz mediante matrices no conmutativas demuestra que, en general, el resultado de transformaciones de Lorentz sucesivas depende del orden en que éstas se realicen. Las relaciones de conmutación [11.99] implican que dos transformaciones de Lorentz sucesivas son equivalentes a una transformación de Lorentz única más una rotación tridimensional. El fenómeno de la precesión de Thomas * constituye un ejemplo de las consecuencias cinemáticas de la no conmutatividad de las transformaciones de Lorentz. Para motivar la discusión describiremos primero el contexto físico.

UHLENBECK y GOUDSMIT, en 1926, introdujeron la idea del spin del electrón y demostraron que podría explicarse el efecto Zeeman anómalo, así como la existencia de desdoblamientos multiplete, si el electrón tuviera un factor g de 2. No obstante, existía una dificultad, que los intervalos observados en la estructura fina eran sólo la mitad de los valores esperables teóricamente. Si

* L. T. THOMAS, *Phil. Mag.*, **3**, 1 (1927).

se escogía un factor g igual a la unidad los intervalos de estructura fina se explicaban correctamente, pero el efecto Zeeman era entonces el normal. La explicación completa del spin, incluyendo correctamente el factor g y la interacción apropiada de estructura fina, solamente se consiguieron con la teoría relativista del electrón de Dirac. THOMAS demostró, en 1927, dentro del marco de un momento cinético (angular) de spin empírico y con un factor g de 2, que el origen de la discrepancia era un efecto cinemático relativista que, si se tomaba en cuenta adecuadamente, conducía tanto al efecto Zeeman anómalo como a los desdoblamientos de la estructura fina correctos. La *precesión de Thomas,* como se denomina dicho efecto, también da una explicación cualitativa de la interacción spin-órbita en los núcleos atómicos y demuestra por qué los dobletes en los núcleos aparecen «invertidos».

La hipótesis de Uhlenbeck-Goudsmit consistía en lo siguiente. Un electrón posee un momento cinético $\boldsymbol{s}$ (que puede tomar valores cuantizados $\pm\hbar/2$ según cualquiera de los ejes y un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ relacionado con $\boldsymbol{s}$ por

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{ge}{2m}\boldsymbol{s} \qquad [11.100]$$

en la que el factor g tenía el valor $g=2$. Supóngase que el electrón se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ en campos externos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. La ecuación de movimiento para su momento cinético en el sistema de referencia en reposo será, pues,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\right)_{\text{sistema en reposo}}=\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}' \qquad [11.101]$$

siendo $\boldsymbol{B}'$ la inducción magnética en dicho sistema. Demostraremos en la sección 11.10 que en un sistema de coordenadas que se mueve con el electrón la inducción magnética es

$$\boldsymbol{B}'\simeq\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E} \qquad [11.102]$$

donde hemos despreciado términos del orden de (v^2/c^2). Por tanto, [11.101] se convierte en

$$\left(\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\right)_{\text{sistema en reposo}}=\boldsymbol{\mu}\times\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right) \qquad [11.103]$$

La ecuación [11.103] es equivalente a una energía de interacción del spin del electrón:

$$U'=-\boldsymbol{\mu}\cdot\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right) \qquad [11.104]$$

En los átomos puede aproximarse la fuerza eléctrica $e\boldsymbol{E}$ como el gradiente cambiado de signo de una energía potencial media $V(r)$ con simetría esférica. Naturalmente, para átomos con un solo electrón esto es exacto. Por tanto,

$$e\boldsymbol{E}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{dV}{dr} \qquad [11.105]$$

La energía de interacción del spin puede escribirse, pues,

$$U' = -\frac{ge}{2m}\, \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{B} + \frac{g}{2m^2c^2}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \qquad [11.106]$$

donde $\boldsymbol{L} = m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})$ es momento cinético orbital del electrón. Esta energía de interacción da el efecto Zeeman anómalo correctamente, pero presenta una interacción spin-órbita demasiado grande, el doble de la correcta.

El error en [11.106] tiene su origen en la falta de corrección de [11.101] como ecuación de movimiento del spin del electrón. El primer miembro de [11.101] da la velocidad de variación del spin en el sistema en reposo del electrón. Si este sistema de coordenadas gira, como hizo notar THOMAS por vez primera, la velocidad total de cambio del spin, o más generalmente de cualquier vector $\boldsymbol{G}$ viene dado por el conocido resultado *

$$\left(\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}\right)_{\text{no rot.}} = \left(\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}\right)_{\text{sistema en reposo}} + \boldsymbol{\omega}_T\times\boldsymbol{G} \qquad [11.107]$$

donde $\boldsymbol{\omega}_T$ es la velocidad angular de rotación encontrada por THOMAS. La ecuación [11.107], cuando se aplica al spin del electrón, da una ecuación de movimiento:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}\right)_{\text{no rot.}} = \boldsymbol{s}\times\left(\frac{ge\boldsymbol{B}'}{2m} - \boldsymbol{\omega}_T\right) \qquad [11.108]$$

La energía de interacción correspondiente es

$$U = U' + \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\omega}_T \qquad [11.109]$$

siendo U' la interacción electromagnética del spin [11.104] u [11.106].

El origen de la frecuencia de precesión de Thomas $\boldsymbol{\omega}_T$ es la aceleración que experimenta el electrón al moverse bajo la acción de las fuerzas externas. Considérese un electrón que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}(t)$ con respecto a un sistema inercial ligado al laboratorio. El sistema de coordenadas respecto al cual está en reposo el electrón se define como una serie de sistemas inerciales cuyos sucesivos orígenes se mueven en cada instante con la velocidad del electrón. Sea $\boldsymbol{v}(t) = c\boldsymbol{\beta}$ la velocidad del sistema en reposo con respecto al laboratorio en el tiempo t del laboratorio, y $\boldsymbol{v}(t+\delta t) = c(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta})$ la correspondiente en el tiempo $t+\delta t$ del laboratorio. La relación entre las coordenadas en el sistema laboratorio es

$$x' = A_p(\boldsymbol{\beta})x \qquad [11.110]$$

En el instante $t+\delta t$ la relación es

$$x'' = A_p(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta})x \qquad [11.111]$$

Es importante señalar que estas transformaciones de coordenadas desde el laboratorio al sistema en reposo se definan en función de transformaciones de Lorentz puras sin rotaciones. Estamos interesados en el comportamiento de los ejes de coordenadas del sistema en reposo del electrón como función del

* Véase, por ejemplo, GOLDSTEIN, pág. 133.

tiempo. Por tanto, deseamos la relación entre dos conjuntos de sistemas de coordenadas, x' en el instante t y x'' en el instante $t+\delta t$. Esta relación es

$$x''=A_T x'$$

donde

$$A_T=A_p(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta})A_p^{-1}(\boldsymbol{\beta})=A_p(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta})A_p(-\boldsymbol{\beta}) \qquad [11.112]$$

Con el fin de calcular A_T, se indica en la figura 11.7 una elección de ejes apropiada en el sistema laboratorio. El vector velocidad $\boldsymbol{\beta}$ en el instante t es paralelo al eje 1 y el incremento de velocidad $\delta\boldsymbol{\beta}$ yace en el plano 1-2. A partir de [11.98] se deduce que

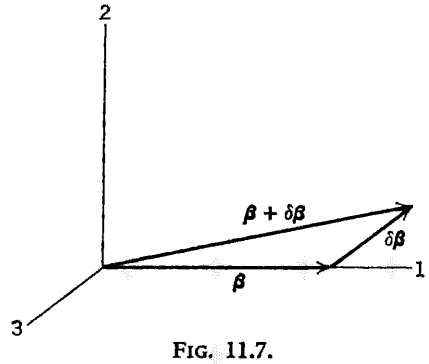


FIG. 11.7.

$$A_p(-\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad [11.113]$$

Análogamente, conservando sólo términos de primer orden en $\delta\boldsymbol{\beta}$, se obtiene de [11.98]

$$A_p(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}\gamma+\gamma^3\beta\,\delta\beta_1 & -(\gamma\beta+\gamma^3\,\delta\beta_1) & -\gamma\,\delta\beta_2 & 0\\ -(\gamma\beta+\gamma^3\,\delta\beta_1) & \gamma+\gamma^3\beta\,\delta\beta_1 & \left(\dfrac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 0\\ -\gamma\,\delta\beta_2 & \left(\dfrac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad [11.114]$$

Una multiplicación de matrices inmediata, de acuerdo con [11.112], conduce a

$$A_T=\begin{pmatrix}1 & -\gamma^2\,\delta\beta_1 & -\gamma\,\delta\beta_2 & 0\\ -\gamma^2\,\delta\beta_1 & 1 & \left(\dfrac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 0\\ -\gamma\,\delta\beta_2 & -\left(\dfrac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad [11.115]$$

Esto representa una transformación de Lorentz infinitesimal que puede escribirse en función de las matrices S y K en la forma

$$A_T = 1 - \left(\frac{\gamma - 1}{\beta^2}\right)(\boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{S} - (\gamma^2 \delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel} + \gamma\, \delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}) \cdot \boldsymbol{K} \qquad [11.116]$$

en la que $\delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel}$ y $\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}$ son, respectivamente, las componentes de $\delta\boldsymbol{\beta}$ paralela y perpendicular a $\boldsymbol{\beta}$. Hasta el primer orden en $\delta\boldsymbol{\beta}$, la [11.116] es equivalente a

$$A_T = A_p(\Delta\boldsymbol{\beta}) R(\Delta\boldsymbol{\Omega}) = R(\Delta\boldsymbol{\Omega}) A_p(\Delta\boldsymbol{\beta}) \qquad [11.117]$$

donde

$$A_p(\Delta\boldsymbol{\beta}) = 1 - \Delta\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{K}; \qquad R(\Delta\boldsymbol{\Omega}) = 1 - \Delta\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{S}$$

son transformaciones y rotaciones infinitesimales conmutativas, con velocidad:

$$\Delta\boldsymbol{\beta} = \gamma^2 \delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel} + \gamma\, \delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}$$

y ángulo de rotación:

$$\Delta\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\gamma - 1}{\beta^2}\right) \boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\, \boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta}$$

Así, pues, la transformación pura de Lorentz [11.111] al sistema con velocidad $c(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})$ es equivalente a una transformación [11.110] al sistema que se mueve con velocidad $c\boldsymbol{\beta}$, seguida por una transformación de Lorentz infinitesimal consistente en un paso con velocidad $c\Delta\boldsymbol{\beta}$ y una rotación $\Delta\boldsymbol{\Omega}$.

En términos de la interpretación de los sistemas en movimiento como sistemas en reposo sucesivos del electrón no queremos que aparezcan rotaciones adicionales. Las ecuaciones no relativistas de movimiento como [11.101] puede esperarse que se cumplan, supuesto que la evolución del sistema en reposo se describe mediante transformaciones infinitesimales *sin* rotaciones. De este modo nos vemos conducidos a considerar que las coordenadas en el sistema en reposo en el sistema $t + \delta t$ vienen dadas a partir de las correspondientes al instante t por el paso $A_p(\Delta\boldsymbol{\beta})$ en lugar de por el A_T. Designando estas coordenadas por x''', tenemos

$$x''' = A_p(\Delta\boldsymbol{\beta}) x'$$

Mediante [11.117], [11.112] y [11.110] podemos expresar x''' en función de las coordenadas del laboratorio en la forma

$$x''' = R(-\Delta\boldsymbol{\Omega}) A_p(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) x \qquad [11.118]$$

El sistema en reposo de coordenadas x''' está girado en $-\Delta\boldsymbol{\Omega}$ respecto a los ejes del laboratorio (x''). Si un cierto vector físico $\boldsymbol{G}$ tiene una velocidad de cambio (propia) en el sistema en reposo ($d\boldsymbol{G}/d\tau$), la precesión de los ejes del sistema en reposo con respecto al laboratorio hace que el vector tenga una velocidad total de cambio con respecto a los ejes del laboratorio de [11.107], siendo

$$\boldsymbol{\omega}_T = -\lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\Omega}}{\delta t} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}}{c^2} \qquad [11.119]$$

en la que $\boldsymbol{a}$ es la aceleración en el sistema laboratorio y, para ser exacto,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}\right)_{\text{sist. reposo}} = \gamma^{-1}\left(\frac{d\boldsymbol{G}}{d\tau}\right)_{\text{sist. reposo}}$$

La precesión de Thomas es de origen puramente cinemático. Si, por cualquier razón, existe una componente de la aceleración perpendicular a $\boldsymbol{v}$, entonces hay una precesión de Thomas independiente de otros efectos tales como la precesión del momento magnético en un campo magnético.

Para los electrones en los átomos la aceleración es debida al campo coulombiano apantallado [11.105]. Por consiguiente, la velocidad angular de Thomas es

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{-1}{2c^2}\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}}{m}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = \frac{1}{2m^2c^2}\boldsymbol{L}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \qquad [11.120]$$

Resulta evidente de [11.109] y [11.106] que la contribución adicional a la energía debida a la precesión de Thomas reduce el acoplamiento spin-órbita, dando

$$U = \frac{-ge}{2m}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{B} + \frac{g-1}{2m^2c^2}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \qquad [11.121]$$

Con $g=2$ la interacción spin-órbita de [11.106] se reduce en un factor 1/2 (llamado algunas veces *factor de Thomas*), como requiere la energía de interacción correcta spin-órbita de un electrón atómico.

En los núcleos atómicos, los nucleones experimentan fuertes aceleraciones debidas a las fuerzas nucleares presentes. En comparación, las fuerzas electromagnéticas son débiles. Por tanto, se pueden tratar los nucleones de un modo aproximado como si se movieran aisladamente en un pozo de potencial $V_N(r)$ atractivo, con simetría esférica y de corto alcance. En tal caso, cada nucleón experimentará una interacción spin-órbita adicional dada por [11.109], pero omitiendo la contribución U' electromagnética, que es despreciable:

$$U_N \simeq \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\omega}_T \qquad [11.122]$$

estando determinada la aceleración en $\boldsymbol{\omega}_T$ por $V_N(r)$. La forma de $\boldsymbol{\omega}_T$ es la misma que en [11.120] estando V reemplazada por V_N. Por tanto, la interacción spin-órbita nuclear es, aproximadamente,

$$U_N \simeq -\frac{1}{2M^2c^2}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L}\frac{1}{r}\frac{dV_N}{dr} \qquad [11.123]$$

Al comparar [11.123] con la fórmula atómica [11.121], notamos que tanto V como V_N son atractivos (aunque V_N es mucho mayor), de modo que los signos de las energías de interacción spin-órbita son opuestos. Esto significa que en los núcleos los niveles (en la aproximación de partícula única) dan lugar a dobletes «invertidos». La expresión [11.123], con una elección razonable para V_N, se halla en acuerdo cualitativo con los desdoblamientos spin-órbita observados en los núcleos *.

* Véase, por ejemplo, la sección 2.4c del A. BOHR y R. B. MOTTELSON, *Nuclear Structure*, vol. 1. W. A. Benjamin, Nueva York (1969).

En la sección 11.11 se presenta el fenómeno de la precesión de Thomas desde un punto de vista más sofisticado, discutiendo la ecuación BMT.

11.9. INVARIANCIA DE LA CARGA ELECTRICA. COVARIANCIA DE LA ELECTRODINAMICA

La invariancia de la forma de las ecuaciones de la electrodinámica ante las transformaciones de Lorentz fue demostrada por LORENTZ y POINCARÉ antes de la formulación de la teoría especial de la relatividad. Esta invariancia de forma o *covariancia* de las ecuaciones de Maxwell y de la fuerza de Lorentz implica que las diversas magnitudes ρ, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ que entran en estas ecuaciones se transforman de modo bien definido en las transformaciones de Lorentz. Por consiguiente, cada uno de los términos de las ecuaciones debe tener un comportamiento compatible en las transformaciones de Lorentz.

Considérese en primer lugar la ecuación de la fuerza de Lorentz para una partícula de carga q:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad [11.124]$$

Sabemos que $\boldsymbol{p}$ se transforma como la parte espacial del 4-vector energía-ímpetu:

$$p^{\alpha}=(p_0, \boldsymbol{p})=m(U_0, \boldsymbol{U})$$

siendo $p_0=E/c$ y U^{α} el 4-vector velocidad [11.36]. Si utilizamos el tiempo propio τ [11.26] en lugar de t para la derivación, la [11.124] puede escribirse

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}=q\left(\frac{U_0}{c}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}\right) \qquad [11.125]$$

El primer miembro es la parte espacial de un 4-vector. La ecuación correspondiente a la componente temporal es la velocidad de cambio de la energía de la partícula [6.110]:

$$\frac{dp_0}{d\tau}=\frac{q}{c}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{E} \qquad [11.126]$$

Si las ecuaciones de la fuerza y del cambio de energía han de ser covariantes, los segundos miembros deben formar las componentes de un 4-vector. En ellos aparecen productos de tres factores, la carga q, la 4-velocidad y los campos electromagnéticos. Si se conocen las propiedades de transformación de dos de los tres factores y se exige la covariancia en las transformaciones de Lorentz pueden establecerse las propiedades de transformación del tercer factor.

Hasta donde sabemos, la carga eléctrica se conserva de un modo absoluto. Además, los valores de las cargas de las partículas elementales (y como consecuencia, de cualquier sistema de cargas) son múltiplos enteros de la carga del

protón. En la blibliografía publicada * se ha establecido experimentalmente que la diferencia relativa entre la magnitud de la carga del electrón y la carga del protón es menor de 10^{-19}, y resultados no publicados de KING rebajan dicho límite casi dos órdenes de magnitud más **. Los resultados de estas experiencias apoyan *la invariancia de la carga eléctrica* en las transformaciones de Lorentz, o bien más concretamente, que la carga observada de una partícula es independiente de su velocidad. En los experimentos de KING se buscaba la posible carga residual en un recipiente del que se permitía escapar gas hidrógeno o helio. No se observó efecto alguno y se consiguió establecer un límite de menos de $10^{-19}e$ para la carga neta de la molécula, tanto para el H_2 como para el He. Como los electrones en el He se mueven a velocidad doble que en el H_2, la carga del electrón no puede depender de modo significativo de su velocidad, al menos para velocidades del orden de (0,01-0,02)c. En los experimentos de FRASER, CARLSON y HUGHES se empleó un dispositivo de haces atómicos para intentar observar una desviación electrostática de átomos «neutros» de cesio y potasio. Tampoco se observó ningún efecto, estableciéndose un límite menor de $3{,}5 \times 10^{-19}$ para la diferencia relativa entre las cargas del protón y el electrón. El cesio y el potasio tienen, respectivamente, $Z=55$ y $Z=19$. Por tanto, los electrones de la capa K en el cesio se mueven con velocidades de al menos 0,4c. La neutralidad observada de los átomos de cesio, a nivel de 10^{-18}-10^{-19}, constituye una fuerte evidencia de la invariancia de la carga eléctrica ***.

La invariancia *experimental* de la carga eléctrica, y el requisito de que la ecuación de la fuerza de Lorentz [11.125] y [11.126] sea covariante, determina las propiedades de transformación del campo electromagnético. Por ejemplo, el requisito de que $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{E}$, según [11.126], sea la componente temporal de un 4-vector establece que las componentes de $\boldsymbol{E}$ sean las componentes de un tensor de segundo orden $F^{\alpha\beta}$, de modo que $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{U}=F^{0\beta}U_\beta$. Aunque según esta línea de razonamiento podría hallarse la forma explícita del tensor intensidad de campo $F^{\alpha\beta}$, vamos a pasar a continuación a examinar las ecuaciones de Maxwell mismas.

Por sencillez, consideramos las ecuaciones microscópicas de Maxwell, sin $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$. Empezamos por la densidad de carga $\rho(x, t)$ y la densidad de corriente $\boldsymbol{J}(x, t)$, y la ecuación de continuidad que las relaciona:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \qquad [11.127]$$

Como consecuencia de lo dicho al final de la sección 11.6, y especialmente de [11.77], resulta natural postular que ρ y $\boldsymbol{J}$ juntas forman el 4-vector J^α

$$J^\alpha = (c\rho, \boldsymbol{J}) \qquad [11.128]$$

---

* J. G. KING, *Phys. Rev. Letters*, **5**, 562 (1960); L. J. FRASER, E. R. CARLSON y V. W. HUGHES, *Bull. Am. Phys. Soc.*, **13**, 636 (1968).

** Los actuales límites para la carga medida por molécula con la carga electrónica como unidad son para H_2, He y SF_6, $1{,}8 \pm 5{,}4$, $-0{,}7 \pm 4{,}7$ y $0 \pm 4{,}3$, respectivamente, todos con un factor de 10^{-21}. Comunicación privada de J. G. KING.

*** Mencionar únicamente a los electrones puede inducir a error. Dentro del núcleo los protones y neutrones se mueven con velocidades del orden de (0,2-0,3)c. Por tanto, los resultados de KING para el helio prueban ya la invariancia de la carga a velocidades apreciables. Naturalmente, si nos conformamos con establecer la invariancia a un nivel de 10^{-10}, con $v/c \sim 10^{-3}$, sería suficiente con la observación de que la materia es neutra al ser calentada o enfriada.

Por tanto, la ecuación de continuidad [11.127] toma la forma evidentemente covariante

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \qquad [11.129]$$

en la que el operador diferencial covariante ∂_α viene dado por [11.76]. Que J^α sea un legítimo 4-vector se deduce de la invariancia de la carga eléctrica. La carga en un pequeño elemento de volumen d^3x es $\rho\, d^3x$. Puesto que es un invariante experimental, se cumplirá que $\rho'\, d^3x' = \rho\, d^3x$. Pero el elemento de volumen *cuadri*-dimensional $d^4x = dx_0\, d^3x$, es un invariante de Lorentz:

$$d^4x' = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\, d^4x = \det A\; d^4x = d^4x$$

La igualdad $\rho'\, d^3x' = \rho\, d^3x$ implica, por tanto, que $c\rho$ se transforma como x^0, a saber, la componente temporal del 4-vector [11.128].

En la familia de potenciales que satisfacen el contraste de Lorentz las ecuaciones de onda para el potencial vector $\boldsymbol{A}$ y el potencial escalar Φ son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \boldsymbol{A} &= \mu_0 \boldsymbol{J} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi &= \rho/\epsilon_0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.130]$$

con la condición de Lorentz:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \qquad [11.131]$$

El operador diferencial que aparece en [11.130] es la laplaciana cuadri-dimensional invariante [11.78], mientras que los segundos miembros son las componentes de un 4-vector. Obviamente, la covariancia requiere que los potenciales Φ y $\boldsymbol{A}$ formen un potencial 4-vector.

$$A^\alpha = \left(\frac{\Phi}{c}, \boldsymbol{A}\right) \qquad [11.132]$$

Entonces, las ecuaciones de onda y la condición de Lorentz adoptan las formas, manifiestamente covariantes,

$$\left.\begin{aligned} \Box A^\alpha &= \mu_0 J^\alpha \\ \partial_\alpha A^\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [11.133]$$

Los campos se expresan en función de los potenciales en la forma:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \qquad [11.134]$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Las componentes según x de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son, explícitamente,

$$E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -c(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0)$$
$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \qquad [11.135]$$

en las que la segunda forma se deduce de [11.132] y $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_0, -\nabla)$. Estas ecuaciones implican que los campos eléctrico y magnético, seis componentes en total, son los elementos de un tensor de *segundo orden, el tensor antisimétrico intensidad de campo,*

$$F^{\alpha\beta} = (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \qquad [11.136]$$

En forma matricial explícita, el tensor de intensidad del campo es

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad [11.137]$$

A título de referencia, indicamos el tensor de intensidad del campo con sus dos índices covariantes:

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} F^{\gamma\delta} g_{\delta\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad [11.138]$$

Los elementos de $F_{\alpha\beta}$ se obtienen a partir de $F^{\alpha\beta}$ poniendo $\boldsymbol{E} \rightarrow -\boldsymbol{E}$. Otra magnitud útil es el *tensor dual intensidad del campo* $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$. En primer lugar, definiremos el tensor de cuarto orden completamente antisimétrico:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{para } \alpha=0,\ \beta=1,\ \gamma=2,\ \delta=3, \\ & \text{y cualquier permutación par} \\ -1 & \text{para cualquier permutación impar} \\ 0 & \text{si dos índices cualesquiera son iguales} \end{cases} \qquad [11.139]$$

Nótese que los elementos no nulos tienen todos un índice temporal y tres espaciales (diferentes) y que $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. El tensor $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es un *seudotensor* para las inversiones espaciales. Esto puede comprobarse contrayéndolo con 4-vectores diferentes y analizando las propiedades de inversión espacial de la magnitud rotacionalmente invariante que resulta. El tensor dual de intensidad del campo se define como

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_x/c & -E_y/c \\ B_y & -E_x/c & 0 & E_z/c \\ B_z & E_y/c & -E_z/c & 0 \end{pmatrix} \qquad [11.140]$$

Los elementos del tensor dual $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ se obtienen a partir de $F^{\alpha\beta}$ sustituyendo $\boldsymbol{E}/c \to \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{E}/c$ en [11.137]. Este es un caso especial de la transformación de dualidad [6.151].

Para completar la demostración de la covariancia de la electrodinámica debemos escribir las ecuaciones de Maxwell mismas en forma explícitamente covariante. Las ecuaciones no homogéneas son:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

Estas ecuaciones, en función de $F^{\alpha\beta}$ y la 4-corriente J^{α}, toman la forma covariante:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^{\beta} \qquad [11.141]$$

Análogamente, las ecuaciones de Maxwell homogéneas:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0; \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

pueden escribirse en función del tensor dual intensidad de campo en la forma

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \qquad [11.142]$$

Si en lugar de hacerlo en función de $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$, expresamos las ecuaciones homogéneas en función de $F^{\alpha\beta}$, son las cuatro ecuaciones

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \qquad [11.143]$$

en las que α, β y γ son tres cualesquiera de los enteros 0, 1, 2, 3.

Con las definiciones de J^{α} [11.128], A^{α} [11.132] y $F^{\alpha\beta}$ [11.136], junto con las ecuaciones de onda [11.133] o las ecuaciones de Maxwell [11.141], queda establecida la covariancia de las ecuaciones del electromagnetismo. Para completar la discusión pondremos las ecuaciones de la fuerza de Lorentz [11.125] y de la velocidad de cambio de la energía [11.126] en forma covariante:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m\frac{dU^\alpha}{d\tau} = qF^{\alpha\beta}U_\beta \qquad [11.144]$$

La descripción covariante de las leyes de conservación de un sistema combinado de campos electromagnéticos y partículas cargadas, así como la solución covariante para los campos de una carga en movimiento, se difieren hasta el capítulo 12, en el que se presenta una formulación lagrangiana.

Para las ecuaciones macroscópicas de Maxwell es necesario distinguir dos tensores campo $F^{\alpha\beta} = (\boldsymbol{E}/c, \boldsymbol{B})$ y $G^{\alpha\beta} = (c\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})$, estando dado $F^{\alpha\beta}$ por [11.137], $G^{\alpha\beta}$ se obtiene a partir de [11.137] sustituyendo $\boldsymbol{E}/c \to c\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{H}$. La forma covariante de las ecuaciones de Maxwell es, pues:

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = J^{\beta}; \qquad \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \qquad [11.145]$$

Queda claro que si los campos $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ y $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})$ se transforman como tensores antisimétricos de segundo orden, la polarización $c\boldsymbol{P}$ y la imanación cambiada de signo, $-\boldsymbol{M}$, forman un tensor de segundo orden análogo. Como estas magnitudes tienen sentido de medias macroscópicas de las propiedades atómicas en el *sistema en reposo* del medio, queda especificada la electrodinámica de la materia macroscópica en movimiento. Esta es la base de la electrodinámica de Minkowski y otros. Para información posterior sobre este tema importante y bastante extenso el lector puede consultar la bibliografía citada al final del capítulo.

11.10. TRANSFORMACION DE LOS CAMPOS ELECTROMAGNETICOS

Como los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son los elementos de un tensor de segundo orden $F^{\alpha\beta}$, sus valores en un sistema inercial K' pueden expresarse en función de los valores en otro sistema inercial K por medio de

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta} \qquad [11.146]$$

En la notación matricial de la sección 11.7 esto se escribe:

$$F' = AF\tilde{A} \qquad [11.147]$$

siendo F y F' matrices 4×4 [11.137], y A la matriz de transformación de Lorentz que aparece en [11.93]. Para la transformación de Lorentz específica [11.95] que corresponde a un paso a lo largo del eje x_1 con velocidad $c\beta$ desde sistema sin prima al sistema con ella, las ecuaciones explícitas de transformación son:

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 & B'_1 &= B_1 \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta c B_3) & B'_2 &= \gamma(B_2 + \beta E_3/c) \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta c B_2) & B'_3 &= \gamma(B_3 - \beta E_2/c) \end{aligned} \qquad [11.148]$$

Aquí, y en lo que sigue, los subíndices 1, 2, 3 indican componentes cartesianas espaciales ordinarias y no son índices covariantes. Como es usual, se obtiene la inversa de [11.148] intercambiando las magnitudes con y sin prima y sustituyendo $\beta \rightarrow -\beta$. Para una transformación de Lorentz general desde K a un sistema K', que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ relativa a K, la transformación de los campos puede escribirse

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \gamma(\boldsymbol{E} + c\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{E}) \\ \boldsymbol{B}' &= \gamma(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}/c) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B}) \end{aligned}\right\} \qquad [11.149]$$

Estas ecuaciones son las análogas para los campos de las [11.19] para las coordenadas. La transformación [11.149] demuestra que $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ no tienen existencia independiente. Un campo puramente eléctrico, o magnético, en un sis-

tema de coordenadas aparecerá como una mezcla de campos eléctrico y magnético en otro sistema de coordenadas. Naturalmente, hay que tener en cuenta ciertas restricciones (véase el problema 11.12), así, por ejemplo, un campo puramente electrostático en un sistema de coordenadas no puede transformarse en campo puramente magnetostático en otro sistema. Pero los campos están completamente relacionados entre sí y es más propio hablar de un campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$ en lugar de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ por separado.

Como ejemplo de transformación de campos electromagnéticos vamos a considerar los campos vistos por un observador en un sistema K cuando una carga puntual q se mueve en línea recta con velocidad $\boldsymbol{v}$. La carga está en reposo en el sistema K' y la transformación de los campos viene dada por la inversa de [11.148] u [11.149]. Suponemos que la carga se mueve en la dirección del eje x_1 (sentido positivo) y que la distancia más pequeña al observador es b. La figura 11.8 presenta un sistema de ejes adecuado. El observador está situado

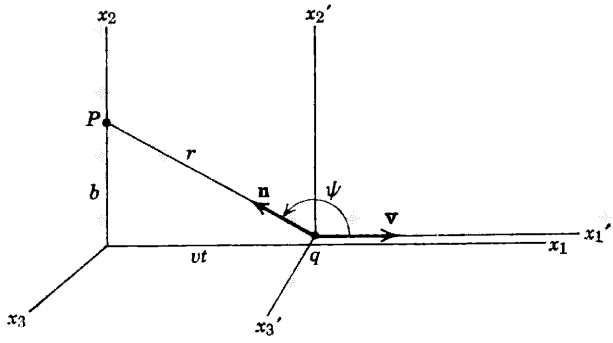


FIG. 11.8. La partícula de carga q moviéndose con velocidad constante v pasa cerca de un punto P; b es el parámetro de impacto.

en el punto P. Los orígenes de los dos sistemas de coordenadas coinciden en el instante $t=t'=0$, en el cual la carga q se encuentra a su distancia mínima del observador. En el sistema K', el punto P, que es donde se van a a observar los campos, tiene por coordenadas $x_1'=vt'$, $x_2'=b$, $x_3'=0$, y se encuentra a una distancia $r'=\sqrt{b^2+(vt')^2}$ de la carga q. Necesitamos expresar r' en función de las coordenadas de K. La única coordenada que hay que transformar es el tiempo $t'=\gamma[t-(v/c^2)x_1]=\gamma t$, ya que $x_1=0$ para el punto P en el sistema K. En el sistema K', en el que la carga está en reposo, los campos eléctrico y magnético en el punto de observación son:

$$\left.\begin{array}{lll} E_1'=-\dfrac{qvt'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; & E_2'=\dfrac{qb}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; & E_3'=0 \\ B_1'=0; & B_2'=0; & B_3'=0 \end{array}\right\} \qquad [11.150]$$

En función de las coordenadas de K las componentes no nulas de los campos son:

$$E_1'=-\frac{q\gamma vt}{4\pi\epsilon_0(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}}; \qquad E_2'=\frac{qb}{4\pi\epsilon_0(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} \qquad [11.151]$$

Utilizando ahora la inversa de [11.114] hallamos los campos transformados en el sistema K.

$$\left.\begin{aligned} E_1 = E_1' &= -\frac{\gamma q v t}{4\pi\epsilon_0 (b^2+\gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ E_2 = \gamma E_2' &= \frac{q\gamma b}{4\pi\epsilon_0 (b^2+\gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ B_3 = -\frac{\gamma\beta}{c} E_2' &= \frac{\beta}{c} E_2 \end{aligned}\right\} \qquad [11.152]$$

siendo nulas las demás componentes.

Los campos [11.152] se comportan de forma interesante cuando la velocidad de la carga se acerca a la de la luz. En primer lugar, se observa una inducción magnética en la dirección x_3. Cuando $\beta \to 1$, este campo magnético se hace casi igual al valor del campo eléctrico transversal E_2 dividido por c. Aun a velocidades no relativistas, cuando $\gamma \simeq 1$, esta inducción magnética resulta equivalente a:

$$\boldsymbol{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

que es precisamente la expresión de Ampère y Biot-Savart para el campo magnético de una carga en movimiento. Evidentemente, esto puede obtenerse directamente a partir de la inversa de las ecuaciones [11.149]. A velocidades grandes, cuando $\gamma \gg 1$, vemos que el valor máximo para $(t=0)$ del campo eléctrico transversal E_2 llega a ser γ veces su valor no relativista. Sin embargo, en esta misma situación límite, disminuye la duración del intervalo de tiempo en el que la intensidad de los campos resulta apreciable en el punto P. Evidentemente,

$$\Delta t \simeq \frac{b}{\gamma v} \qquad [11.153]$$

constituye una medida del intervalo de tiempo en que son apreciables los campos. Al aumentar γ, los campos máximos lo hacen en la misma proporción, pero su duración lo hace en proporción inversa. La integral temporal de los campos, multiplicada por v, resulta independiente de la velocidad. La figura 11.9*a* muestra este comportamiento de los campos eléctrico y magnético transversales, y del campo eléctrico longitudinal. Cuando $\beta \to 1$, el observador en P ve campos eléctrico y magnético transversales perpendiculares entre sí y en la relación $E = cB$. Estos campos no se distinguen de los de un impulso de radiación plana polarizada que se propaga en la dirección x_1. El campo eléctrico longitudinal adicional varía rápidamente entre valor positivo y negativo y su integral temporal es nula. Si el aparato de detección del observador tiene algo de inercia no habrá respuesta a este campo longitudinal y, por tanto, a efectos prácticos, solamente verá los campos transversales. En el capítulo 15 se aprovechará esta equivalencia de los campos de una partícula cargada relativista y de un impulso de radiación electromagnética.

Los campos [11.152] y las curvas de la figura 11.9, *a)*, resaltan la dependencia temporal de los campos en un punto de observación fijo. Puede darse una descripción alternativa en función de las variaciones espaciales de los campos respecto a la *posición actual instantánea* de la carga en el laboratorio.

Se deduce de [11.152] que $E_1/E_2 = -vt/b$. Se advierte en la figura 11.8 que entonces el campo eléctrico está dirigido según $\boldsymbol{n}$, un vector radial unitario dirigido desde la posición actual de la carga hacia el punto de observación, precisamente igual que ocurre con el campo coulombiano estático. Expresando

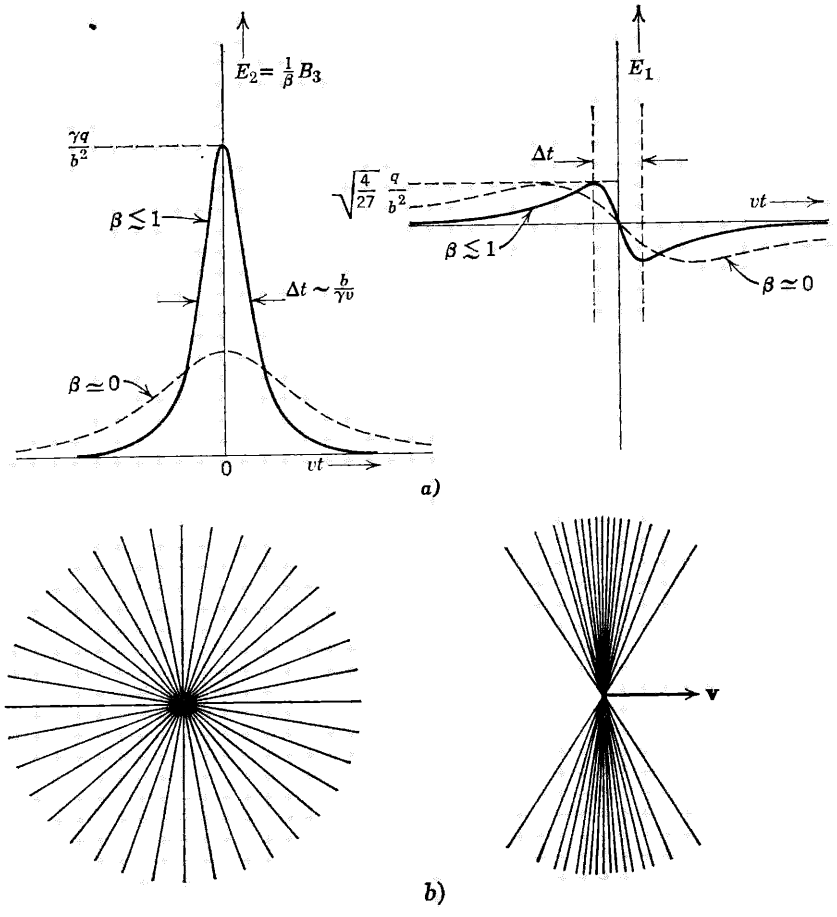


FIG. 11.9. Campos de una partícula cargada moviéndose uniformemente. *a)* Campos en el punto de observación de la figura 11.8 en función del tiempo. *b)* Líneas de fuerza eléctrica cuando la partícula está en reposo y en movimiento ($\gamma = 3$).

en función de r el denominador de [11.152], siendo r la distancia radial desde la posición actual al observador, y del ángulo $\psi = \cos^{-1}(\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})$ que se indica en la figura 11.8, obtenemos el campo eléctrico en función de la posición actual de la carga:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3 \gamma^2 (1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \psi)^{3/2}} \qquad [11.154]$$

El campo es radial, pero las líneas de fuerza sólo están distribuidas en forma isótropa para el caso $\beta = 0$. En la dirección de movimiento ($\psi = 0$, ó π), la intensidad del campo resulta reducida en un factor γ^{-2} respecto a la isotropía,

en tanto que en las direcciones transversales ($\psi=\pi/2$) resulta multiplicada por un factor γ. Este diagrama de líneas de fuerza en forma de haz, que se ha dibujado en la figura 11.9, *b)*, es el aspecto espacial instantáneo equivalente al comportamiento temporal esquematizado en la parte *a)* de la misma figura. La compresión de las líneas de fuerza hacia la posición transversal puede considerarse como una consecuencia de la contracción de FitzGerald y Lorentz.

11.11. ECUACION DE MOVIMIENTO RELATIVISTA PARA EL SPIN EN CAMPOS EXTERNOS UNIFORMES O VARIABLES EN FORMA SUAVE

Los efectos del movimiento de la partícula sobre la precesión de su spin ya se han discutido en la sección 11.8 a propósito de la precesión de Thomas. Aquí, vamos a explotar el concepto de la covariancia de Lorentz para dar un tratamiento alternativo y más elegante que conduce a lo que se conoce con el nombre de ecuación BMT de movimiento del spin *. Si el momento magnético viene dado por [11.100], la ecuación de movimiento para el spin en el sistema propio [11.101], es:

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt'}=\frac{ge}{2m}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}' \qquad [11.155]$$

donde las primas se refieren a magnitudes definidas en el sistema propio y $\boldsymbol{s}$ es el spin en dicho sistema. La ecuación es aplicable a una partícula de masa m, carga e, spin $\boldsymbol{s}$ y un momento magnético dipolar con un factor de Landé g. Es una ecuación clásica, pero resulta la misma que la ecuación de movimiento mecanocuántica de Heisenberg para el operador de spin, o, lo que es equivalente, a la ecuación de movimiento del vector polarización del sistema.

a) *Ecuación de movimiento covariante*

Para obtener la generalización relativista de [11.155] es necesario en primer lugar generalizar el spin $\boldsymbol{s}$ que es un 3-vector en el sistema propio de la partícula. Para ello, hay dos caminos. Uno es recordar que, como se dijo al final de la sección 11.9, $c\boldsymbol{P}$ y $-\boldsymbol{M}$ forman un tensor antisimétrico de segundo orden. Así, pues, $\boldsymbol{\mu}$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{s}$, pueden generalizarse a un tensor de segundo orden $S^{\alpha\beta}$. Una alternativa más sencilla es definir un *cuadrivector axial* S^α de forma tal que tenga sólo tres componentes independientes y se reduzca al spin $\boldsymbol{s}$ en el sistema propio de la partícula **. Si llamamos S^α a las componentes del 4-vector spin en el sistema inercial K, la componente temporal en el sistema propio K', según [11.22], será:

$$S'^0=\gamma(S^0-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{S})=\frac{1}{c}U_\alpha S^\alpha$$

* Así denominada según las iniciales de V. BARGMANN, L. MICHEL y V. L. TELEGDI, *Phys. Rev. Letters*, **2**, 435 (1959). En realidad, la ecuación tiene orígenes muy anteriores; THOMAS publicó una equivalente en 1927 (ob. cit.); FRENKEL trató sobre ecuaciones semejantes en la misma época; KRAMERS consideró la ecuación para $g=2$ en los años treinta.

** El 4-vector spin S^α es el dual del tensor $S^{\alpha\beta}$ en el sentido de que $S^\alpha=(1/2c)\cdot\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}U_\beta S_{\gamma\delta}$, siendo U^α la 4-velocidad de la partícula.

siendo U^α la 4-velocidad de la partícula. Vemos que la anulación de la componente temporal en el sistema propio resulta impuesta por la restricción covariante:

$$U_\alpha S^\alpha = 0 \qquad [11.156]$$

En un sistema inercial en el que la velocidad de la partícula sea $c\boldsymbol{\beta}$ resulta, por consiguiente, que la componente temporal del spin no es independiente, sino que vale:

$$S_0 = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{S} \qquad [11.157]$$

Resulta útil presentar explícitamente la relación entre S^α y el spin en el sistema propio $\boldsymbol{s}$. Utilizando [11.19] u [11.22], y la [11.157] resulta:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{S})\boldsymbol{\beta} \qquad [11.158]$$

y las expresiones inversas:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{s} + \frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{s})\boldsymbol{\beta} \\ S_0 &= \gamma \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{s} \end{aligned}\right\} \qquad [11.159]$$

Así, pues, dado el 3-vector spin $\boldsymbol{s}$ en el sistema propio quedan determinadas las componentes del 4-vector spin S^α en cualquier otro sistema inercial.

Resulta obvio que la generalización del primer miembro de [11.155] es $dS^\alpha/d\tau$, siendo τ el tiempo propio de la partícula. Por consiguiente, el segundo miembro debe ser expresable como un 4-vector. Suponemos que la ecuación es lineal respecto al spin S^α y respecto a los campos externos $F^{\alpha\beta}$. También puede aparecer U^α y $dU^\alpha/d\tau$, siendo esta última lineal en $F^{\alpha\beta}$. Se supone que no aparecen derivadas de orden superior. Además, naturalmente, la ecuación debe reducirse a [11.155] en el sistema propio. Con los elementos S^α, $F^{\alpha\beta}$, U^α, $dU^\alpha/d\tau$ y el requisito de linearidad en S^α y $F^{\alpha\beta}$ podemos construir los 4-vectores:

$$F^{\alpha\beta}S_\beta; \qquad (S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)U^\alpha; \qquad \left(S_\beta \frac{dU^\beta}{d\tau}\right)U^\alpha$$

Otras posibilidades, tales como $F^{\alpha\beta}U_\beta(S_\lambda U^\lambda)$, $(U_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)S^\alpha$, $(S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)dU^\alpha/d\tau$, etc., o bien se anulan o bien son de orden superior en $F^{\alpha\beta}$, o se reducen a múltiplos de las tres anteriores. Por consiguiente, la ecuación de movimiento debe ser de la forma:

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = A_1 F^{\alpha\beta}S_\beta + \frac{A_2}{c^2}(S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)U^\alpha + \frac{A_3}{c^2}\left(S_\beta \frac{dU^\beta}{d\tau}\right)U^\alpha \qquad [11.160]$$

siendo A_1, A_2 y A_3 constantes. La ecuación restrictiva [11.156] debe cumplirse en todo instante. Esto exige que:

$$\frac{d}{d\tau}(U_\alpha S^\alpha) = S^\alpha \frac{dU_\alpha}{d\tau} + U_\alpha \frac{dS^\alpha}{d\tau} = 0$$

y, por tanto,

$$(A_1 - A_2)U_\alpha F^{\alpha\beta}S_\beta + (1 + A_3)S_\beta \frac{dU^\beta}{d\tau} = 0 \qquad [11.161]$$

Si, al menos en principio, pueden existir fuerzas no electromagnéticas, o fuerzas asociadas al gradiente del campo, es necesario que $A_1 = A_2$ y que $A_3 = -1$. Al reducir esta expresión al sistema propio y comparar con [11.155] se obtiene que $A_1 = ge/2mc$. Así, pues, la [11.160] se convierte en:

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \frac{ge}{2m}\left[F^{\alpha\beta}S_\beta + \frac{1}{c^2}U^\alpha(S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)\right] - \frac{1}{c^2}U^\alpha\left(S_\lambda \frac{dU^\lambda}{d\tau}\right) \qquad [11.162]$$

Si los campos electromagnéticos son espacialmente uniformes, o si las fuerzas asociadas a gradientes del campo como $\nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B})$, [5.69], pueden despreciarse, y no hay otras fuerzas apreciables sobre la partícula, su movimiento de traslación está descrito por [11.144]

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{m}F^{\alpha\beta}U_\beta \qquad [11.163]$$

Entonces, la ecuación [11.162] se convierte en la *ecuación BMT*:

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{m}\left[\frac{g}{2}F^{\alpha\beta}S_\beta + \frac{1}{c^2}\left(\frac{g}{2}-1\right)U^\alpha(S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)\right] \qquad [11.164]$$

b) *Relación con la precesión de Thomas*

La ecuación covariante [11.162], o el caso particular [11.164], contiene la precesión de Thomas del spin. Se presenta en el término final de [11.162], término que está especificado por el requisito [11.156] de que el 4-vector spin sea ortogonal a la 4-velocidad. Para que aparezca explícitamente la precesión de Thomas, consideremos la ecuación de movimiento para el spin $\boldsymbol{s}$ en el sistema propio. Haciendo uso del resultado:

$$\dot{S}_\lambda \frac{dU^\lambda}{d\tau} = -\gamma \boldsymbol{S}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{d\tau} \qquad [11.165]$$

y de [11.158] para expresar $\boldsymbol{s}$ en función de $\boldsymbol{S}$, encontramos que las ecuaciones:

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{d\tau} = \boldsymbol{F} + \gamma^2\boldsymbol{\beta}\left(S\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}\right)$$

y

$$\frac{dS_0}{d\tau} = F_0 + \gamma^2\left(\boldsymbol{S}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}\right)$$

pueden combinarse para dar, tras ciertas simplificaciones,

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{d\tau} = \boldsymbol{F} - \frac{\gamma\boldsymbol{\beta}}{\gamma+1}F_0 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left[\boldsymbol{s}\times\left(\boldsymbol{\beta}\times\frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}\right)\right] \qquad [11.166]$$

En estas ecuaciones $(F_0, \boldsymbol{F})$ representa las partes temporal y espacial de los términos cuyo coeficiente es $(ge/2m)$ en [11.162]. Como $(F_0, \boldsymbol{F})$ forman un 4-vector, siendo $F_0 = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{F}$, los dos primeros términos de [11.166] pueden identificarse como el momento del par $\boldsymbol{F}'$ calculado en el sistema propio. Dividien-

do ambos miembros por γ y utilizando la definición [11.119] de la frecuencia de precesión de Thomas, encontramos que [11.166] se transforma en:

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}=\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{F}'+\boldsymbol{\omega}_T\times\boldsymbol{s} \qquad [11.167]$$

Como $\boldsymbol{F}'$ viene dado por el segundo miembro de [11.155], resulta precisamente la ecuación [11.107] de la sección 11.8.

Cuando el movimiento tiene lugar en campos electromagnéticos en los que se cumple [11.163],

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}=\frac{e}{\gamma mc}[\boldsymbol{E}+c\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})] \qquad [11.168]$$

Tenemos también, según las propiedades de transformación de $\boldsymbol{B}$, que:

$$\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{F}'=\frac{ge}{2m}\boldsymbol{s}\times\left[\boldsymbol{B}-\frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}/c\right] \qquad [11.169]$$

Cuando estas expresiones se sustituyen en [11.167], esta ecuación se convierte en:

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}=\frac{e}{m}\boldsymbol{s}\times\left[\left(\frac{g}{2}-1+\frac{1}{\gamma}\right)\boldsymbol{B}-\left(\frac{g}{2}-1\right)\frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{\beta}-\left(\frac{g}{2}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}/c\right] \qquad [11.170]$$

Esta forma de la ecuación de movimiento del vector spin es la ecuación de THOMAS [4.121] (ob. cit.).

c) *Velocidad de cambio de la polarización longitudinal*

Como ejemplo de empleo de [11.170] consideremos la velocidad de cambio de la componente del spin $\boldsymbol{s}$ pararela a la velocidad. Esta es la polarización longitudinal o helicoidalidad neta de la partícula. Si llamamos $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ al vector unitario en la dirección $\boldsymbol{\beta}$, la polarización longitudinal es $\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{s}$. Varía con el tiempo tanto porque cambia $\boldsymbol{s}$, como porque cambia $\boldsymbol{\beta}$. En forma explícita, tenemos:

$$\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{s})=\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}+\frac{1}{\beta}[\boldsymbol{s}-(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{s})\hat{\boldsymbol{\beta}}]\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}$$

Esta expresión puede escribirse haciendo uso de [11.168] y [11.170] y haciendo operaciones, en la forma:

$$\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{s})=-\frac{e}{m}\boldsymbol{s}_\perp\cdot\left[\left(\frac{g}{2}-1\right)\hat{\boldsymbol{\beta}}\times\boldsymbol{B}+\left(\frac{g\beta}{2}-\frac{1}{\beta}\right)\frac{\boldsymbol{E}}{c}\right] \qquad [11.171]$$

siendo $\boldsymbol{s}_\perp$ la componente de $\boldsymbol{s}$ perpendicular a la velocidad.

La ecuación [11.171] demuestra una propiedad notable de una partícula que tenga $g=2$. En un campo puramente magnético, el spin precesiona de tal manera que la polarización longitudinal permanece constante, cualquiera que

sea el movimiento de la partícula. Si la partícula es relativista ($\beta \to 1$), incluso la presencia de un campo eléctrico hace sólo que la polarización longitudinal cambie muy lentamente, a una velocidad proporcional a la componente del campo eléctrico perpendicular a v con el factor γ^{-2}.

El electrón y el muón tienen factores g que difieren del valor 2 de Dirac en correcciones radiativas del orden de $\alpha/\pi = 0{,}00232$. Como consecuencia de que $(g-2)$ sea tan pequeño, la polarización longitudinal del haz de electrones o muones que giran en un campo magnético cambia de forma relativamente lenta. Este fenómeno permite medidas muy exactas de la magnitud $a \equiv (g-2)/2$, denominada anomalía o momento magnético anómalo. Los valores de a constituyen pruebas de precisión de la validez de la electrodinámica cuántica. Para muones, con polarización longitudinal del 100 por 100 en su origen, se detecta el cambio de polarización mediante la distribución angular característicamente asimétrica del electrón, procedente de la desintegración del muón, respecto a la dirección de polarización del muón. Para electrones procedentes de la desintegración beta, la polarización longitudinal inicial es $\pm\beta$. Su cambio con el tiempo se detecta por los cambios en la asimetría de la dispersión de Mott (e^-), o por la distribución angular de los fotones producidos en la aniquilación del positronio formado en un campo magnético intenso (e^+). La precisión alcanzable mediante estas técnicas se pone de manifiesto en los datos más recientes *:

$$a(e^-) = (115\,965{,}77 \pm 0{,}35) \times 10^{-8}$$
$$a(e^+) = (116\,030 \pm 120) \times 10^{-8}$$
$$a(\mu^\pm) = (116\,616 \pm 31) \times 10^{-8}$$

Estos resultados se hallan en buen acuerdo con las predicciones de la electrodinámica cuántica, como se discute con detalle en la revisión realizada por BAILEY y PICASSO.

Se dejan para los problemas al final del capítulo 12 otros aspectos de la precesión del spin.

11.12. OBSERVACION SOBRE LA NOTACION Y UNIDADES EN CINEMATICA RELATIVISTA

Al tratar con las transformaciones de Lorentz y la cinemática relativista, resulta conveniente adoptar una notación simple y coherente. Hemos visto que en las fórmulas de la relatividad especial aparecen diferentes potencias de la velocidad de la luz c. Esto tiende a complicar las fórmulas, aunque su presencia facilita el paso al límite no relativista (haciendo $c \to \infty$). Al tratar la cinemática relativista se acostumbra a suprimir todos los factores de c mediante una elección de unidades apropiada. Nosotros adoptamos el convenio de que todas las energías, masas e ímpetus se miden en unidades de energía,

---

* e^-: J. C. WESLEY y A. RICH, *Phys. Rev.*, **A4**, 1341 (1971).
e^+: J. R. GILLELAND y A. RICH, *Phys. Rev.*, **A5**, 38 (1972).
μ^+: J. BAYLEY y otros, *Phys. Letters*, **28B**, 287 (1968).

Véase también la revisión de J. BAILEY y E. PICASSO, *Progress in Nuclear Physics*, vol. 12, parte 1, editores D. M. Brink y J. H. Mulvey, Pergamon, Oxford (1970), páginas 43-75.

mientras que las velocidades se miden con la velocidad de la luz. En cinemática relativista los símbolos:

$$\left.\begin{matrix} p \\ E \\ m \\ v \end{matrix}\right\} \quad \text{sustituyen a} \quad \left\{\begin{matrix} cp \\ E \\ mc^2 \\ v/c \end{matrix}\right.$$

Por consiguiente, la relación entre el ímpetu y la energía total se escribe en la forma $E^2=p^2+m^2$, la velocidad de una partícula es $v=p/E$, etc. Resulta conveniente utilizar como unidades de energía, el electrón-voltio (eV), el MeV (millón de electrón-voltios) y el GeV (10^9 eV). Un electrón-voltio es la energía adquirida por la carga del electrón cuando atraviesa la diferencia de potencial de un voltio (1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ joule = $1{,}602 \times 10^{-12}$ erg).

Además de eliminar las potencias de c, se acostumbra a representar los productos escalares entre 4-vectores, mediante un punto centrado entre los símbolos en cursiva, mientras que los productos escalares entre 3-vectores se representan mediante el punto entre los símbolos en negritas, como es habitual. Así, tenemos:

$$a \cdot b \equiv a_\alpha b^\alpha = a_0 b_0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

Los cuadrivectores pueden escribirse con o sin índice. Así, pues, la conservación de la energía y el ímpetu pueden aparecer como

$$P = p + q$$

o

$$P^\alpha = p^\alpha + q^\alpha$$

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

La teoría de la relatividad posee un extensa bibliografía propia. Quizás la presentación más clara, aunque concisa, de la relatividad especial y general es el famoso artículo de 1921 (puesto al día en 1956) por

PAULI.

Otro libro con autoridad es

MØLLER.

Entre los viejos textos sobre la relatividad especial a nivel de graduado se hallan

AHARONI,
BERGMANN, capítulos I-IX,

y, más recientemente,

ANDERSON, capítulos 6 y 7,
BARUT, capítulos 1 y 2,
SCHWARTZ,
TONNELAT, parte II.

La parte matemática del espacio-tiempo (teoría de grupos y análisis tensorial) aparecen cubiertas desde un punto de vista físico en

ANDERSON, capítulos 1-5,
BERGMANN, capítulo V,
SCHWARTZ, capítulo 5.

El aroma de los desarrollos teóricos originales pueden encontrarse en los artículos recopilados de:

EINSTEIN, LORENTZ, MINKOWSKY y WEYL

y en la colección de reimpresiones de

KILMISTER.

Un tratamiento muy individualista de la relatividad especial, con numerosas referencias y comentarios, puede hallarse en los dos libros de

ARZELIES.

Las experiencias principales se resumen en

MØLLER, capítulos 1 y 12,
CONDON y ODISHAW, parte 6, capítulo 8 de E. L. HILL.

El tópico de la electrodinámica de los medios en movimiento, apenas mencionado por nosotros, se trata en:

CULLWICK,
MØLLER, págs. 209 ss.
PAULI, págs. 99 ss.
PENFIELD y HAUS.

CULLWICK trata muchos casos prácticos. Sin embargo, esté prevenido sobre el capítulo 5 leyendo su prólogo a la segunda edición.

La cinemática relativista se ha relegado a los problemas. Referencias útiles en este área son

BALDIN, GOL'DANSKII y ROZENTHAL,
HAGEDORN,
SARD, capítulo 4.

Otro tema despreciado es el aspecto de los objetos que se mueven rápidamente. Este tema fascinante ilustra cuán cuidadoso se debe ser con conceptos como la contracción Lorentz-FitzGerald. Algunos artículos que resultan pertinentes son:

R. PENROSE, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **55**, 137 (1959),
J. TERRELL, *Phys. Rev.*, **116**, 1041 (1959),
V. F. WEISSKOPF, *Phys. Today*, **13**, núm. 9, 24 (1960),
M. L. BOAS, *Am. J. Phys.*, **29**, 283 (1961),
G. D. SCOTT y H. J. VAN DRIEL, *Am. J. Phys.*, **38**, 971 (1970).

Para el lector que desee una introducción más elemental o pausada a la relatividad especial, hay gran cantidad de textos para subgraduados, entre ellos

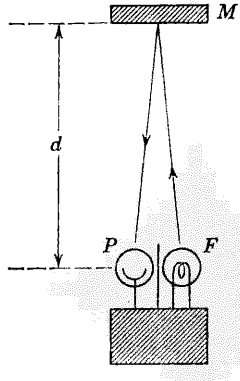
BOHM,
FEYMANN, vol. 1, capítulos 15, 16, 17,
FRENCH,
KACSER,
ROSSER,
SARD,
SMITH,
TAYLOR y WHEELER.

Se recomienda especialmente el libro de SARD. Es de nivel intermedio y tiene una amplia discusión de la precesión de Thomas y del movimiento del spin. HAGEDORN también discute con detalle la ecuación BMT.

Referencias adicionales sobre temas específicos pueden hallarse en la AAPT Resource Letter on Special Relativity SRT-1, *Am. J. Phys.*, **30**, 462 (1962).

PROBLEMAS

11.1. En la figura se ha dibujado un posible reloj. Consiste en un tubo de destellos (flash) *F* y una célula fotoeléctrica *P* apantallados de forma que solamente se ven a través del espejo *M*, situado a una distancia *d*, y montado rígidamente con el conjunto flash-célula fotoeléctrica. Los dispositivos electrónicos del interior de la caja son tales que cuando la célula fotoeléctrica responde a un destello procedente del espejo, se dispara el flash con un retraso despreciable y emite un corto destello hacia el espejo. De este modo, el reloj hace «tic» una vez cada $(2d/c)$ segundos cuando se encuentra en reposo.



Problema 11.1.

a) Supóngase que el reloj se mueve con una velocidad uniforme v, perpendicular a la línea que va de *PF* a *M*, respecto de un observador. Haciendo uso del segundo postulado de relatividad, demuéstrese por construcción geométrica o algebraica explícita que el observador ve la dilatación relativista del tiempo cuando el reloj se mueve.

b) Supóngase que el reloj se mueve con una velocidad v paralela a la línea de *PF* a *M*. Compruébese que también en este caso se observa que el reloj marcha más lentamente con el mismo factor de dilatación del tiempo.

11.2. Demuéstrese explícitamente que dos transformaciones de Lorentz sucesivas en la misma dirección son conmutables y equivalen a una transformación de Lorentz única con una velocidad

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+(v_1v_2/c^2)}$$

Esta es otra forma de obtener la ley de adición para velocidades paralelas.

11.3. Un sistema de coordenadas K' se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ respecto de otro sistema K. En K', una partícula tiene velocidad $\boldsymbol{u}'$ y aceleración $\boldsymbol{a}'$. Hállese la ley de transformación de Lorentz para las aceleraciones, y demuéstrese que en el sistema K las componentes de la aceleración paralela y perpendicular a $\boldsymbol{v}$ son

$$\boldsymbol{a}_{\parallel} = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}'}{c^2}\right)^3}\boldsymbol{a}_{\parallel}$$

$$\boldsymbol{a}_{\perp} = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}'}{c^2}\right)^3}\left(\boldsymbol{a}'_{\perp}+\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{u}')\right)$$

11.4. Supóngase que una nave espacial abandona la Tierra en el año 2000. De dos hermanos gemelos nacidos en 1980, uno permanece en la Tierra y el otro embarca en el cohete. La nave espacial está construida de forma que tiene una aceleración g respecto de su sistema propio (lo cual hace que los ocupantes se sientan como en casa). Acelera según una trayectoria rectilínea durante cinco años (medidos en los relojes propios), decelera al mismo ritmo durante cinco años más, da la vuelta, acelera durante cinco años, decelera otros cinco años y aterriza en la Tierra. El gemelo del cohete tiene cuarenta años de edad.

a) ¿Cuál es la edad del que quedó en tierra?
b) ¿Hasta qué distancia de la Tierra viajó la nave espacial?

11.5. En el sistema de referencia K, dos corredores muy igualados se encuentran alineados a una distancia d uno del otro sobre el eje y para efectuar una carrera paralelamente al eje x. Dos jueces de salida, uno al lado de cada corredor, disparan sus pistolas de salida en instantes ligeramente distintos, compensando así la ventaja del mejor corredor. La diferencia de tiempo en K es T.

a) ¿Para qué diferencias de tiempo habrá un sistema de referencia K' en el que no hay compensación, y para qué diferencias de tiempo hay un sistema K' en el que hay una verdadera compensación?

b) Determínese explícitamente la transformación de Lorentz que nos lleva al sistema K' adecuado para cada una de las posibilidades de *a)*, calculando la velocidad de K' respecto de K y las posiciones espacio-tiempo de cada corredor en el sistema K'.

11.6. *a)* Utilícese la ley de composición de velocidades relativistas y la invariancia de la fase para discutir el experimento de Fizeau sobre la velocidad de propagación de la luz en líquidos en movimiento. Demuéstrese que cuando el líquido fluye a una velocidad v paralela o antiparalela a la trayectoria de la luz, tal como se observa desde el laboratorio, la velocidad de la luz viene dada con la aproximación de primer orden en v por:

$$u = \frac{c}{n(\omega)} \pm v\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{\omega}{n}\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right)$$

siendo ω la frecuencia de la luz en el laboratorio (en el líquido y fuera de él), $n(\omega)$ es el índice de refracción del líquido. Debido al teorema de extinción se supone que la luz viaja con la velocidad $u'=c/n(\omega')$ respecto al líquido en movimiento.

b) Consúltese el trabajo de W. M. MACEK, J. R. SCHNEIDER y M. R. SALAMON, *J. Appl. Phys*, **35**, 2556 (1964) y discútase el estado de los experimentos de tipo **Fizeau.**

11.7. Una transformación infinitesimal de Lorentz y su inversa pueden escribirse en la forma:

$$x'^{\alpha}=(g^{\alpha\beta}+\epsilon^{\alpha\beta})x_{\beta}$$
$$x^{\alpha}=(g^{\alpha\beta}+\epsilon'^{\alpha\beta})x'_{\beta}$$

siendo infinitesimales $\epsilon^{\alpha\beta}$ y $\epsilon'^{\alpha\beta}$.

a) Demuéstrese, a partir de la definición de inversa, que $\epsilon'^{\alpha\beta}=-\epsilon^{\alpha\beta}$.
b) Demuéstrese, a partir de la conservación de la norma, que $\epsilon^{\alpha\beta}=-\epsilon^{\beta\alpha}$.
c) Escribiendo la transformación en función de componentes contravariantes en ambos miembros de la ecuación, demuéstrese que $\epsilon^{\alpha\beta}$ es equivalente a la matriz L [11.93].

11.8. *a)* Para las matrices de Lorentz pura y de rotación $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{S}$ demuéstrese que:

$$(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S})^3=-\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S}$$
$$(\boldsymbol{\epsilon}'\cdot\boldsymbol{K})^3=-\boldsymbol{\epsilon}'\cdot\boldsymbol{K}$$

siendo $\boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\epsilon}'$ tres vectores cualesquiera unitarios y reales.
b) Utilícense los resultados de la parte *a)* para demostrar que:

$$e^{-\zeta\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{K}}=1-\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{K}\,\operatorname{senh}\zeta+(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{K})^2\,[\cosh\zeta-1]$$

11.9. Dos transformaciones de Lorentz difieren en una magnitud infinitesimal. En la notación de la sección 11.7 están representadas por $A_1=e^{L}$ y $A_2=e^{L+\delta L}$. Sin utilizar explícitamente las representaciones matriciales, demuéstrese que en aproximación de primer orden en δL la transformación de Lorentz $A=A_2A_1^{-1}$, puede escribirse en la forma:

$$A=1+\delta L+\frac{1}{2!}[L,\delta L]+\frac{1}{3!}[L,[L,\delta L]]+\frac{1}{4!}[L,[L,[L,\delta L]]]+\ldots$$

Ayuda: Los primeros términos pueden obtenerse directamente, pero considérese como alternativa el desarrollo en serie de Taylor en λ del operador $A(\lambda)=e^{\lambda(L+\delta L)}e^{-\lambda L}$ y entonces hágase $\lambda=1$.

11.10. Aplíquese el resultado del problema anterior a una deducción puramente algebraica de [11.116] en la precesión de Thomas.

a) Con

$$L=\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{K}(\tanh^{-1}\beta)}{\beta}$$
$$L+\delta L=\frac{(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel}+\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp})\cdot\boldsymbol{K}(\tanh^{-1}\beta')}{\beta'}$$

siendo $\beta'=\sqrt{(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel})^2+(\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp})^2}$, demuéstrese que:

$$\delta L=-\gamma^2\,\delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{K}-\frac{\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}\cdot\boldsymbol{K}(\tanh^{-1}\beta)}{\beta}$$

b) Utilizando las relaciones de conmutación para $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{S}$, demuéstrese que:

$$C_1=[L,\delta L]=-\left(\frac{\tanh^{-1}\beta}{\beta}\right)^2(\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp})\cdot\boldsymbol{S}$$
$$C_2=[L,C_1]=(\tanh^{-1}\beta)^2\,\delta L_{\perp}$$
$$C_3=[L,C_2]=(\tanh^{-1}\beta)^2\,C_1$$
$$C_4=[L,C_3]=(\tanh^{-1}\beta)^4\,\delta L_{\perp}$$

siendo $\delta L_{\perp}$ el término de δL que contiene $\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}$.

c) Súmese la serie de términos para $A_T=A_2A_1^{-1}$ para obtener

$$A_T=1-(\gamma^2\,\delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel}+\gamma\,\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp})\cdot\boldsymbol{K}-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp})\cdot\boldsymbol{S}$$

que es correcta hasta el primer orden en $\delta\boldsymbol{\beta}$. (Véase D. SHELUPSKY, *Am J. Phys.*, **35**, 650 (1967).)

11.11. Un conductor rectilíneo infinitamente largo de sección transversal despreciable se encuentra en reposo y posee una densidad lineal de carga uniforme q_0 en el sistema inercial K' El sistema K' (y, por tanto, el hilo) se mueve con una velocidad $\boldsymbol{v}$ paralela a la dirección del hilo en el sistema laboratorio K.

a) Exprésense los campos eléctrico y magnético en coordenadas cilíndricas en el sistema propio del hilo. Utilizando las propiedades de transformación de los campos, hállense las componentes de los campos eléctrico y magnético en el laboratorio.

b) ¿Cuáles son las densidades de carga y corriente asociadas con el hilo en su sistema propio? ¿Y en el laboratorio?

c) A partir de las densidades de carga y corriente en el sistema laboratorio, calcúlense directamente los campos eléctrico y magnético en el laboratorio. Compárese con los resultados de *a)*.

11.12. *a)* Exprésense los escalares de Lorentz $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ en función de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. ¿Existen otros invariantes cuadráticos en las intensidades de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$?

b) ¿Es posible tener un campo electromagnético que aparezca como un campo puramente eléctrico en un sistema inercial y como un campo puramente magnético en algún otro sistema inercial? ¿Cuáles son las condiciones impuestas a $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ para que exista un sistema inercial en el cual no haya campo eléctrico?

c) Para los medios macroscópicos, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ forman el tensor campo $F^{\alpha\beta}$ y $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ el tensor $G^{\alpha\beta}$. ¿Qué invariantes adicionales pueden formarse? ¿Cuáles son sus expresiones concretas en función de los campos tridimensionales?

11.13. En un cierto sistema de referencia se tiene un campo eléctrico estático E_0 uniforme paralelo al eje x, y en el plano $x-y$ se tiene una inducción magnética uniforme y estática $cB_0=2E_0$, que forma un ángulo θ con el eje x. Determínese la velocidad relativa de un sistema de referencia en que los campos eléctrico y magnético sean paralelos. ¿Cuáles son los campos en este sistema cuando $\theta\ll 1$ y $\theta\to(\pi/2)$?

11.14. En el sistema propio de un medio conductor la densidad de corriente satisface la ley de Ohm, $\boldsymbol{J}'=\sigma\boldsymbol{E}'$, siendo σ la conductividad, e indicando mediante las primas que son las magnitudes en dicho sistema propio.

a) Tomando en consideración la posibilidad de que exista una corriente de convección además de la corriente de conducción, demuéstrese que la generalización covariante de la ley de Ohm es

$$J^{\alpha}-\frac{1}{c^2}(U_{\beta}J^{\beta})U^{\alpha}=\sigma F^{\alpha\beta}U_{\beta}$$

siendo U^{α} la 4-velocidad del medio.

b) Demuéstrese que si el medio tiene una velocidad $\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{\beta}$ con respecto a cierto sistema inercial, la corriente tridimensional en dicho sistema es:

$$\boldsymbol{J}=\gamma\sigma[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})]+\rho\boldsymbol{v}$$

siendo ρ la densidad de carga observada en este sistema.

c) Si el medio está descargado en el sistema propio ($\rho'=0$), ¿cuáles son la densidad de carga y la expresión de $\boldsymbol{J}$ en el sistema considerado en la parte *b)*? Esto es la generalización relativista de [10.8].

11.15. Los campos eléctrico y magnético [11.152] de una carga en movimiento uniforme pueden obtenerse de la ley de Coulomb en el sistema en que la carga está en reposo y del hecho de que la intensidad del campo $F^{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico de segundo orden sin considerar *en forma explícita* la transformación de Lorentz. La idea es la siguiente: Para una carga en movimiento uniforme las únicas variables relevantes son la 4-velocidad de la carga U^α y las coordenadas relativas $X^\alpha=x_p{}^\alpha-x_q{}^\alpha$, siendo $x_p{}^\alpha$ y $x_q{}^\alpha$ los 4-vectores posición del punto de observación y la carga, respectivamente. El único tensor antisimétrico que puede formarse es $(X^\alpha U^\beta-X^\beta U^\alpha)$. Así, pues, el campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$ debe ser este tensor multiplicado por cierta función escalar de los productos escalares posibles $X_\alpha X^\alpha$, $X_\alpha U^\alpha$ y $U_\alpha U^\alpha$.

a) Para la situación geométrica indicada en la figura 11.8 las coordenadas de P y q en un instante dado común en K pueden escribirse $x_p{}^\alpha=(ct, \boldsymbol{b})$, $x_q{}^\alpha=(ct, \boldsymbol{vt})$, con $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}=0$. Considerando la forma general de $F^{\alpha\beta}$ en el sistema propio de la carga, demuéstrese que:

$$F^{\alpha\beta}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{(X^\alpha U_\beta-X^\beta U_\alpha)}{\left[\frac{1}{c^2}(U_\alpha X^\alpha)^2-X_\alpha X^\alpha\right]^{3/2}}$$

Verifíquese que esto da las expresiones [11.152] en el sistema inercial K.

b) Repítanse los cálculos utilizando como punto de partida las coordenadas temporales comunes en el sistema propio, $x_p{}'^\alpha=(ct, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{vt}')$ y $x_q{}'^\alpha=(ct', 0)$. Demuéstrese que:

$$F^{\alpha\beta}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{(Y^\alpha U^\beta-Y^\beta U^\alpha)}{(-Y_\alpha Y^\alpha)^{3/2}}$$

siendo $Y'^\alpha=x_p{}'^\alpha-x_q{}'^\alpha$. Compruébese que los campos son los mismos que en la parte *a)*. Nótese que para obtener los resultados de [11.152] es necesario emplear el tiempo t del punto de observación P en K como parámetro temporal.

c) Finalmente, considérese la posición $x_p{}^\alpha=(ct, \boldsymbol{b})$ y la posición en el instante retardado $x_q{}^\alpha=[ct-R, \boldsymbol{\beta}(ct-R)]$, siendo R la distancia entre P y q en el instante retardado. Defínase la diferencia en la forma $Z^\alpha=[R, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{\beta}(ct-R)]$. Demuéstrese que, en función de Z^α y U^α, el campo es:

$$F^{\beta\alpha}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{(Z^\alpha U^\beta-Z^\beta U^\alpha)}{\left(\frac{1}{c}U_\alpha Z^\alpha\right)^3}$$

11.16. Una partícula de masa M y 4-vector ímpetu P se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2.

a) Utilícense los principios de conservación de la energía y el ímpetu en la forma $p_2=P-p_1$, y la invariancia del producto escalar de dos 4-vectores para demostrar que la energía total de la primera partícula en el sistema en el que la partícula que se desintegra está en reposo es:

$$E_1=\frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M}$$

y que E_2 se obtiene intercambiando m_1 y m_2.

b) Demuéstrese que la *energía cinética* T_i de la partícula i-ésima en el mismo sistema es:

$$T_i = \Delta M \left(1 - \frac{m_i}{M} - \frac{\Delta M}{2M}\right)$$

Siendo $\Delta M = M - m_1 - m_2$, el exceso de masa o valor Q del proceso.

c) El mesón pi cargado ($M = 139{,}6$ MeV) se desintegra en un mesón mu ($m_1 = 105{,}7$ MeV) y un neutrino ($m_2 = 0$). Calcúlense las energías cinéticas del mesón mu y del neutrino en el sistema propio del mesón pi. La energía cinética única del muón es la característica de una desintegración tipo dos cuerpos. Este hecho intervino de forma importante en el descubrimiento del mesón pi en las emulsiones fotográficas por POWELL y col., en 1947.

11.17. La partícula lambda (Λ) es un barión neutro de masa $M = 1115$ MeV que se desintegra con una vida media de $\tau = 2{,}9 \times 10^{-10}$ seg en un nucleón de masa $m_1 \simeq 939$ MeV y un mesón pi de masa $m_2 \simeq 140$ MeV. Fue observada en vuelo por primera vez en cámaras de niebla por su modo de desintegración con carga $\Lambda \to p + \pi^-$. Las trazas cargadas se originaban en un solo punto y tenían la apariencia de una v invertida o lambda. La identificación de las partículas y sus ímpetus pueden deducirse de su alcance y de su curvatura en el campo magnético de la cámara.

a) Utilizando la conservación del ímpetu y la energía y las invariancias del producto escalar de 4-vectores, demuéstrese que, si se mide el ángulo θ entre las dos trazas, puede hallarse la masa de la partícula que se desintegra mediante la fórmula:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2 \cos\theta$$

siendo aquí p_1 y p_2 los valores de los ímpetus tridimensionales.

b) Se crea una partícula lambda con una energía total de 10 GeV en un choque en la placa superior de una cámara de niebla. ¿Hasta qué distancia por término medio viajará en la cámara antes de desintegrarse? ¿Qué margen de valores del ángulo de separación entre trazas se presentarán para una lambda de 10 GeV si la desintegración tiene lugar en forma aproximadamente isótropa en el sistema propio de la partícula lambda?

11.18. Si un sistema de masa M se desintegra o transforma en reposo en un cierto número de partículas, la suma de cuyas masas es menor que M en una cantidad ΔM:

a) Demuéstrese que la energía cinética máxima de la partícula i-ésima (de masa m_i) es:

$$(T_i)_{\text{máx}} = \Delta M \left(1 - \frac{m_i}{M} - \frac{\Delta M}{2M}\right)$$

b) Determínense las energías máximas en MeV y también las relaciones con M para cada una de las partículas en las desintegraciones o transformaciones siguientes de partículas en reposo:

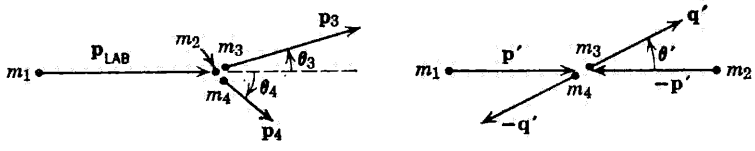
$$\mu \to e + \nu + \bar{\nu}$$
$$K^+ \to \pi^+ + \pi^- + \pi^+$$
$$K^\pm \to e^\pm + \pi^0 + \nu$$
$$K^\pm \to \mu^\pm + \pi + \nu$$
$$p + \bar{p} \to 2\pi^+ + 2\pi^- + \pi^0$$
$$p + \bar{p} \to K^+ + K^- + 3\pi^0$$

11.19. La presencia en el universo de un «mar» aparentemente uniforme de radiación del cuerpo negro a una temperatura de 3 °K proporciona un mecanismo para establecer una cota superior a la energía de los fotones que han viajado una distancia apreciable desde su creación. Los choques fotón-fotón pueden dar lugar a la creación de una partícula cargada y su antipartícula («creación de pares») si hay suficiente energía en el sistema centro de «masas» de los dos fotones. El umbral más bajo y también la sección eficaz mayor tienen lugar para un par negatón-positrón.

a) Tomando el valor $E=2{,}5\times10^{-4}$ eV para la energía de un fotón típico de 3 °K, calcúlese la energía de un fotón incidente tal que haya justamente la energía necesaria para producir un par negatón-positrón. Para fotones con energía superior a este valor umbral la sección eficaz aumenta hasta un valor máximo del orden de $(e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2)^2$ y después disminuye lentamente para energías mayores. Esta interacción es uno de los mecanismos para la desaparición de tales fotones a medida que viajan a lo largo de distancias cosmológicas.

b) Existe cierta evidencia de un fondo difuso de rayos X con fotones que poseen energías de varios centenares de eV o más. Más allá de 1 keV el espectro cae como E^{-n} con $n\simeq 1{,}5$. Repítase el cálculo de la energía umbral incidente, suponiendo que la energía del fotón en el «mar» sea de 500 eV.

11.20. En un proceso de colisión una partícula de masa m_2, en reposo en el sistema laboratorio, es golpeada por una partícula de masa m_1, ímpetu p_{LAB} y energía total E_{LAB}. En la colisión las dos partículas iniciales se transforman en otras dos de masas m_3 y m_4. Las configuraciones de los vectores impulso en el sistema centro de ímpetu (c.m., llamado tradicionalmente sistema centro de masas) y en el sistema laboratorio se indican en la figura.



Sistema laboratorio Sistema c.m.

Problema 11.20.

a) Utilícense productos escalares invariantes para demostrar que la energía total W en el sistema c.m. es tal que su cuadrado viene dado por:

$$W^2=m_1^2+m_2^2+2m_2E_{LAB}$$

y que el ímpetu tridimensional p' en el s.c.m. es:

$$p'=\frac{m_2p_{LAB}}{W}$$

b) Demuéstrese que los parámetros β_{cms} y γ_{cms} de la transformación de Lorentz que describe la velocidad del s.c.m. en el laboratorio son:

$$\beta_{cms}=\frac{p_{LAB}}{m_2+E_{LAB}};\qquad \gamma_{cms}=\frac{m_2+E_{LAB}}{W}$$

c) Demuéstrese que los resultados de *a)* y *b)* se reducen en el límite no relativista a las expresiones familiares:

$$W \simeq m_1+m_2+\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\frac{p_{\text{LAB}}^2}{2m_1}$$

$$p' \simeq \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)p_{\text{LAB}}; \qquad \beta_{\text{cms}} \simeq \frac{p_{LAB}}{m_1+m_2}$$

11.21. La energía cinética umbral T_{um} en el laboratorio para una cierta reacción es la energía cinética de la partícula incidente sobre un blanco estacionario que resulta justamente suficiente para hacer que la energía W en el sistema centro de masas sea igual a la suma de las energías en reposo de las partículas en el estado final. Calcúlense las energías cinéticas umbral para los processo siguientes. Exprésense los resultados en MeV o GeV y también como múltiplos de la energía en reposo de la partícula incidente (salvo si se trata de una partícula sin masa).

a) Fotoproducción de mesones pi, $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$

$$(m_p=938{,}5 \text{ MeV}, \qquad m_\pi=135{,}0 \text{ MeV})$$

b) Producción de pares nucleón-antinucleón en colisiones nucleón-nucleón, por ejemplo, $pp \rightarrow ppp\bar{p}$.

c) Producción de pares nucleón-antinucleón en colisiones electrón-electrón, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-p\bar{p}$ y $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ ($m_e=0{,}511$ MeV).

11.22. En las máquinas de colisión de haces, como el anillo de almacenamiento de intersección (ISR) del CERN, o los numerosos anillos de almacenamiento e^+e^-, se almacenan haces de partículas relativistas girando en sentidos opuestos y se las hace chocar en una o más zonas de interacción de modo aproximadamente frontal. Supóngase que las partículas de los dos haces tienen masas m_1 y m_2, ímpetus p_1 y p_2, respectivamente, y que se cortan formando un ángulo θ.

a) Demuéstrese que el cuadrado de la energía total en el centro de masas, hasta el orden de $(m/p)^2$ inclusive, es:

$$W^2=4p_1p_2\cos^2\frac{\theta}{2}+(p_1+p_2)\left(\frac{m_1^2}{p_1}+\frac{m_2^2}{p_2}\right)$$

b) Demuéstrese que el sistema inercial centro de masas posee una velocidad respecto al laboratorio dada por:

$$\beta_{\text{cms}}=\frac{(p_1+p_2)\operatorname{sen}\theta/2}{(E_1+E_2)\operatorname{sen}\alpha}$$

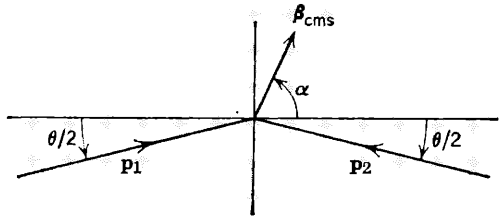
siendo

$$\tan\alpha=\left(\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right)\tan\theta/2$$

El ángulo α se ha definido en la figura siguiente.

c) Compruébese que los resultados de la parte *b)* están de acuerdo con la parte *b)* del problema 11.20.

d) Si el ángulo de cruce es $\theta=20°$ y $p_1=p_2=30$ GeV/c, ¿resulta el sistema laboratorio una buena aproximación del sistema centro de masas? Por ejemplo, considérese un choque inelástico protón-protón que implica producción de piones y examínese la colinearidad de los dos piones producidos con cantidades de movimiento iguales y opuestas de 1 GeV/c en el s.c.m.



Problema 11.22.

11.23. En un proceso de dispersión elástica la partícula incidente comunica energía al blanco estacionario. La energía perdida por la partícula incidente ΔE, aparece como energía cinética de retroceso del blanco. En la notación del problema 11.20 $m_3=m_1$, y $m_4=m_2$, en tanto que $\Delta E=T_4=E_4-m_4$.

a) Demuéstrese que ΔE puede expresarse en una de las distintas formas siguientes:

$$\Delta E=\frac{m_2}{W^2}p_{\mathrm{LAB}}^2(1-\cos\theta')$$

$$\Delta E=\frac{2m_2p_{\mathrm{LAB}}^2\cos^2\theta_4}{W^2+p_{\mathrm{LAB}}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_4}$$

$$\Delta E=\frac{Q^2}{2m_2}$$

siendo $Q^2=-(p_1-p_3)^2=(p_1-p_3)^2-(E_1-E_3)^2$ la cantidad de movimiento transferida (elevada al cuadrado) que es invariante de Lorentz.

b) Demuéstrese que para partículas cargadas que no sean electrones incidentes o electrones estacionarios ($m_1\gg m_2$) la pérdida máxima de energía es:

$$\Delta E_{\mathrm{máx}}\simeq 2\gamma^2\beta^2m_e$$

en la que γ y β son características de la partícula incidente, siendo $\gamma\ll(m_1/m_2)$. Dése a este resultado una interpretación sencilla considerando el choque significativo en el sistema propio de la partícula incidente y después transformando de nuevo al laboratorio.

c) Para colisiones electrón-electrón, demuéstrese que la máxima transferencia de energía es:

$$\Delta E_{\mathrm{máx}}^{(e)}=(\gamma-1)m_e$$

DINAMICA DE PARTICULAS RELATIVISTAS Y CAMPOS ELECTROMAGNETICOS

En el capítulo 11 se ha desarrollado la cinemática de la teoría especial de la relatividad. Ahora vamos a pasar a las cuestiones de dinámica. En la primera parte de este capítulo tratamos la dinámica del movimiento de partículas cargadas en campos electromagnéticos externos. Se presenta la formulación lagrangiana de las ecuaciones del movimiento principalmente para introducir el concepto de acción invariante de Lorentz, a partir del cual pueden deducirse las ecuaciones dinámicas covariantes. Después se discute la transición a un hamiltoniano, con la definición del momento canónico. Sigue una sección algo pedante, pero al menos pedagógica, sobre las propiedades de transformación de la fuerza y los peligros de remontarse apoyándose en Coulomb hasta las ecuaciones de Maxwell. A continuación se dedican varias secciones al movimiento de una partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos. El movimiento en un campo magnético estático uniforme se continúa considerando el movimiento en una combinación de campos eléctricos y magnéticos. Después se discuten los cambios seculares (deriva) de la órbita de una partícula en campos magnéticos no uniformes y la invariancia adiabática del flujo enlazado. Entonces nos dedicamos al problema del lagrangiano relativista para un sistema de partículas en interacción, se demuestra que en la aproximación del orden de v^2/c^2 es posible eliminar los efectos del retardo y escribir un lagrangiano (el lagrangiano de Darwin) en función de las posiciones y velocidades instantáneas de las partículas.

En las cuatro últimas secciones del capítulo se pone el énfasis en los campos. Primero se deducen las ecuaciones de Maxwell de un lagrangiano adecuado. Entonces se presenta un lagrangiano modificado que describe un «fotón» con masa y se analizan sus consecuencias en circuitos resonantes, líneas de transmisión y cavidades. A continuación se discute una generalización covariante del hamiltoniano para los campos, junto con las leyes de conservación de la energía, del ímpetu y del momento cinético para los campos, tanto en ausencia de fuentes como en interacción con partículas cargadas. El capítulo se termina con una deducción de las funciones de Green invariantes que constituyen la base de la solución de la ecuación de ondas con una densidad de corriente 4-vector dada como fuente.

12.1. LAGRANGIANO Y HAMILTONIANO PARA UNA PARTICULA CARGADA EN CAMPOS ELECTROMAGNETICOS EXTERNOS

Las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=e[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}]$$
$$\frac{dE}{dt}=e\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E} \qquad [12.1]$$

para una partícula de carga e en campos *externos* $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ pueden escribirse en la forma covariante [11.144]:

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau}=\frac{e}{m}F^{\alpha\beta}U_\beta \qquad [12.2]$$

siendo m la masa de la partícula, τ el tiempo propio y $U^\alpha=(\gamma c, \gamma\boldsymbol{u})=p^\alpha/m$ la 4-velocidad.

Aunque las ecuaciones de movimiento [12.1] son suficientes para describir el movimiento general de una partícula cargada en campos electromagnéticos externos (despreciando la emisión de radiación), resulta útil considerar la formulación de la dinámica desde el punto de vista de la mecánica lagrangiana y hamiltoniana. El tratamiento lagrangiano de la mecánica está basado en el principio de mínima acción, o principio de Hamilton. En la mecánica no relativista el sistema se describe por medio de coordenadas $q_i(t)$ y velocidades $\dot{q}_i(t)$ generalizadas. El lagrangiano L es una funcional de q_i y $\dot{q}_i$, y quizás explícitamente del tiempo, y se define la acción como la integral temporal de L a lo largo de una posible trayectoria del sistema. El *principio de mínima acción* establece que el movimiento de un sistema mecánico es tal que al ir desde una configuración a en el instante t_1 hasta otra configuración b en el instante t_2, la acción es una extremal:

$$A=\int L|q_i(t), \dot{q}_i(t), t|\, dt \qquad [12.3]$$

Cuando se consideran variaciones pequeñas de las coordenadas y velocidades respecto a las de la trayectoria real y se impone que $\delta A=0$, se obtienen las ecuaciones del movimiento de Euler-Lagrange (véase GOLDSTEIN, cap. 2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad [12.4]$$

Deseamos extender este formalismo al movimiento de partículas relativistas de forma compatible con la teoría de la relatividad especial y que, para partículas cargadas en campos externos, conduzca a las ecuaciones [12.1] o [12.2]. Es posible adoptar varios niveles de complicación. El tratamiento más familiar y menos complicado continúa utilizando las coordenadas, velocidades y tiempo ordinarios y generaliza desde el dominio no relativista de modo directo. Una discusión manifiestamente covariante resulta más complicada. Presentaremos en primer lugar el método elemental y después indicaremos el tratamiento manifiestamente covariante.

a) *Obtención elemental de un lagrangiano relativista*

Para obtener un lagrangiano relativista para una partícula en campos externos, consideraremos en primer lugar la cuestión de las propiedades de transformación del lagrangiano en una transformación de Lorentz. Según el primer postulado de la relatividad especial, la integral de acción debe ser un escalar de Lorentz debido a que las ecuaciones de movimiento están determinadas por la condición de extremo, $\delta A = 0$. Si introducimos el tiempo propio de la partícula τ en [12.3], mediante $dt = \gamma\, d\tau$, la integral de acción se convierte en:

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma L\, d\tau \qquad [12.5]$$

Como el tiempo propio es un invariante, la condición de que A sea invariante requiere que γL *sea invariante de Lorentz.*

El lagrangiano de una partícula libre puede ser función de su masa y su velocidad, pero no puede depender de la posición de la partícula. La única función de la velocidad que podemos formar de modo que sea invariante de Lorentz es $U_\alpha U^\alpha = c^2$. Por consiguiente, llegamos a la conclusión de que el lagrangiano para la partícula libre es proporcional a $\gamma^{-1} = \sqrt{1-\beta^2}$. Se ve fácilmente que:

$$L_{\text{libre}} = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \qquad [12.6]$$

es el factor de γ^{-1} apropiado para, mediante las [12.4], dé la ecuación de movimiento de la partícula libre:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\boldsymbol{u}) = 0$$

La acción [12.5] es proporcional a la integral del tiempo propio a lo largo de la trayectoria desde el tiempo propio inicial τ_1 hasta el tiempo propio final τ_2. Esta integral es invariante de Lorentz, pero depende del camino seguido. A efectos de cálculo, considérese un sistema de referencia en el que la partícula se encuentra inicialmente en reposo. Según la definición [11.26] del tiempo propio es claro que, si la partícula permanece en reposo en dicho sistema, la integral respecto del tiempo propio será mayor que si se mueve con velocidad no nula a lo largo de su trayectoria. Como consecuencia, vemos que una línea recta de universo que una los puntos inicial y final de la trayectoria da la integral máxima del tiempo propio, o bien, teniendo en cuenta el signo negativo de [12.6], da un mínimo para la integral de la acción. Naturalmente, este movimiento con velocidad constante es la solución de la ecuación de movimiento para la partícula libre.

La condición general de que γL sea un invariante de Lorentz, nos permite determinar el lagrangiano de una partícula relativista cargada en presencia de campos electromagnéticos externos, siempre que sepamos algo acerca del lagrangiano (o ecuaciones de movimiento) en el caso de movimiento no relativista en campos estáticos. Si una partícula cargada se mueve lentamente, resulta influida de modo predominante por el campo eléctrico que es deducible de un potencial escalar Φ. La energía potencial de interacción es $V = e\Phi$. Como

el lagrangiano relativista es $(T-V)$, la parte de interacción L_{int} del lagrangiano relativista debe reducirse en el límite no relativista a

$$L_{\text{int}} \rightarrow L_{\text{int}}^{NR} = -e\Phi \qquad [12.7]$$

Nuestro problema se convierte así en hallar una expresión para γL_{int} que sea un invariante de Lorentz y que se reduzca a la expresión [12.7] para velocidades no relativistas. Como Φ/c es la componente temporal del 4-vector potencial A^α, podemos anticipar que γL_{int} incluye el producto escalar de A^α con algún cuadrivector. Los únicos otros posibles cuadrivectores disponibles son los cuadrivectores ímpetu y posición de la partícula. Puesto que el producto γ por el lagrangiano debe ser invariante en las traslaciones además de invariante de Lorentz, no puede contener las coordenadas de forma explícita. Por tanto, el lagrangiano de interacción debe ser *:

$$\left.\begin{aligned} L_{\text{int}} &= -\frac{e}{\gamma} U_\alpha A^\alpha \\ \text{o} \qquad L_{\text{int}} &= -e\Phi + e\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A} \end{aligned}\right\} \qquad [12.8]$$

La combinación de [12.6] y [12.8] da el lagrangiano relativista completo de una partícula cargada:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + e\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A} - e\Phi \qquad [12.9]$$

La comprobación de que [12.9] conduce realmente a la ecuación de la fuerza de Lorentz se deja como ejercicio para el lector. Se debe utilizar la derivada convectiva $[d/dt = (\partial/\partial t) + \boldsymbol{u}\cdot\nabla]$ y las definiciones usuales de los campos en función de los potenciales.

El ímpetu $\boldsymbol{P}$ canónicamente conjugado a la coordenada de posición $\boldsymbol{x}$ se obtiene mediante la definición:

$$P_i \equiv \frac{\partial L}{\partial u_i} = \gamma m u_i + eA_i \qquad [12.10]$$

Así, pues, el ímpetu conjugado es:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A} \qquad [12.11]$$

en donde $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{u}$ es el ímpetu ordinario de tipo cinético. El hamiltoniano H es una función de la posición $\boldsymbol{x}$ y del ímpetu conjugado $\boldsymbol{P}$, y es una constante del movimiento si el lagrangiano no es una función explícita del tiempo. En función del lagrangiano se define el hamiltoniano mediante

$$H = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u} - L \qquad [12.12]$$

* Esta forma de L_{int} puede escribirse sin apelar al límite no relativista imponiendo que L_{int} sea un invariante de Lorentz que: 1), sea lineal respecto a la carga de la partícula; 2), sea lineal respecto a los potenciales electromagnéticos; 3), sea invariante frente a las traslaciones, y 4), sea una función que no contenga derivadas superiores a la primera de las coordenadas de la partícula. El lector puede considerar la posibilidad de un lagrangiano de interacción que satisfaga estas condiciones, pero que sea lineal respecto a la intensidad del campo $F^{\alpha\beta}$, en lugar de respecto a los potenciales A^α.

Debemos eliminar $\boldsymbol{v}$ de [12.12] y hacer que aparezcan solamente $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{x}$. De [12.10] o [12.11] tenemos:

$$\boldsymbol{u}=\frac{c(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})}{\sqrt{(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+m^2c^2}} \qquad [12.13]$$

Cuando se sustituye este valor en [12.12] y el langrangiano L [12.9], el hamiltoniano adquiere la forma

$$H=\sqrt{c^2(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+m^2c^4}+e\Phi \qquad [12.14]$$

De nuevo dejamos para el lector el ejercicio de comprobar que las ecuaciones de movimiento de Hamilton pueden combinarse de modo que se obtenga la ecuación de fuerza de Lorentz. La ecuación [12.14] constituye una expresión de la energía total W de la partícula. Difiere de la energía de una partícula libre en el término aditivo de energía potencial $e\Phi$ y en que $\boldsymbol{P}$ viene reemplazado por $[\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A}]$. Estas dos modificaciones son solamente un cambio de cuadrivector. Esto puede comprobarse si pasamos $e\Phi$ en [12.14] al primer miembro y elevamos al cuadrado. Entonces:

$$(W-e\Phi)^2-c^2(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2=(mc^2)^2 \qquad [12.15]$$

Esto es precisamente un producto escalar de cuadrivectores

$$p_\alpha p^\alpha=(mc)^2 \qquad [12.16]$$

en donde

$$p^\alpha \equiv \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right)=(W-e\Phi, \boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A}) \qquad [12.17]$$

Vemos que la energía total W/c actúa como la componente temporal de un cuadrivector ímpetu canónicamente conjugado P^α cuya parte espacial es el vector $\boldsymbol{P}$ dado por [12.11]. El tratamiento manifestamente covariante que se discute en los párrafos siguientes, así como en el problema 12.1, conduce de modo natural a este 4-ímpetu.

De paso recalcaremos la cuestión de las transformaciones de contraste. Evidentemente, las ecuaciones de movimiento [12.1] son invariantes en una transformación de contraste de los potenciales. Sin embargo, como el lagrangiano [12.8] contiene explícitamente los potenciales, no es invariante. A pesar de esta falta de invariancia de L en las transformaciones de contraste puede demostrarse (problema 12.2) que el cambio en el lagrangiano es de tal forma (una derivada total respecto al tiempo) que no altera la integral de acción ni las ecuaciones de movimiento.

b) *Tratamiento manifiestamente covariante del lagrangiano relativista*

Para hacer una descripción manifiestamente covariante las variables acostumbradas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{u}$ se reemplazan por los 4-vectores x^α y U^α. El lagrangiano de la partícula libre [12.6] puede escribirse en función de U^α en la forma:

$$L_{\text{libre}}=-\frac{mc}{\gamma}\sqrt{U_\alpha U^\alpha} \qquad [12.18]$$

Entonces la integral de la acción [12.5] sería:

$$A = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{U_\alpha U^\alpha}\, d\tau \qquad [12.19]$$

Esta forma manifiestamente invariante podría pensarse que proporciona el punto de partida para el cálculo variacional que conduzca a la ecuación de movimiento $dU^\alpha/d\tau = 0$. Sin embargo, existe la condición de ligadura:

$$U_\alpha U^\alpha = c^2 \qquad [12.20a]$$

o su equivalente:

$$U_\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} = 0 \qquad [12.20b]$$

sobre las ecuaciones de movimiento. Esta condición puede incorporarse mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange, pero preferimos un procedimiento distinto y equivalente. El integrando de [12.19] es:

$$\sqrt{U_\alpha U^\alpha}\, d\tau = \sqrt{\frac{dx_\alpha}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}}\, d\tau = \sqrt{g^{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta}$$

esto es, el elemento de longitud infinitesimal en el espacio cuadridimensional. Esto sugiere que la integral de la acción [12.19] puede sustituirse por:

$$A = -mc\int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}\, ds \qquad [12.21]$$

en la que $x^\alpha(s)$ es el 4-vector posición de la partícula y s un parámetro, que sea función monótonamente creciente de τ, pero arbitrario por lo demás. La integral de la acción es una integral a lo largo de la línea de universo de la partícula, y el principio de mínima acción consiste en el enunciado de que la trayectoria real es el camino más largo, a saber la geodésica *. Las variables del lagrangiano son ahora x^α y la «velocidad» dx^α/ds, pero s se considera como arbitraria. Sólo después de que se haya completado el cálculo de variaciones identificamos:

$$\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}\, ds = c\, d\tau \qquad [12.22]$$

y, así, imponer la restricción [12.21]. El cálculo de variaciones directo con [12.21] da las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$mc\frac{d}{ds}\left[\frac{dx^\alpha/ds}{\sqrt{\frac{dx_\beta}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}}}\right] = 0$$

* La geodésica es el camino más largo o el tiempo propio más largo para sucesos con separación tipo temporal. Véase ROHRLICH, págs. 277-278.

o

$$m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=0$$

como puede esperarse para el movimiento de la partícula libre.

Para una partícula cargada en un campo externo la forma del lagrangiano [12.8] sugiere que la forma manifiestamente covariante de la integral de acción es

$$A=-\int_{s_1}^{s_2}\left[mc\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}+e\frac{dx_\alpha}{ds}A^\alpha(x)\right]ds \qquad [12.23]$$

El principio de Hamilton da las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\left(\frac{dx_\alpha}{ds}\right)}\right]-\partial^\alpha\tilde{L}=0 \qquad [12.24]$$

siendo el lagrangiano:

$$\tilde{L}=-\left[mc\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}+e\frac{dx_\alpha}{ds}A^\alpha(x)\right] \qquad [12.25]$$

La ecuación [12.24], después de dividir por la raíz cuadrada y utilizar [12.22], se convierte explícitamente en:

$$m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+e\frac{dA^\alpha(x)}{d\tau}-e\frac{dx_\beta}{d\tau}\partial^\alpha A^\beta(x)=0$$

Como $dA^\alpha/d\tau=(dx_\beta/d\tau)\,\partial^\beta A^\alpha$, esta ecuación puede escribirse en la forma:

$$m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=e(\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta A^\alpha)\frac{dx_\beta}{d\tau} \qquad [12.26]$$

que es la ecuación covariante de movimiento [12.2] en notación diferente.

El paso a los ímpetus conjugados y el hamiltoniano es bastante simple, pero presenta problemas de interpretación. El 4-vector ímpetu conjugado se define mediante:

$$P^\alpha=-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)}=mU^\alpha+eA^\alpha \qquad [12.27]$$

El signo menos se introduce de modo que [12.27] esté conforme con [12.11]: su origen puede atribuirse a las propiedades del espacio tiempo de Lorentz. Puede definirse un hamiltoniano mediante:

$$\tilde{H}=\frac{1}{2}(P_\alpha U^\alpha+\tilde{L}) \qquad [12.28]$$

La eliminación de U^α por medio de [12.27] conduce a la expresión:

$$\tilde{H}=\frac{1}{2m}(P_\alpha-eA_\alpha)(P^\alpha-eA^\alpha)-\frac{1}{2}mc^2 \qquad [12.29]$$

Las ecuaciones de Hamilton son:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^\alpha}{d\tau}&=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial P_\alpha}=\frac{1}{m}(P^\alpha-eA^\alpha)\\ \text{y}\qquad\\ \frac{dP^\alpha}{d\tau}&=-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial x_\alpha}=\frac{e}{m}(P_\beta-eA_\beta)\partial^\alpha A^\beta\end{aligned}\right\} \qquad [12.30]$$

Puede demostrarse inmediatamente que esto es equivalente a la ecuación de Euler-Lagrange [12.26].

Aunque el hamiltoniano anterior es satisfactorio formalmente, presenta algunos problemas. El primero, que por definición es un escalar de Lorentz, no una magnitud tipo energía. El segundo, que utilizando [12.20, a] y [12.27] se demuestra que $\tilde{H}\equiv 0$. Claramente, tal formulación hamiltoniana difiere considerablemente de la familiar versión no relativista. El lector puede referirse a BARUT (págs. 68 ss.) para una discusión sobre éste y otros hamiltonianos alternativos.

12.2. SOBRE LA CUESTION DE OBTENER EL CAMPO MAGNETICO, LA FUERZA MAGNETICA Y LAS ECUACIONES DE MAXWELL A PARTIR DE LA LEY DE COULOMB Y LA RELATIVIDAD ESPECIAL

En el momento presente resulta popular en textos para pregraduados y en otros artículos * intentar deducir los campos magnéticos y aun las ecuaciones de Maxwell a partir de la ley de Coulomb de la electrostática y de la cinemática de la relatividad especial. Debería resultar evidente de modo inmediato que esto es imposible sin hipótesis adicionales. Un contraejemplo obvio es la gravitación. En el límite no relativista la ley de fuerza tiene las mismas propiedades espacio-temporales que la ley de Coulomb, y, en cambio, la teoría relativista de la gravitación implica *potenciales* que se transforman como tensores de segundo orden y no como 4-vectores.

La confusión surge principalmente debido a que las propiedades de transformación de la fuerza respecto a la transformación de Lorentz hacen que aparezca un *término de fuerza de tipo magnético* cuando se expresa la fuerza en un sistema inercial en función de la fuerza en otro sistema. Resulta tentador dar a esta fuerza adicional una existencia independiente y de este modo identificar el campo magnético como una entidad separada. Pero este paso resulta injustificado sin hipótesis adicionales. Considérese el movimiento de una partícula bajo

* Véase, por ejemplo, el capítulo 6 de P. LORRAIN y D. R. CORSON, *Campos y ondas electromagnéticos*, versión española, Selecciones Científicas, Madrid (1972), y A. BERGSTROM, *Nuovo Cimento*, **14B**, 235 (1973).

la acción de una fuerza externa cuya naturaleza no está especificada, salvo en que sea una fuerza propia en la relatividad especial. En el sistema inercial K' la ecuación de movimiento es:

$$\frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'}=\boldsymbol{F}' \qquad [12.31]$$

siendo $\boldsymbol{u}'=d\boldsymbol{x}'/dt'$ la velocidad de la partícula y $\boldsymbol{p}'=\gamma_{u'}m\boldsymbol{u}'$ su ímpetu. Si ahora consideramos la ecuación de movimiento de la partícula en el sistema inercial K, como se indica en la figura 12.1, utilizando las propiedades de trans-

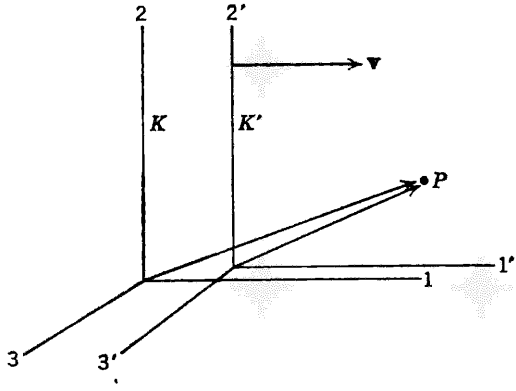


FIG. 12.1.

formación de Lorentz conocidas del ímpetu [bien sea a través de $dp^\alpha/d\tau$ o directamente a partir de p^α y la relación $t'=\gamma_v(t-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}/c^2)$], hallamos por cálculo directo que la velocidad de cambio del ímpetu con el tiempo en K puede expresarse en función de la fuerza en K' en la forma:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)_{\parallel}=\left(\frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'}\right)_{\parallel}+\frac{\gamma_v}{c^2}\left[\boldsymbol{u}\times\left(\boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'}\right)\right]_{\parallel}$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)_{\perp}=\gamma_v\left(\frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'}\right)_{\perp}+\frac{\gamma_v}{c^2}\left[\boldsymbol{u}\times\left(\boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'}\right)\right]_{\perp} \qquad [12.32]$$

Aquí, $\boldsymbol{u}$ es la velocidad de la partícula en K, mientras que $\boldsymbol{v}$ y γ_v están asociadas a la transformación de Lorentz desde K a K'. Las ecuaciones [12.32] se han escrito deliberadamente con $d\boldsymbol{p}'/dt'$ en el primer miembro en lugar de $\boldsymbol{F}'$ para resaltar la naturaleza cinemática de las ecuaciones y del segundo término, dependiente de la velocidad.

El camino habitual, y erróneo, es decir que en K' la partícula se mueve de forma no relativista y que, por tanto, experimenta una fuerza electrostática, $\boldsymbol{F}'=q\boldsymbol{E}'$, siendo q su carga y $\boldsymbol{E}'$ el campo eléctrico en dicho sistema. Entonces, dependiendo de si se están despreciando términos del orden de v^2/c^2 o no, se *define* el campo magnético en el sistema K en la forma:

$$\boldsymbol{B}=\frac{\gamma_v}{qc^2}\left(\boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'}\right)=\frac{\gamma_v}{c^2}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}' \qquad [12.33]$$

y aparentemente se llega a partir del segundo término de [12.32] al término magnético de la fuerza de Lorentz

$$q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$$

El lector puede pensar que esto parece bastante razonable, especialmente cuando nota, según [11.149], que [12.33] es la expresión correcta para el campo magnético en K si existe un campo puramente eléctrico $\boldsymbol{E}'$ en K'. ¿Pero qué sucedería si hubiera habido un campo magnético $\boldsymbol{B}'$ en K'? La fuerza $\boldsymbol{F}'$ aún sería $\boldsymbol{F}'=q\boldsymbol{E}'$ supuesto que $\boldsymbol{u}\simeq 0$, pero [12.33] ya no sería el campo magnético correcto en K *.

El hecho es que resulta imposible deducir de [12.32] sola la existencia del campo magnético $\boldsymbol{B}$ y de la fuerza magnética $q(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$. Son necesarias otras hipótesis. Un hecho experimental, o suposición clave, es que en un sistema K en el que todas las *cargas fuente,* que producen campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, *están en reposo,* la fuerza sobre una carga q viene dada por $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$, *independientemente de la velocidad* $\boldsymbol{u}$ de la carga en este sistema. Un tratamiento razonablemente bueno de la deducción de las ecuaciones de Maxwell utilizando la relatividad especial, con todas las hipótesis visibles, es el dado por FRISCH y WILETS **.

Un contraejemplo concreto que ilustra también las técnicas de la sección precedente es la interacción de una partícula con un *potencial* $\phi(x)$ *que sea escalar de Lorentz.* Los lagrangianos L o $\tilde{L}$ son:

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,e^{g\phi(x)/mc^2}$$

$$\tilde{L}=-mc\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}\,e^{g\phi(x)/mc^2} \qquad [12.34]$$

siendo g una constante de acoplamiento análoga a la carga eléctrica. Las ecuaciones covariantes de movimiento que se deducen de [12.24] con el lagrangiano [12.34] son

$$m\frac{dU^\alpha}{d\tau}=g\left(\partial^\alpha\phi-\frac{1}{c^2}U^\alpha U_\beta\partial^\beta\phi\right) \qquad [12.35]$$

mientras que las ecuaciones espacio-temporales explícitas son:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=-\frac{g}{\gamma_u}\nabla\phi-\frac{g\boldsymbol{p}}{mc^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi\right) \qquad [12.36]$$

y $dE/dt=\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{p}/dt$. Cuando el movimiento no sea relativista, [12.36] tiene la apariencia de la ley de fuerza de Coulomb o de la ley de Newton de la gravitación, con ϕ como potencial. Pero para el caso relativista, la fuerza no es la

---

* Esto significa que los segundos términos de [12.32] no dan la fuerza magnética completa en K. Parte de $q(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$ proviene de los primeros términos. Naturalmente, es cierto que la ley de fuerza de Lorentz es compatible con [12.32]. El lector puede verificar que $\boldsymbol{F}'=q(\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}')$ en K' conduce mediante [12.32] a $\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$ en K.

** D. H. FRISCH y L. WILETS, *Am. J. Phys.*, **24**, 574 (1956). Véase también J. R. TESSMAN, *Am. J. Phys.*, **34**, 1048 (1966). Una discusión no formal y heurística, pero con todos los hechos empíricos y las hipótesis claramente expresadas puede hallarse en el capítulo 3 de M. SCHWARTZ, *Principles of Electrodynamics,* McGraw-Hlil, Nueva York (1972).

ley de fuerza de Lorentz: contiene el 4-vector $\partial^\alpha\phi$, y no el tensor de segundo orden intensidad del campo $F^{\alpha\beta}$. Nótese también, que aun en el sistema en el que las fuentes están en reposo y, por tanto, ϕ es independiente del tiempo, la fuerza sobre la partícula depende de la velocidad, otra diferencia respecto a la fuerza de Lorentz.

A pesar de las diferencias respecto al electromagnetismo, este ejemplo de potencial escalar de Lorentz es conforme a los requisitos de [12.32]. En el sistema K hay una fuerza aparente de tipo magnético. Pero no existe una entidad $\boldsymbol{B}$ independiente. La fuerza en cualquier sistema está dada en función de las *cuatro* componentes de $\partial^\alpha\phi$, *no de las seis* componentes de $F^{\alpha\beta}$. Se deja para el problema 12.3 el hacer más consideraciones sobre este ejemplo.

12.3. MOVIMIENTO EN UN CAMPO MAGNETICO ESTATICO Y UNIFORME

Como primer ejemplo importante de la dinámica de partículas cargadas en campos electromagnéticos, vamos a considerar el movimiento en presencia de una inducción magnética $\boldsymbol{B}$ estática y uniforme. Las ecuaciones de movimiento [12.1] son en este caso

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}, \qquad \frac{dE}{dt}=0 \tag{12.37}$$

en la que ahora hemos llamado $\boldsymbol{v}$ a la velocidad de la partícula. Como la energía es constante en el transcurso del tiempo, el módulo de la velocidad es constante y también lo es γ. La primera ecuación puede expresarse así:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}_B \tag{12.38}$$

en donde

$$\boldsymbol{\omega}_B=\frac{e\boldsymbol{B}}{\gamma m}=\frac{ec^2\boldsymbol{B}}{E} \tag{12.39}$$

es la frecuencia de giro o de precesión. El movimiento descrito por [12.38] es un movimiento circular perpendicular a $\boldsymbol{B}$ junto con una traslación uniforme paralela a $\boldsymbol{B}$. Fácilmente se demuestra que la solución para la velocidad es

$$\boldsymbol{v}(t)=v_\parallel\boldsymbol{\epsilon}_3+\omega_B a(\boldsymbol{\epsilon}_1-i\boldsymbol{\epsilon}_2)e^{-i\omega_B t} \tag{12.40}$$

en donde $\boldsymbol{\epsilon}_3$ es el vector unitario paralelo al campo, y $\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$ son los otros dos vectores unitarios ortogonales; $v_\parallel$ es la componente de la velocidad paralela al campo y a es el radio de giro. Se conviene en tomar la parte real de la ecuación. Vemos así que [12.40] representa una rotación en *sentido contrario a las agujas del reloj* (cuando la carga e es positiva) al ser observada en el sentido de $\boldsymbol{B}$. Mediante una nueva integración obtenemos el desplazamiento de la partícula

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}_0+v_\parallel t\boldsymbol{\epsilon}_3+ia(\boldsymbol{\epsilon}_1-i\boldsymbol{\epsilon}_2)e^{-i\omega_B t} \tag{12.41}$$

La trayectoria es una hélice de radio a y ángulo de paso $\alpha=\mathrm{tg}^{-1}(v_\parallel/\omega_B a)$. El

radio de giro a depende de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ y del ímpetu transversal de la partícula $\boldsymbol{p}_\perp$. De [12.39] y [12.40] es evidente que:

$$p_\perp = eBa$$

Esta forma resulta adecuada para el cálculo del ímpetu de la partícula. El conocimiento del radio de curvatura de la trayectoria seguida por una partícula, en una inducción magnética conocida $\boldsymbol{B}$, nos permite determinar su ímpetu. Si se trata de partículas cuya carga es la del electrón, podemos expresar numéricamente el momento así:

$$p_\perp \text{ (Mev/}c\text{)} = 3{,}00 \times 10^{-2}\, Ba \text{ (gauss-m)} \qquad [12.42]$$

12.4. MOVIMIENTO EN EL SENO DE CAMPOS COMBINADOS ELECTRICO Y MAGNETICO, ESTATICOS Y UNIFORMES

Consideremos ahora una partícula cargada moviéndose en una combinación de campos eléctrico y magnético $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, ambos uniformes y estáticos, pero, en general, no paralelos. Como caso especial importante, trataremos en primer lugar *campos perpendiculares*. La ecuación de fuerza [12.1] nos pone de manifiesto que la energía de la partícula no es constante con el tiempo. Por tanto, no podemos obtener una ecuación sencilla para la velocidad, como se hizo con el campo magnético estático. Pero podemos simplificar las ecuaciones de movimiento mediante una transformación de Lorentz apropiada. Considérese una transformación de Lorentz a un sistema K' que se mueva con velocidad $\boldsymbol{u}$ respecto del sistema original. La ecuación de fuerza de Lorentz para la partícula en el sistema K' es:

$$\frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'} = e\,(\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}')$$

en donde las variables «prima» se refieren al sistema K'. Los campos $\boldsymbol{E}'$ y $\boldsymbol{B}'$ vienen dados por las relaciones [11.149] reemplazando $\boldsymbol{v}$ por $\boldsymbol{u}$. Supongamos primeramente que $|\boldsymbol{E}| < |\boldsymbol{B}|$. Si elegimos $\boldsymbol{u}$ perpendicular a los vectores ortogonales $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{u} = \frac{(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})}{B^2} \qquad [12.43]$$

encontramos que los campos en K' son:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}'_{\parallel} &= 0, \qquad \boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = 0 \\ \boldsymbol{B}'_{\parallel} &= 0, \qquad \boldsymbol{B}'_{\perp} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{B} = \left(\frac{B^2 - E^2/c^2}{B^2}\right)^{1/2} \boldsymbol{B} \end{aligned}\right\} \qquad [12.44]$$

donde $\parallel$ y $\perp$ se refieren a la dirección de $\boldsymbol{u}$. En el sistema K' solamente actúa un campo magnético estático $\boldsymbol{B}'$ dirigido en la misma dirección que $\boldsymbol{B}$, pero más débil que éste en un factor γ^{-1}. Así, pues, el movimiento en K' es el mismo que el que consideramos en la sección anterior, es decir, un movimiento helicoidal alrededor de las líneas de fuerza. Visto desde el sistema de coordenadas original,

este giro viene acompañado de un «arrastre» uniforme en la dirección $\boldsymbol{u}$ perpendicular a $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ dada por [12.43]. Este arrastre se conoce también con el nombre de *deriva* $E \times B$. Ya ha sido considerado para un fluido conductor en otro sentido en la sección 10.3. La deriva puede interpretarse cualitativamente al darse cuenta de que una partícula que empieza a girar alrededor de $\boldsymbol{B}$ es acelerada por el campo eléctrico, aumenta su energía y se mueve en una trayectoria de mayor radio de curvatura durante medio ciclo. En el otro medio ciclo, el campo eléctrico decelera la partícula con la consiguiente pérdida de energía y de este modo el arco es de mayor curvatura. La combinación de estos arcos da lugar a una traslación perpendicular a $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, como se indica en la figura 12.2. El sentido de deriva es independiente del signo de la carga de la partícula.

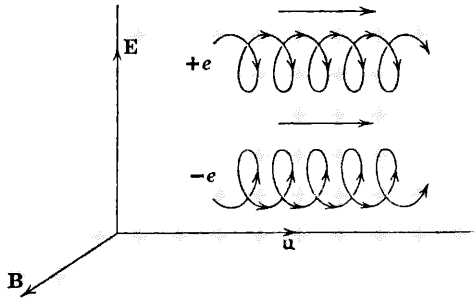


FIG. 12.2. Deriva $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ de partículas cargadas en campos cruzados.

La velocidad de deriva $\boldsymbol{u}$ [12.43] solamente tiene sentido si es menor que la velocidad de la luz, es decir, si $|\boldsymbol{E}| < c|\boldsymbol{B}|$. Si $|\boldsymbol{E}| > c|\boldsymbol{B}|$, el campo eléctrico es tan fuerte que la partícula es acelerada continuamente en la dirección de $\boldsymbol{E}$, y su energía media continúa aumentando con el tiempo. Consideremos una transformación de Lorentz del sistema original al sistema K'' que se mueve con velocidad

$$\boldsymbol{u}' = c^2 \frac{(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})}{E^2} \qquad [12.45]$$

respecto del primero. En este sistema, los campos eléctrico y magnético son:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}''_{\parallel} = 0, \quad \boldsymbol{E}''_{\perp} = \frac{1}{\gamma'} \boldsymbol{E} = \left(\frac{E^2 - c^2 B^2}{E^2} \right)^{1/2} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B}''_{\parallel} = 0, \quad \boldsymbol{B}''_{\perp} = \gamma' \left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{E}}{c^2} \right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [12.46]$$

Así, pues, en el sistema K'' la partícula sufre solamente la influencia de un campo puramente electrostático que da lugar a un movimiento hiperbólico con velocidad siempre creciente (véase problema 12.4).

El hecho de que una partícula pueda moverse en el seno de campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ cruzados con velocidad uniforme $u = E/B$ nos da la posibilidad de seleccionar partículas cargadas según su velocidad. Si sobre una región con campos magnético y eléctrico uniformes y perpendiculares incide normalmente un haz de partículas que presente una distribución de velocidades, solamente las partícu-

las dotadas de velocidad E/B continuarán su movimiento sin desviarse. Si disponemos de rendijas de entrada y salida adecuadas, solamente nos quedará un estrecho intervalo de velocidades alrededor de E/B; el poder de resolución depende de las dimensiones, de las velocidades deseadas y de las intensidades de los campos. Combinado con selectores de ímpetu, tales como un imán deflector, estos selectores de velocidad $E \times B$ pueden separar un haz muy puro y monoenergético de partículas de masa definida a partir de un haz mixto de partículas de distintas masas e ímpetus. Son muy corrientes dispositivos de esta clase a gran escala que suministran haces experimentales de partículas producidos en aceleradores de muy alta energía.

Si $\boldsymbol{E}$ presenta componente paralela a $\boldsymbol{B}$, no podemos explicar el comportamiento de la partícula de forma tan sencilla como la que antecede. El producto escalar $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ es un invariante de Lorentz (véase problema 11.12), así como $(cB^2 - E^2)$. Cuando los campos son perpendiculares ($\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$), es posible encontrar un sistema en donde $\boldsymbol{E} = 0$ si $c|\boldsymbol{B}| > |\boldsymbol{E}|$, o $\boldsymbol{B} = 0$ si $|\boldsymbol{E}| > c|\boldsymbol{B}|$. En dichos sistemas el estudio del movimiento resulta relativamente sencillo. Si $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} \neq 0$, los campos eléctrico y magnético existirán simultáneamente en todos los sistemas de Lorentz, siendo el ángulo entre los campos agudo u obtuso, según fuese en el sistema original. Por tanto, deberemos considerar el movimiento en campos combinados. Cuando se trata de campos estáticos y uniformes, resulta inmediata la obtención de una solución en coordenadas cartesianas. Dejaremos esto como problema 12.7.

12.5. DERIVA DE PARTICULAS EN CAMPOS MAGNETICOS ESTATICOS NO UNIFORMES

En aplicaciones astrofísicas y termonucleares es de gran interés conocer el comportamiento de las partículas en campos magnéticos que presentan variación espacial. Con frecuencia estas variaciones son suficientemente moderadas, de forma que la solución para el movimiento dada por Alfvén, mediante perturbaciones, constituye una aproximación aceptable. «Suficientemente moderada» significa que, en general, la distancia sobre la que varía $\boldsymbol{B}$ (en módulo o dirección) de forma apreciable es grande frente al radio de giro a de la partícula. Así, la aproximación de menor orden nos da un movimiento en tirabuzón alrededor de las líneas de fuerza, con una frecuencia dada por el valor local de la inducción magnética. En la siguiente aproximación se presentan ligeros cambios en la órbita que se pueden describir como un arrastre del eje de giro.

Vamos a considerar como primer tipo de variación espacial del campo el de un gradiente perpendicular a la dirección de $\boldsymbol{B}$. Sea la dirección del gradiente en el punto que nos interesa la del vector unitario $\boldsymbol{n}$, con $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B} = 0$. Así, pues, en un grado de aproximación hasta el primer orden, podemos expresar la frecuencia de giro

$$\omega_B(x) = \frac{e}{\gamma m} B(x) \simeq \omega_0 \left[1 + \frac{1}{B_0} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)_0 u \cdot x \right] \qquad [12.47]$$

En [12.47] ξ es la coordenada en la dirección de $\boldsymbol{n}$, y el desarrollo se efectúa alrededor del origen de coordenadas en donde $\omega_B = \omega_0$. Como la dirección de $\boldsymbol{B}$ no cambia, el movimiento paralelo a $\boldsymbol{B}$ se conserva como traslación uniforme.

Si hacemos $\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1$, en donde $\boldsymbol{v}_0$ es la velocidad transversal que corresponde al campo uniforme, y $\boldsymbol{v}_1$ una corrección pequeña, podemos sustituir [12.47] en la ecuación de fuerza,

$$\frac{d\boldsymbol{v}_\perp}{dt} = \boldsymbol{v}_\perp \times \boldsymbol{\omega}_B(\boldsymbol{x}) \qquad [12.48]$$

Y conservando solamente los términos de primer orden, obtenemos el resultado aproximado

$$\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} \simeq \left[\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_0)\frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)_0 \right] \times \boldsymbol{\omega}_0 \qquad [12.49]$$

De [12.40] y [12.41] vemos que, tratándose de un campo uniforme, la velocidad transversal $\boldsymbol{v}_0$ y la coordenada $\boldsymbol{x}_0$ vienen relacionadas por

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_0 &= -\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{X}) \\ (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{X}) &= \frac{1}{\omega_0^2}(\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{v}_0) \end{aligned}\right\} \qquad [12.50]$$

en donde $\boldsymbol{X}$ es el centro de giro del movimiento circular no perturbado (en nuestro caso, $\boldsymbol{X}=0$). Si eliminamos $(\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{v}_0)$ en [12.49] obtenemos

$$\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} \simeq \left[\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)_0 \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_0) \right] \times \boldsymbol{\omega}_0 \qquad [12.51]$$

Lo cual nos muestra que, prescindiendo de términos oscilantes, $\boldsymbol{v}_1$ tiene un valor medio que no es nulo

$$\boldsymbol{v}_G \equiv \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle = \frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)_0 \boldsymbol{\omega}_0 \times \langle (\boldsymbol{x}_0)_\perp (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_0) \rangle \qquad [12.52]$$

Para determinar el valor medio de $(\boldsymbol{x}_0)_\perp(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_0)$, sólo necesitamos observar que las componentes cartesianas de $(\boldsymbol{x}_0)_\perp$ oscilan de forma sinusoidal con una amplitud a y una diferencia de fase de 90°. Por tanto, la única componente de $(\boldsymbol{x}_0)_\perp$ que contribuye a la media es la paralela a $\boldsymbol{n}$; por tanto,

$$\langle (\boldsymbol{x}_0)_\perp (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_0) \rangle = \frac{a^2}{2}\boldsymbol{n} \qquad [12.53]$$

con lo que la velocidad de deriva debida al gradiente viene dada por

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{a^2}{2}\frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)_0 (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{n}) \qquad [12.54]$$

Otra forma distinta independiente de las coordenadas es

$$\frac{\boldsymbol{v}_G}{\omega_B a} = \frac{a}{2B^2}(\boldsymbol{B} \times \nabla_\perp B) \qquad [12.55]$$

Según [12.55] resulta evidente que, si el gradiente del campo es tal que

$|\nabla B/B| \ll 1$, la velocidad de arrastre es pequeña en comparación con la velocidad orbital. La partícula gira con rapidez mientras su centro de rotación se mueve lentamente en dirección perpendicular a $\boldsymbol{B}$ y ∇B. La fórmula [12.55] nos da el sentido de deriva para partículas positivas. Si se trata de partículas negativas, dicha deriva tiene lugar en sentido contrario; este cambio de signo proviene de la definición de ω_B. Este arrastre debido al gradiente se puede interpretar de forma cualitativa considerando las variaciones del radio de giro cuando la partícula se mueve en regiones de intensidad de campo mayor y menor que el valor medio. En la figura 12.3 se representa este comportamiento para ambos signos de la carga.

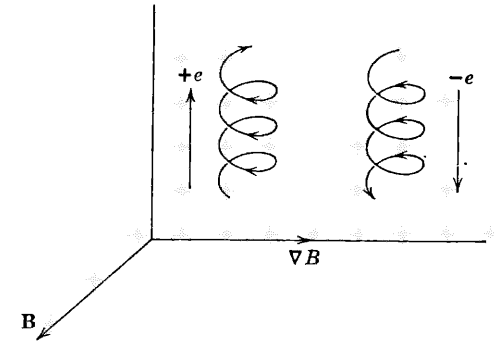


FIG. 12.3. Deriva de partículas cargadas debida al gradiente transversal del campo magnético.

Otro tipo de variación del campo que da lugar a una deriva del centro de giro de las partículas es la curvatura de las líneas de fuerza. Considérese el campo bidimensional indicado en la figura 12.4. Localmente es independiente de z. En la parte izquierda de la figura se representa una inducción magnética constante $\boldsymbol{B}_0$, paralela al eje x. Una partícula gira alrededor de las líneas de campo con un radio de giro a y velocidad $\omega_B a$, al tiempo que se mueve con velocidad uniforme $v_\parallel$ a lo largo de las líneas de fuerza. Vamos a considerar este movimiento como una aproximación de orden cero del movimiento de

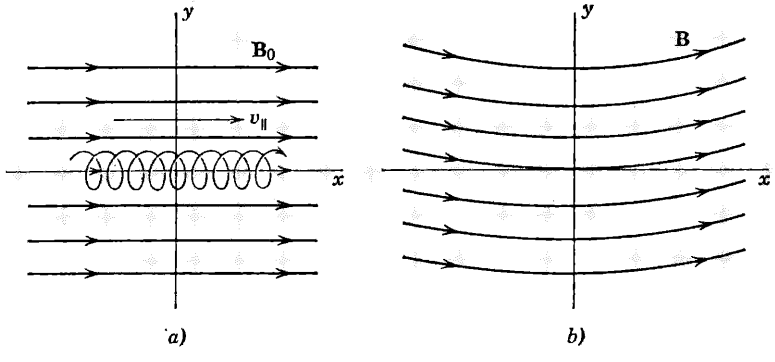


FIG. 12.4. *a)* Partícula moviéndose en una trayectoria helicoidal a lo largo de las líneas de inducción magnética uniforme y constante. *b)* La curvatura de las líneas de inducción magnética da lugar a una deriva perpendicular al plano (x, y).

una partícula en el campo de la parte derecha, en que las líneas de fuerza están curvadas con un radio de curvatura local R grande frente al radio a.

En la aproximación de primer orden el movimiento puede interpretarse como sigue. La partícula tiende a realizar el movimiento helicoidal alrededor de una de las líneas del campo, pero la línea se curva desviándose lateralmente. En lo que se refiere al movimiento de la línea central de la hélice, esto es equivalente a una aceleración centrífuga cuyo valor absoluto es $v_{\parallel}^2/R$. Esta aceleración puede considerarse como que es producida por un campo eléctrico efectivo

$$\boldsymbol{E}_{\text{ef}} = \frac{\gamma m}{e} \frac{\boldsymbol{R}}{R^2} v_{\parallel}^2 \qquad [12.56]$$

que se añade a la inducción magnética $\boldsymbol{B}_0$. Según [12.43] vemos que el campo eléctrico efectivo y la inducción magnética, combinados, producen una *velocide deriva por curvatura*

$$\boldsymbol{v}_C \simeq \frac{\gamma m}{e} v_{\parallel}^2 \frac{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{B}_0}{R^2 B_0^2} \qquad [12.57]$$

que, mediante la definición de $\omega_B = eB_0/\gamma m$, puede expresarse:

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_B R} \left(\frac{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{B}_0}{R B_0} \right) \qquad [12.58]$$

El sentido de deriva viene determinado por el producto vectorial, en el que R es el radio vector *desde* el centro de curvatura efectivo *al* punto ocupado por la carga. El signo que aparece en [12.58] es válido para cargas positivas y no depende para nada del signo de $v_{\parallel}$. Si se trata de partículas negativas, aparece el signo opuesto debido a ω_B.

Puede hacerse una deducción de [12.58] más directa, aunque pedestre, resolviendo directamente la ecuación de la fuerza de Lorentz. Si tomamos coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) adecuadas a la figura 12.4, *b*, con origen en el centro de curvatura, la inducción magnética tiene solamente componente según ϕ, $B_\phi = B_0$. Entonces puede demostrarse fácilmente que la ecuación de la fuerza da las tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 &= -\omega_B \dot{z} \\ \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} &= 0 \\ \ddot{z} &= \omega_B \dot{\rho} \end{aligned} \qquad [12.59]$$

Si la trayectoria de orden cero es una hélice de radio a pequeño frente al radio de curvatura R, en el menor orden de aproximación tenemos $\dot{\phi} \simeq v_{\parallel}/R$, mientras que $\rho \simeq R$. Así, de la primera ecuación obtenemos un resultado aproximado para $\dot{z}$,

$$\dot{z} \simeq \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_B R} \qquad [12.60]$$

que es precisamente el arrastre por curvatura dado por [12.58].

En las regiones del espacio en que no hay corrientes, el arrastre por gradiente $\boldsymbol{v}_G$ [12.55] y el arrastre por curvatura $\boldsymbol{v}_c$ [12.58] pueden combinarse

en una forma simple. Esto se deduce del hecho de que para un campo bidimensional como en el indicado en la figura 14.4, *b)*, $\nabla \times \boldsymbol{B} = 0$ implica que:

$$\frac{\nabla_{\perp} B}{B} = -\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}$$

Entonces, evidentemente, para un campo bidimensional, la suma de $\boldsymbol{v}_G$ y $\boldsymbol{v}_C$ constituye una velocidad de deriva total:

$$\boldsymbol{v}_D = \frac{1}{\omega_B R}\left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2\right)\left(\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{B}}{RB}\right) \qquad [12.61]$$

en donde $v_{\perp} = \omega_B a$ es la velocidad transversal de giro. En el caso de partículas cargadas no relativistas en equilibrio térmico, la velocidad de deriva es

$$v_D\,(\text{m/seg}) = \frac{1{,}72\,T\,(°\text{K})}{R(\text{m})\,B(\text{gauss})} \qquad [12.62]$$

La deriva de partículas que expresa [12.61] resulta perturbadora en ciertos tipos de máquinas termonucleares proyectadas para contener plasmas calientes. Una de las posibles configuraciones es un tubo toroidal con un campo axial intenso producido por arrollamientos solenoidales alrededor del toro. Con los valores de $R = 1$ metro, $B = 10^3$ gauss, las partículas de un plasma de 1 eV ($T \simeq 10^4$ °K) presentarían velocidades de deriva $v_D \sim 18$ m/s; lo cual significa que se desplazarían hacia fuera, hasta las paredes, en una pequeña fracción de segundo. Para plasmas más calientes, la velocidad de deriva es aún mayor. Una forma de evitar este arrastre de primer orden en las geometrías toroidales, consiste en retorcer el toro hasta llegar a la forma de un ocho. Puesto que generalmente las partículas describen varios circuitos a lo largo del camino cerrado antes de ser arrastradas a través del tubo, no se ven sometidas a curvatura o gradiente del campo neto. Por tanto, no experimentan arrastre al menos en primer orden en $1/R$. Este método de eliminar los arrastres debidos a variaciones espaciales de los campos magnéticos se utiliza en la máquina termonuclear de tipo Stellerator, en la que el confinamiento se consigue mediante un campo magnético axial intenso producido externamente.

12.6. INVARIANCIA ADIABATICA DEL FLUJO A TRAVES DE LA ORBITA DE LA PARTICULA

Los distintos movimientos tratados en las anteriores secciones eran perpendiculares a las líneas de campo magnético. Estos movimientos, causados por campos eléctricos o por el gradiente o curvatura del campo magnético, se presentan a causa de las características del término fuerza magnética en la ecuación de fuerza de Lorentz. Para completar nuestra visión general sobre el movimiento de partículas en campos magnéticos, vamos a considerar un movimiento paralelo a las líneas de fuerza. El concepto de invariantes adiabáticos resulta ser una herramienta poderosa para el estudio de campos que varían lentamente. En la mecánica celeste y en la vieja teoría cuántica los invariantes

adiabáticos fueron muy útiles para estudiar por un lado las perturbaciones y, por otro lado, decidir qué magnitudes deben cuantizarse. Nuestro tratamiento presentará una mayor semejanza con el problema de mecánica celeste, ya que lo que nos interesa es el comportamiento de una partícula cargada en campos que varían lentamente, variaciones que pueden considerarse como desviaciones pequeñas del campo uniforme y estático considerado en la sección 12.3.

El concepto de invariancia adiabática se introduce considerando las integrales de acción de un sistema mecánico. Si q_i y p_i son las coordenadas e ímpetus canónicos generalizados, para cada coordenada que sea periódica, se define la integral de acción J_i mediante

$$J_i = \oint p_i \, dq_i \qquad [12.63]$$

La integración se extiende a un ciclo completo de la coordenada q_i. Para un sistema mecánico dado en que especificamos las coordenadas iniciales, las integrales de acción J_i son constantes. Si ahora cambiamos de alguna forma las propiedades del sistema (por ejemplo, una variación de la constante elástica de algún resorte o de la masa de alguna partícula), se nos presenta la cuestión de cómo varían las integrales de acción. Se puede demostrar * que si el cambio es lento comparado con los restantes periodos del movimiento y no está relacionado con dichos periodos (es lo que se conoce con el nombre de *cambio adiabático*), las integrales de acción no varían. Esto quiere decir que, si tenemos cierto sistema mecánico en un estado de movimiento y efectuamos un cambio adiabático de cierta propiedad de forma que después de un tiempo largo hayamos llegado a un sistema mecánico distinto, el movimiento final de este sistema será tal que las integrales de acción tengan los mismos valores que en el sistema inicial. Evidentemente, disponemos, pues, de una herramienta poderosa para examinar los efectos de pequeños cambios en las propiedades.

El movimiento transversal de una partícula cargada en una inducción magnética estática uniforme $\boldsymbol{B}$ es un movimiento periódico. La integral de acción de este movimiento transversal es

$$J = \oint \boldsymbol{P}_\perp \cdot d\boldsymbol{l}, \qquad [12.64]$$

en donde $\boldsymbol{P}_\perp$ es la componente transversal del ímpetu canónico [12.11] y $d\boldsymbol{l}$ es el elemento de línea dirigido a lo largo del camino circular de la partícula. De [12.11] vemos que

$$J = \oint \gamma m \boldsymbol{v}_\perp \cdot d\boldsymbol{l} + e \oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \qquad [12.65]$$

Como $\boldsymbol{v}_\perp$ es paralelo a $d\boldsymbol{l}$, tenemos

$$J = \oint \gamma m \omega_B a^2 \, d\theta + e \oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \qquad [12.66]$$

---

* Véase, por ejemplo, M. BORN, *The Mechanics of the atom*, Bell, Londres, 1927.

Si aplicamos el teorema de Stokes a la segunda integral e integramos sobre θ en la primera integral, obtenemos

$$J = 2\pi\gamma m\omega_B a^2 + e\oint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, da \qquad [12.67]$$

Por recorrerse el elemento de línea dl en [12.64] en sentido contrario a las agujas del reloj respecto de $\mathbf{B}$, el vector unitario $\mathbf{n}$ es antiparalelo a $\mathbf{B}$. Por tanto, la integral sobre la órbita circular se resta del primer término. Así, tenemos:

$$J = \gamma m\omega_B \pi a^2 = eB\pi a^2 \qquad [12.68]$$

en donde se ha utilizado $\omega_B = eB/\gamma m$. La expresión $B\pi a^2$ es el flujo a través de la órbita de la partícula.

Cuando la partícula se mueve en regiones en que la intensidad de la inducción magnética varía lentamente en el espacio o en el tiempo, la invariancia adiabática de J significa que el flujo abarcado por la órbita de la partícula permanece constante. Si B aumenta, el radio a decrece de forma que $B\pi a^2$ permanece inalterado. Esta constancia del flujo puede expresarse de varias formas en las que interviene el radio de la órbita de la partícula, su ímpetu transversal o su momento magnético. Estas formas diferentes son:

$$\left.\begin{array}{l} Ba^2 \\ p_\perp^2/B \\ \gamma\mu \end{array}\right\} \text{ son invariantes adiabáticos} \qquad [12.69]$$

en donde $\mu = (e\omega_B a^2/2)$ es el momento magnético de la espira de corriente a que corresponde la órbita de la partícula. Si solamente hay presentes campos magnéticos estáticos, el módulo de la velocidad de la partícula es constante y su energía total no varía. Entonces el momento magnético es un invariante adiabático. En los campos que varían con el tiempo o campos eléctricos estáticos, μ es un invariante adiabático solamente en el límite no relativista.

Consideremos ahora un caso sencillo en el cual actúa un campo magnético estático dirigido principalmente en la dirección z, pero que presenta un pequeño gradiente positivo en esa dirección. La figura 12.5 muestra el aspecto general de las líneas de fuerza. Además de la componente z del campo hay una pequeña componente radial debida a la curvatura de las líneas de fuerza. Para mayor sencillez vamos a suponer simetría cilíndrica. Supongamos que hay una partícula girando alrededor del eje z en una órbita de pequeño radio

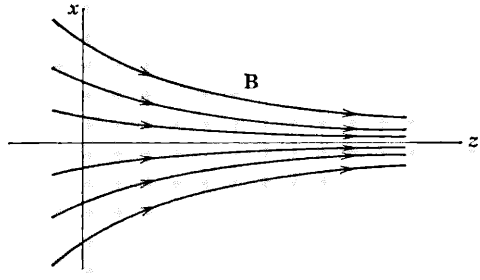


FIG. 12.5.

con una componente transversal de la velocidad $v_{\perp 0}$ y una componente $v_{\parallel 0}$ paralela a $\boldsymbol{B}$ en el punto $z=0$, donde la componente axial del campo es B_0. El módulo de la velocidad de la partícula es constante, de modo que en cualquier posición a lo largo del eje z

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_0^2 \qquad [12.70]$$

en donde $v_0^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2$ es el cuadrado de la velocidad en el punto $z=0$. Si suponemos que el flujo abarcado por la partícula es una constante del movimiento, [12.69] nos permite escribir

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} \qquad [12.71]$$

en donde B es la inducción magnética axial. Así tenemos que la componente de la velocidad paralela al eje z en cualquier posición de dicho eje viene dada por

$$v_{\parallel}^2 = v_0^2 - v_{\perp 0}^2 \frac{B(z)}{B_0} \qquad [12.72]$$

La ecuación [12.72] para la velocidad de la partícula en la dirección z es equivalente a la primera integral de la ecuación de Newton del movimiento de una partícula en un potencial unidimensional *:

$$V(z) = \frac{1}{2} m \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} B(z)$$

Si $B(z)$ aumenta lo suficiente, el segundo miembro de [12.72] se anulará en algún punto de $z=z_0$. Quiere esto decir que la partícula gira en espiras cada vez más apretadas, convirtiendo energía de traslación en energía de rotación,

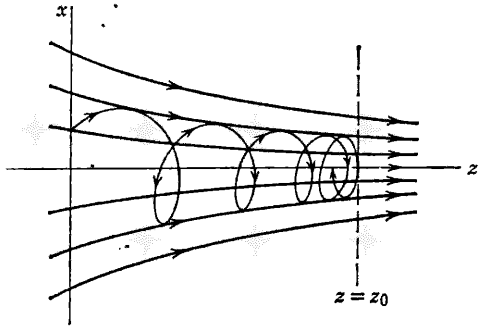


FIG. 12.6. Reflexión de una partícula cargada en una región de gran intensidad del campo.

hasta que se anula la velocidad axial. Entonces la partícula vuelve atrás girando en el mismo sentido, y regresa en el sentido negativo del eje z. Se dice que la partícula es reflejada por el campo magnético, como muestra esquemáticamente la figura 12.6.

* Sin embargo, nótese que nuestra discusión es plenamente relativista. La analogía con la mecánica unidimensional no relativista es puramente formal.

La ecuación [12.72] es una consecuencia de suponer que $p_\perp^2/B$ es invariante Vamos a demostrar que, al menos en el primer orden de aproximación, esta invariancia es consecuencia directa de la ecuación de fuerza de Lorentz; para ello consideraremos una solución explícita de las ecuaciones de movimiento. Si la inducción magnética a lo largo del eje es $B(z)$, habrá cerca del eje una componente radial del campo dada por la ecuación de la divergencia

$$B_\rho(\rho, z) \simeq -\frac{1}{2}\rho\frac{\partial B(z)}{\partial z} \qquad [12.73]$$

donde ρ es el radio a partir del eje. La componente z de la ecuación de la fuerza es

$$\ddot{z} = \frac{e}{\gamma m}(-\rho\dot{\phi}B_\rho) \simeq \frac{e}{2\gamma m}\rho^2\dot{\phi}\frac{\partial B(z)}{\partial z} \qquad [12.74]$$

en donde $\dot{\phi}$ es la velocidad angular alrededor del eje z. Puede esto expresarse correctamente hasta el primer orden en una variación pequeña de $B(z)$, en la forma:

$$\ddot{z} \simeq -\frac{v_{\perp 0}^2}{2B_0}\frac{\partial B(z)}{\partial z} \qquad [12.75]$$

en donde hemos hecho $\rho^2\dot{\phi} \simeq (a^2\omega_B)_0 = -(v_{\perp 0}^2/\omega_{B0})$. La primera integral de la ecuación [12.75] es [12.72], lo cual nos muestra que el flujo que atraviesa la órbita es constante en una aproximación hasta el primer orden. Esto es una consecuencia directa de las ecuaciones de movimiento.

La invariancia adiabática del flujo a través de una órbita es útil para tratar el movimiento de partículas en todo tipo de campo magnético con variaciones espaciales. El ejemplo sencillo descrito anteriormente ilustra el principio del «espejo magnético»: las partículas cargadas son reflejadas por las regiones de gran intensidad de campo. Esta propiedad de reflexión constituyó la base de una teoría de Fermi para explicar la aceleración de partículas de los rayos cósmicos en los espacios interestelares hasta energías muy altas, como consecuencia de choques con nubes magnéticas en movimiento. El principio del espejo se puede aplicar a la contención de un plasma caliente para la producción de energía termonuclear. Se puede construir una botella magnética mediante un campo axial producido por arrollamientos solenoidales en cierta región del espacio y arrollamientos adicionales en cada extremo que den en ambos un campo mucho más intenso. Las líneas de fuerza pueden presentar el aspecto de la figura 12.7. Las partículas creadas o inyectadas en el campo de la región central describirían movimientos helicoidales a lo largo del eje, pero se reflejarán en los espejos magnéticos de cada extremo. Si la razón entre el campo máximo B_m en el espejo y el campo B en la región central es muy grande, solamente las partículas cuya velocidad axial sea muy grande podrán atravesar los extremos. Según [12.72], resulta inmediato que el criterio para que la partícula permanezca confinada es

$$\left|\frac{v_\parallel^0}{v_\perp^0}\right| < \left(\frac{B_m}{B} - 1\right)^{1/2} \qquad [12.76]$$

Si se inyectan las partículas en el aparato, es muy fácil satisfacer el requisito

[12.76]. Así, la fuga de partículas viene gobernada por la rapidez con que son dispersadas por los átomos de gas residual, etc., en la medida en que las componentes de la velocidad dejen de cumplir [12.76].

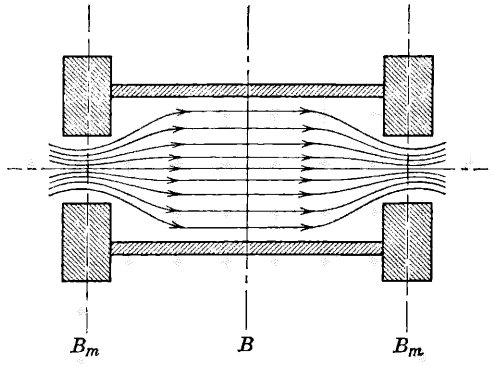


FIG. 12.7. Diagrama esquemático de una botella con «espejos» para contener un plasma caliente.

Otro dominio de aplicación de estos principios es el de los campos magnéticos terrestre y estelares. El movimiento de partículas cargadas en los campos magnéticos dipolares del Sol o de la Tierra puede comprenderse mediante los invariantes adiabáticos discutidos aquí y las velocidades de la sección 12.5. Algunos aspectos de este tema se dejan para los problemas 12.8 y 12.9 sobre partículas atrapadas en las proximidades de la Tierra (cinturones de Van Allen).

12.7. CORRECCIONES RELATIVISTAS DE MENOR ORDEN PARA EL LAGRANGIANO DE DOS PARTICULAS CARGADAS EN INTERACCION, LAGRANGIANO DE DARWIN

En la sección 12.1 hemos tratado el formalismo general de Lagrange para una partícula relativista en campos electromagnéticos externos descritos por los potenciales vector y escalar A y Φ. El lagrangiano de interacción apropiado venía dado por [12.8]. Si tratamos ahora de describir del mismo modo la interacción entre dos o más partículas cargadas, vemos que sólo es posible a velocidades no relativistas. Se supone que el lagrangiano es función de las velocidades y coordenadas instantáneas de todas las partículas. Si tenemos en cuenta que los campos electromagnéticos se propagan a velocidad finita, ya no es esto posible, puesto que los valores de los potenciales en el lugar ocupado por una partícula debidos a las restantes partículas dependen de su estado de movimiento en instantes «retardados». La descripción lagrangiana en función de las posiciones y velocidades instantáneas sólo es posible cuando pueden despreciarse los efectos de retardo. Podría pensarse, a la vista de esto, que solamente se puede formular un lagrangiano en el caso límite estático, es decir, de orden cero en (v/c). No obstante, vamos a demostrar que podemos incluir las correcciones relativistas de menor orden a fin de obtener un lagrangiano aproximado para la interacción de partículas, correcto hasta el orden de $(v/c)^2$ inclusive.

Basta con considerar la interacción entre dos partículas de cargas q_1 y q_2, masas m_1 y m_2 y coordenadas $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$. La separación relativa es $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$. En el límite estático el lagrangiano de interacción es precisamente la energía potencial electrostática con signo negativo

$$L_{\text{int}}^{\text{NR}} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad [12.77]$$

Si nos fijamos en la primera partícula, podemos considerar esta expresión como el producto con signo negativo de q_1 por el potencial escalar Φ_{12} debido a la segunda partícula en la posición ocupada por la primera, lo cual es de la misma forma que [12.7]. Si deseamos generalizar a situaciones distintas de la estática, deberemos, de acuerdo con [12.8], determinar Φ_{12} y $\boldsymbol{A}_{12}$, por lo menos hasta un cierto grado de aproximación. Por lo general, habrá correcciones relativistas tanto en Φ_{12} como en $\boldsymbol{A}_{12}$. Pero en el *contraste de Coulomb,* el potencial escalar viene dado de forma correcta en todos los órdenes de v/c, por el potencial de Coulomb instantáneo. Así, pues, en este contraste conocemos ya la contribución del potencial escalar Φ_{12}. Sólo nos falta considerar el potencial vector $\boldsymbol{A}_{12}$.

Si solamente se requieren las correcciones relativistas de orden inferior, podemos despreciar los efectos de retardo al calcular $\boldsymbol{A}_{12}$. La razón está en que el potencial vector interviene en el lagrangiano mediante la combinación $q_1\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{A}_{12}$. Ya que el mismo $\boldsymbol{A}_{12}$ es del orden de v_2/c, resulta innecesaria una exactitud mayor en el cálculo de $\boldsymbol{A}_{12}$. Por tanto, tenemos la expresión magnetostática

$$\boldsymbol{A}_{12} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}_t(\boldsymbol{x}')\,d^3x'}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}'|} \qquad [12.78]$$

en donde $\boldsymbol{J}_t$ es la parte transversal de la corriente debida a la segunda partícula, como se discutió en la sección 6.5. De las ecuaciones [6.46]-[6.50] se deduce que la corriente transversal es:

$$\boldsymbol{J}_t(\boldsymbol{x}') = q_2\boldsymbol{v}_2\,\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_2) - \frac{q_2}{4\pi}\nabla'\left(\frac{\boldsymbol{v}_2\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_2|^3}\right) \qquad [12.79]$$

Sustituyendo esta expresión en [12.78], el primer término puede integrarse de forma inmediata.

$$\boldsymbol{A}_{12} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2\boldsymbol{v}_2}{r} - \frac{q_2}{4\pi}\int \frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_1|}\nabla'\left(\frac{\boldsymbol{v}_2\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_2|^3}\right)d^3x'$$

Efectuando el cambio de variable $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_2$ e integrando por partes, la integral puede ponerse bajo la forma

$$\boldsymbol{A}_{12} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{q_2\boldsymbol{v}_2}{r} - \frac{q_2}{4\pi}\nabla_r\int\frac{\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{y}}{y^3}\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{r}|}\,d^3y\right]$$

Podemos ahora efectuar la integración de forma directa, con lo que obtenemos:

$$\boldsymbol{A}_{12} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}q_2\left[\frac{\boldsymbol{v}_2}{r} - \frac{1}{2}\nabla_r\left(\frac{\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{r}}{r}\right)\right]$$

Diferenciando el segundo término llegamos al resultado final

$$\boldsymbol{A}_{12} \simeq \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{q_2}{r}\left[\boldsymbol{v}_2 + \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{r})}{r^2}\right] \qquad [12.80]$$

Utilizando la expresión [12.80] para el potencial debido a la segunda partícula en el punto ocupado por la primera, el lagrangiano de interacción de las dos partículas cargadas, incluyendo los efectos relativistas de menor orden, es

$$L_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}\left\{-1 + \frac{1}{2c^2}\left[\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 + \frac{(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{r})}{r^2}\right]\right\} \qquad [12.81]$$

Esta forma de interacción fue obtenida por DARWIN, en 1920. Es importante en la discusión mecanocuántica de las correcciones relativistas en átomos de dos electrones. En el problema mecanocuántico, los vectores velocidad vienen reemplazados por sus correspondientes operadores mecanocuánticos (las α de Dirac). De esta forma se conoce como interacción de Breit (1930) *.

El lagrangiano de Darwin completo, para un sistema de partículas cargadas en interacción, puede escribirse con aproximación del orden de $1/c^2$ inclusive, desarrollando el lagrangiano de partículas libres [12.6] para cada una de las partículas y sumando todos los términos de interacción de la forma [12.81]. El resultado es:

$$L_{\text{Darwin}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 + \frac{1}{8c^2}\sum_i m_i v_i^4 - \frac{1}{2}{\sum_{i,j}}' \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} + \\ + \frac{1}{16\pi\epsilon_0 c^2}{\sum_{i,j}}' \frac{q_i q_j}{r_{ij}}\left[\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{v}_i\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ij}\boldsymbol{v}_j\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ij}\right] \qquad [12.82]$$

siendo $r_{ij} = |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|$, $\hat{\boldsymbol{r}}_{ij}$ un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j$, y en la que mediante la prima en la doble suma se indica que se omiten los términos $i = j$ (de autoenergía). Aunque el langrangiano de Darwin ha tenido su más célebre aplicación en el tema mecanocuántico de la interacción de Breit, tiene aplicaciones en el dominio puramente clásico. Al final del capítulo, en las lecturas recomendadas se citan dos ejemplos. Véanse también los problemas.

12.8. LAGRANGIANO DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO

En la sección 12.1 considerábamos la formulación lagrangiana de las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético externo. Vamos ahora a examinar la descripción lagrangiana del campo electromagnético en interacción con fuentes externas, cargas y corrientes, especificadas. El tratamiento lagrangiano de los campos continuos sigue con gran paralelismo las técnicas empleadas para partículas puntuales discretas **. El número finito

* Véase H. A. BETHE y E. E. SALPETER, *Quantum Mechanics of One-and two-Electron Atoms*, Springer-Verlag, Berlín, Academic, Nueva York, 1957, págs. 170 y sigs.

** Véanse GOLDSTEIN, capítulo 11, WENTZEL, capítulo 1, u otras de las referencias citadas al final del capítulo para buscar mayores detalles o fundamentos de los dados en nuestra breve reseña.

de coordenadas $q_i(t)$ y $\dot{q}_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, se reemplazan por un número infinito de grados de libertad. Cada punto en el espacio-tiempo x^α corresponde a un número finito de valores del índice discreto i. La coordenada generalizada q_i se reemplaza por un campo continuo $\phi_k(x)$, con un índice discreto ($k=1, 2, \ldots, n$) y un índice continuo (x^α). La velocidad generalizada $\dot{q}_i$ se reemplaza por el 4-vector gradiente, $\partial^\beta\phi_k$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange se deducen de la propiedad estacionaria de integral de acción con respecto a las variaciones $\delta\phi_k$ y $\delta(\partial^\beta\phi_k)$ en torno a sus valores físicos. Así, tenemos las correspondencias siguientes:

$$\begin{aligned} i &\rightarrow x^\alpha, k \\ q_i &\rightarrow \phi_k(x) \\ \dot{q}_i &\rightarrow \partial^\alpha\phi_k(x) \\ L=\sum_i L_i(q_i, \dot{q}_i) &\rightarrow \int \mathcal{L}(\phi_k, \partial^\alpha\phi_k)\, d^3x \qquad [12.83] \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i} &\rightarrow \partial^\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta\phi_k)}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}$ es una *densidad* lagrangiana, correspondiente a un punto determinado del espacio-tiempo y es equivalente a los términos individuales en un lagrangiano de partículas discretas como [12.82]. Para el campo electromagnético las «coordenadas» y «velocidades» son A^α y $\partial^\beta A^\alpha$.

La integral de acción toma la forma:

$$A=\int\int \mathcal{L}\, d^3x\, dt=\frac{1}{c}\int \mathcal{L}\, d^4x \qquad [12.84]$$

La naturaleza de invariante de Lorentz de la acción se mantiene, supuesto que la *densidad lagrangiana* $\mathcal{L}$ *sea un escalar de Lorentz* (debido a que el elemento de volumen 4-dimensional es invariante). En analogía con la situación para partículas discretas, podemos esperar al menos que el lagrangiano del campo libre sea cuadrático en las velocidades, esto es, $\partial^\beta A^\alpha$ o $F^{\alpha\beta}$. Las únicas formas cuadráticas que son invariantes de Lorentz son $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ y $F_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ (véase el problema 11.12). La última es escalar en las transformaciones de Lorentz propias, pero es seudoescalar en la inversión. Si exigimos que sea escalar tanto en las inversiones como en las transformaciones de Lorentz propias, debemos tener que $\mathcal{L}$ sea un cierto múltiplo de $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$. El término de interacción en $\mathcal{L}$ contiene las densidades de fuentes. Estas vienen descritas mediante el 4-vector densidad de corriente $J^\alpha(x)$. Podemos anticipar, dada la forma de las energías electrostática y magnetostática, o del lagrangiano de interacción de partículas cargadas [12.8], que $\mathcal{L}_{\text{int}}$ es un múltiplo de $J_\alpha A^\alpha$. Con tal motivo postulamos la densidad lagrangiana electromagnética:

$$\mathcal{L}=-\frac{\epsilon_0 c^2}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}-J_\alpha A^\alpha \qquad [12.85]$$

El coeficiente y el signo de los términos de interacción se eligen para ponerse de acuerdo con [12.8]; el signo y el factor del lagrangiano libre se ponen de acuerdo con las definiciones de las intensidades del campo en las ecuaciones de Maxwell.

Con el fin de utilizar la ecuación de Euler-Lagrange en la forma dada en [12.83], sustituimos la definición de los campos y escribimos:

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon_0 c^2}{4} g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} (\partial^\mu A^\sigma - \partial^\sigma A^\mu)(\partial^\lambda A^\nu - \partial^\nu A^\lambda) - J_\alpha A^\alpha \qquad [12.86]$$

Al calcular $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial^\beta A^\alpha)$ debe tenerse cuidado en tomar todos los términos. Hay cuatro términos diferentes, como puede verse en los cálculos explícitos siguientes:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{\epsilon_0 c^2}{4} g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} \left\{ \begin{array}{l} \delta_\beta{}^\mu \delta_\alpha{}^\sigma F^{\lambda\nu} - \delta_\beta{}^\sigma \delta_\alpha{}^\mu F^{\lambda\nu} + \\ + \delta_\beta{}^\lambda \delta_\alpha{}^\nu F^{\mu\sigma} - \delta_\beta{}^\nu \delta_\alpha{}^\lambda F^{\mu\sigma} \end{array} \right\}$$

Debido a la simetría de $g_{\alpha\beta}$ y a la antisimetría de $F^{\alpha\beta}$, los cuatro términos son iguales y la derivada se convierte en:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\epsilon_0 c^2 F_{\beta\alpha} = \epsilon_0 c^2 F_{\alpha\beta} \qquad [12.87]$$

La otra parte de la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\alpha} = -J_\alpha \qquad [12.88]$$

Así que las ecuaciones de movimiento del campo electromagnético son:

$$\epsilon_0 c^2 \partial^\beta F_{\beta\alpha} = J_\alpha \qquad [12.89]$$

Que se reconocen como una forma covariante de las ecuaciones no homogéneas de Maxwell [11.141].

El lagrangiano [12.85] da las ecuaciones de Maxwell no homogéneas, pero no las homogéneas. Esto es debido a que la definición del tensor intensidad del campo $F^{\alpha\beta}$ en función de 4-vector potencial A^λ fue realizada de modo que las ecuaciones homogéneas se satisficieran automáticamente (véase sección 6.4). Para ver esto en nuestra notación 4-tensorial actual, considérese el primer miembro de las ecuaciones homogéneas [11.142]:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} &= \tfrac{1}{2} \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \\ &= c \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\lambda A_\mu \\ &= c \epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\alpha \partial_\lambda A_\mu \end{aligned}$$

Pero el operador diferencial $\partial_\alpha \partial_\lambda$ es simétrico en α y λ (suponiendo que A_μ se comporte bien), en tanto que $\epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}$ es antisimétrico en α y λ. Así la contracción sobre α y λ se anula. Las ecuaciones homogéneas de Maxwell se satisfacen de modo trivial.

La conservación de la densidad de corriente de fuentes puede obtenerse de [12.89] tomando la 4-divergencia de ambos miembros:

$$\epsilon_0 c^2 \partial^\alpha \partial^\beta F_{\beta\alpha} = \partial^\alpha J_\alpha$$

El primer miembro tiene un operador diferencial que es simétrico respecto a α y β, mientras que $F_{\beta\alpha}$ es antisimétrico. De nuevo la contracción lo anula y tenemos:

$$\partial^\alpha J_\alpha = 0 \qquad [12.90]$$

12.9. LAGRANGIANO DE PROCA. EFECTOS DE LA MASA DEL FOTON

Las ecuaciones de Maxwell habituales y el lagrangiano [12.85] están basados en la hipótesis de que el fotón tiene masa nula. Como se discutía en la introducción, siempre es posible preguntar qué evidencia hay de que el fotón no tenga masa, o lo que es equivalente, de que la ley de fuerzas de Coulomb sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, y qué consecuencias surgirían de que la masa no se anulara. Una técnica sistemática para hacer tales consideraciones es la formulación lagrangiana. Vamos a modificar la densidad lagrangiana [12.85] añadiendo un término de «masa». El langrangiano que resulta se conoce con el nombre de *lagrangiano de Proca,* al haber sido este autor (1930, 36) el primero en considerarlo. El lagrangiano de Proca es:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{\epsilon_0 c^2}{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{\epsilon_0 c^2 \mu^2}{2} A_\alpha A^\alpha - J_\alpha A^\alpha \qquad [12.91]$$

El parámetro μ tiene las dimensiones inversas de una longitud y es el recíproco de la longitud de onda de Compton del fotón ($\mu = m_\gamma c/\hbar$). Las ecuaciones de movimiento de Proca, en lugar de [12.89], son:

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha} + \mu^2 A_\alpha = \mu_0 J_\alpha \qquad [12.92]$$

Observemos que en las ecuaciones de Proca intervienen tanto los potenciales como los campos. En contraste con las ecuaciones de Maxwell, los potenciales adquieren significado físico real (observable) a través del término de masa. En el contraste de Lorentz, obligado ahora por la conservación de la corriente, la ecuación [12.92] puede escribirse:

$$\Box A_\alpha + \mu^2 A_\alpha = \mu_0 J_\alpha \qquad [12.93]$$

y en el límite estático toma la forma:

$$\nabla^2 A_\alpha - \mu^2 A_\alpha = -\mu_0 J_\alpha$$

Si la fuente es una carga puntual q en reposo en el origen solo deja de anularse la componente temporal $A_0 = \Phi/c$. Esta, toma la forma esféricamente simétrica de Yukawa:

$$\Phi(x) = \frac{qe^{-\mu r}}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad [12.94]$$

Esto demuestra el aspecto característico de la masa del fotón. Existe un decrecimiento exponencial de los potenciales y campos estáticos, con una distancia $1/e$ igual a μ^{-1}. Como se discutía en la introducción y también en el problema 12.14, el factor exponencial altera el carácter del campo magnético

terrestre suficientemente para que podamos establecer límites muy estrictos a la masa del fotón a partir de datos geomagnéticos. Se sugirió en cierta ocasión * que experimentos de laboratorio relativamente sencillos, con circuitos *LC* de parámetros concentrados podían incluso mejorar estos límites, pero la idea era conceptualmente defectuosa. Están implicadas bastantes sutilezas para que merezca la pena dedicar al tema una breve discusión **.

El punto de partida del razonamiento es la [12.93] en ausencia de fuentes. Si suponemos variaciones armónicas en el espacio y en el tiempo, la ecuación de ligadura entre la frecuencia y el número de ondas es:

$$\omega^2 = c^2k^2 + \mu^2c^2 \qquad [12.95]$$

Esta es la expresión habitual para el cuadrado de la energía (dividido por $\hbar$) para un partícula de ímpetu $\hbar k$ y masa $\mu\hbar/c$. Consideremos ahora algún sistema resonante (cavidad o circuito). Supongamos que su frecuencia resonante es ω_0 cuando $\mu = 0$, mientras que para $\mu \neq 0$ la frecuencia de resonancia es ω. De la estructura de [12.95] se está tentado a escribir la relación:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu^2c^2 \qquad [12.96]$$

Evidentemente, cuanto menor sea la frecuencia, mayor será la desviación relativa entre ω y ω_0 para una masa del fotón dada. Esto sugiere un experimento con circuitos de parámetros *LC* concentrados. El esquema consistiría en medir las frecuencias resonantes de una serie de circuitos cuyos valores ω_0^2 estuvieran en relaciones conocidas. Si las frecuencias de resonancia no estuvieran en la misma proporción, podría hallarse evidencia de que $\mu \neq 0$ en [12.96]. FRANKEN y AMPULSKI compararon dos circuitos, uno de ellos con una cierta autoinducción *L* y un condensador *C*, y, por tanto, con $\omega_0 = (LC)^{-1}$, y el otro con la misma autoinducción, pero con dos condensadores *C* en paralelo. Los cuadrados de las frecuencias observadas, corregidos de efectos resistivos estaban en la razón 2:1 dentro de los errores experimentales. De esto dedujeron un límite superior a la masa del fotón, destacando que en principio era posible aumentar la precisión en varios órdenes de magnitud si la idea tenía fundamento.

¿Qué estaba mal en esta idea? La primera observación es que los circuitos de parámetros *concentrados* son incapaces, por definición, de establecer límite *alguno* a la masa del fotón ***. El concepto de capacidad concentrada es un dispositivo de dos terminales con la propiedad de que la corriente que fluye en uno de los terminales *I* y la tensión entre los terminales *V* están relacionadas por $I = CdV/dt$. Análogamente, una autoinducción concentrada es un dispositivo de dos terminales gobernado por la ecuación $V = -Ldl/dt$. Cuando se conectan estos dos dispositivos entre sí, las corrientes y tensiones son necesariamente iguales y el sistema combinado está descrito por la ecuación $V + LC\,d^2V/dt^2 = 0$. La frecuencia de resonancia de un circuito *LC* concentrado es $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$.

---

* P. A. FRANKEN y G. W. AMPULSKI, *Phys. Rev. Letters*, **26**, 115 (1971).

** Poco después de que se propusiera la idea, aparecieron varios análisis basados en las ecuaciones de Proca. Algunos de ellos son los siguientes: A. S. GOLDHABER y M. M. NIETO, *Phys. Rev. Letters*, **26**, 1390 (1971); D. PARK y E. R. WILLIAMS, *Phys. Rev. Letters*, **26**, 1393 (1971); N. M. KROLL, *Phys. Rev. Letters*, **26**, 1395 (1971); D. G. BOULWARE, *Phys. Rev. Letters*, **27**, 55 (1971); N. M. KROLL, *Phys. Rev. Letters*, **27**, 340 (1971).

*** Estoy agradecido a E. M. PURCELL por destacar que éste es el punto casi universalmente erróneo o al menos pasado por alto en las discusiones sobre la propuesta de FRANKEN-AMPULSKI.

Naturalmente, es cierto que un conjunto de superficies conductoras o una bobina dada de hilo tendrán propiedades estáticas diferentes de capacidad o autoinducción según sea $\mu=0$, o no. Los potenciales y los campos quedan todos modificados por factores exponenciales de la forma general [12.94]. Entonces surge la cuestión de si se puede establecer un límite significativo para μ por medio de un experimento de «sobremesa», esto es, un experimento no con elementos de circuito concentrados, sino con elementos cuyos tamaños sean modestos. Por ejemplo, el lector puede verificar que para una esfera conductora maciza de radio a concéntrica con otra hueca de radio interior b, mantenida a potencial cero, que la capacidad queda aumentada en la cantidad $4\pi\epsilon_0\mu^2a^2b/3$, supuesto que $\mu b \ll 1$. Entonces resulta que el incremento relativo, en lugar de ser el valor que se deduce de [12.96]:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{\mu^2c^2}{2\omega_0^2} \qquad [12.97]$$

con $\omega_0=(LC)^{-1/2}$, el efecto real de la masa finita del fotón es:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=0(\mu^2d^2) \qquad [12.98]$$

siendo d una dimensión característica del circuito y ω_0 la frecuencia de resonancia para $\mu=0$. Esto hace que el experimento de «sobremesa» sea en principio posible, pero muy poco sensible en la práctica para poner de manifiesto una posible masa del fotón.

Aunque la estimación [12.98] lo dice ya todo, resulta de interés considerar el efecto de una masa finita del fotón en líneas de transmisión, guías de ondas o cavidades resonantes. Para líneas de transmisión el efecto de la masa del fotón es el mismo que para circuitos estáticos con parámetros concentrados. Recordemos del capítulo 8 que para $\mu=0$ los modos TEM de una línea de transmisión son modos degenerados, que se propagan con una velocidad de fase igual a la velocidad de la luz. La situación no se altera si $\mu \neq 0$. La única diferencia es que el comportamiento *transversal* de los campos está gobernado por $(\nabla_t^2-\mu^2)\psi=0$ en lugar de por la ecuación de Laplace. La capacidad y la inductancia por unidad de longitud de la línea quedan alteradas en cantidades relativas del orden de μ^2d^2, pero nada más. (El resultado del problema 6.5 aún vale.)

Para los modos TE y TM en una guía la situación es más complicada. Las condiciones de contorno sobre los campos y los potenciales deben considerarse con cuidado. El análisis demuestra (véase KROLL, ob. cit.) que los modos TM tienen su propagación gobernada por la ecuación simple [12.96], pero que, en general, los modos TE se propagan de manera diferente. En cualquier caso, como la frecuencia de corte de una guía está determinada por sus dimensiones laterales, la estimación generalmente incorrecta [12.97] se convierte en la misma que la estimación apropiada [12.98].

Para cavidades resonantes es complicado obtener una solución general, pero si la masa es pequeña se obtienen algunos resultados simples. Por ejemplo, en una cavidad rectangular, [12.96] se cumple con buena aproximación para los modos en que l, m y n son todos diferentes de cero, pero falla si cualquier índice de modo es igual a cero. Esto es debido a que los campos se comportan en la dirección asociada con el índice que se anula como campos estáticos y resultan aplicables los argumentos ya hechos. De particular interés

resultan los modos de baja frecuencia de la cavidad Tierra-ionosfera (resonancias de Schumann), discutidos en la sección 8.9. Estos modos tienen un campo eléctrico radial y con aproximación de *orden cero en h/R*, siendo h la altura de la ionosfera y R el radio de la Tierra, son modos TEM en una situación geométrica de planos paralelos. Así, pues, su propagación y, por tanto, las frecuencias de resonancia quedan inalteradas respecto a sus valores para $\mu=0$. En la aproximación de *primer orden* en h/R *hay* un cambio, que depende de la masa, en la frecuencia de resonancia. El resultado (véase el segundo trabajo de KROLL antes citado) es que [12.97] queda modificada en su segundo miembro por un factor $g \simeq 0,44\ h/R$ para el primer modo de Schumann. Con $h \simeq 70$ km, $g \simeq 5 \times 10^{-3}$. Esto significa que la frecuencia de resonancia de $\omega_0 = 50\ s^{-1}$ es menos efectiva en un factor $(1/g)^{1/2} \simeq 14$ para establecer un límite a la masa del fotón de lo que se deduce de consideraciones simples.

12.10. TENSORES DE TENSIONES CANONICO Y SIMETRICO. LEYES DE CONSERVACION

a) *Generalización del hamiltoniano: tensor de tensiones canónico*

En mecánica de partículas la transición a la formulación hamiltoniana y a la conservación de la energía se hace definiendo primero las variables canónicas de ímpetu:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad [12.99]$$

y después introduciendo el hamiltoniano:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \qquad [12.100]$$

Puede demostrarse que $dH/dt = 0$ si se supone que $\partial L/\partial t = 0$. Para los campos admitiremos por anticipado que tenemos una densidad hamiltoniana cuya integral de volumen en el espacio tridimensional es el hamiltoniano. Las propiedades de transformación de $\mathcal{H}$ pueden estimarse como sigue. Como la energía de una partícula es la componente temporal de un 4-vector, el hamiltoniano debe transformarse de la misma manera. Como $H = \int \mathcal{H}\, d^3x$, y el elemento de volumen cuadridimensional $d^4x = d^3x\, dx_0$, es necesario que la densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$ se transforme como la componente tiempo-tiempo de un tensor de segundo orden. Si la densidad lagrangiana para ciertos campos es una función de las variables del campo $\phi_k(x)$, $\partial^\alpha \phi_k(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, la densidad hamiltoniana se define en analogía con [12.100] en la forma:

$$\mathcal{H} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\dfrac{\partial \phi_k}{\partial t} \right)} \frac{\partial \phi_k}{\partial t} - \mathcal{L} \qquad [12.101]$$

El primer factor dentro de la suma es el ímpetu del campo canónicamente conjugado a $\phi_k(x)$ y la $\partial \phi_k(x)/\partial t$ es equivalente a la velocidad $\dot{q}_i$. Las propieda-

des de transformación de Lorentz inferidas para $\mathcal{H}$ sugieren que la *generalización covariante de la densidad hamiltoniana* es el *tensor de tensiones canónico*:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_k)} \partial^\beta \phi_k - g^{\alpha\beta}\mathcal{L} \qquad [12.102]$$

Para el lagrangiano del campo electromagnético libre

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{\epsilon_0 c^2}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad [12.103]$$

el tensor de tensiones canónico es:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial(\partial_\alpha A^\lambda)} \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta}\mathcal{L}_{\text{em}}$$

en la que el índice repetido implica una suma sobre λ. Con la ayuda de [12.87] (¡pero teniendo cuidado con la colocación de los índices!) hallamos:

$$T^{\alpha\beta} = -\epsilon_0 c^2 g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta}\mathcal{L}_{\text{em}} \qquad [12.104]$$

Para aclarar el significado del tensor desarrollamos alguna de sus componentes. Tomando $\mathcal{L} = \epsilon_0/2\,(\boldsymbol{E}^2 - c^2\boldsymbol{B}^2)$ y con [11.138] encontramos:

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \frac{\epsilon_0}{2}(\boldsymbol{E}^2 + c^2\boldsymbol{B}^2) + \epsilon_0 \nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{E}) \\ T^{0i} &= \epsilon_0 c(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})_i + \epsilon_0 c \nabla \cdot (A_i \boldsymbol{E}) \\ T^{i0} &= \epsilon_0 c(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})_i + \epsilon_0 c\left[(\nabla \times \Phi \boldsymbol{B})_i - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x_0}(\Phi E_i)\right] \end{aligned}\right\} \qquad [12.105]$$

Al escribir los segundos términos hemos hecho uso de las ecuaciones $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ y $\nabla \times \boldsymbol{B} - (1/c)\,\partial \boldsymbol{E}/\partial x_0 = 0$ para el campo libre. Si suponemos que los campos están localizados en cierta región finita del espacio (y que permanecen en ella siempre como consecuencia de la velocidad finita de propagación) las integrales extendidas a todo el espacio tridimensional en un instante dado de las componentes T^{00} y T^{0i} en un sistema inercial dado pueden interpretarse, como en el capítulo 6, como la energía total y el ímpetu total de los campos electromagnéticos en este sistema:

$$\left.\begin{aligned} \int T^{00}\, d^3x &= \frac{\epsilon_0}{2}\int (\boldsymbol{E}^2 + c^2\boldsymbol{B}^2)\, d^3x = E_{\text{campo}} \\ \int T^{0i}\, d^3x &= \epsilon_0 c \int (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})_i\, d^3x = cP^i_{\text{campo}} \end{aligned}\right\} \qquad [12.106]$$

Estas son las expresiones usuales, discutidas en la sección 6.8, para la energía y el ímpetu totales de los campos. Señalemos que las componentes mismas T^{00} y T^{0i} difieren de las definiciones usuales de densidad de energía y de ímpetu en las divergencias adicionales. Sin embargo, después de la integración extendida a todo el espacio los términos adicionales no dan ninguna contri-

bución, ya que se transforman en integrales de superficie en el infinito, donde los campos y los potenciales son idénticamente nulos.

La conexión entre las componentes tiempo-tiempo y tiempo-espacio de $T^{\alpha\beta}$ con las densidades de energía e ímpetu sugiere que existe una generalización covariante de la ley diferencial de conservación del teorema de Poynting [6.108]. Este enunciado diferencial de conservación es

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \qquad [12.107]$$

Al demostrar [12.107] tratamos la situación general descrita por el tensor [12.102] y las ecuaciones de Euler-Lagrange [12.83]. Considérese:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \sum_k \partial_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_k)} \partial^\beta \phi_k \right] - \partial^\beta \mathcal{L}$$

$$= \sum_k \left[\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_k)} \cdot \partial^\beta \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_k)} \partial_\alpha \partial^\beta \phi_k \right] - \partial^\beta \mathcal{L}$$

Mediante las ecuaciones de movimiento [12.83] el primer término puede transformarse de modo que:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \sum_k \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \partial^\beta \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_k)} \partial^\beta (\partial_\alpha \phi_k) \right] - \partial^\beta \mathcal{L}$$

Como $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_k, \delta^\alpha \phi_k)$, el corchete, sumado, es la expresión de una diferenciación total (regla de la cadena). Por tanto,

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial^\beta \mathcal{L}(\phi_k, \partial^\alpha \phi_k) - \partial^\beta \mathcal{L} = 0$$

La ley de conservación o ecuación de continuidad [12.107] da la conservación de la energía y el ímpetu totales después de la integración a todo el espacio tridimensional en un instante dado. En forma explícita, tenemos:

$$0 = \int \partial_\alpha T^{\alpha\beta} \, d^3x = \partial_0 \int T^{0\beta} \, d^3x + \int \partial_i T^{i\beta} \, d^3x$$

Si los campos están localizados, la segunda integral (una divergencia) no da contribución alguna. Entonces, identificando según [12.106], hallamos:

$$\frac{d}{dt} E_{\text{campo}} = 0; \qquad \frac{d}{dt} \boldsymbol{P}_{\text{campo}} = 0 \qquad [12.108]$$

En esta deducción de la conservación de la energía (teorema de Poynting) y del ímpetu, y en las definiciones [12.106] no se ha presentado la covariancia de forma manifiesta. Los resultados son válidos para un observador en reposo en el sistema en el que se especifican los campos. Pero no se ha considerado la cuestión de transformar de un sistema a otro. Con una ley diferencial de conservación covariante, $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$, puede esperarse que sea también posible un enunciado integral covariante. No parece que las integrales de [12.106] tengan las propiedades de transformación de las componentes de un 4-vector. Para campos sin fuentes de hecho se transforman apropiadamente (véase el

problema 12.15 y ROHRLICH, apéndice A1-5), pero en general no lo hacen. Para evitar el tener definidos separadamente en cada sistema inercial la energía y el ímpetu electromagnéticos, sin la conexión acostumbrada entre sistemas, es necesario construir explícitamente expresiones integrales covariantes para la energía y el ímpetu electromagnéticos, de las cuales son casos especiales las formas [12.106], válidas en un solo sistema de referencia. Esto se discute más ampliamente en el capítulo 17 en relación con el problema electromagnético clásico de la autoenergía. Para un tratamiento explícitamente covariante de las leyes de conservación en forma integral, véase ROHRLICH, sección 4-9.

b) *Tensor de tensiones simétrico*

El tensor de tensiones canónico $T^{\alpha\beta}$, aunque adecuado hasta aquí, presenta una serie de deficiencias. Ya hemos visto que T^{00} y T^{0i} difieren de las expresiones habituales de las densidades de energía e ímpetu. Otro inconveniente es la falta de simetría, véase T^{0i} y T^{i0} en [12.105]. La cuestión de la simetría surge cuando se considera el momento cinético del campo:

$$\boldsymbol{L} = \epsilon_0 \int \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})\, d^3x$$

La densidad de momento cinético tiene una generalización covariante en función del tensor de tercer orden:

$$M^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta}x^{\gamma} - T^{\alpha\gamma}x^{\beta} \qquad [12.109]$$

Entonces, al igual que [12.107] implica [12.108], la anulación de la 4-divergencia:

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0 \qquad [12.110]$$

implica la conservación del momento cinético total del campo. Calculando directamente [12.110] se obtiene:

$$0 = (\partial_\alpha T^{\alpha\beta})x^{\gamma} + T^{\gamma\beta} - (\partial_\alpha T^{\alpha\gamma})x^{\beta} - T^{\beta\gamma}$$

Como [12.107] elimina los términos primero y tercero, vemos que la conservación del momento cinético requiere que $T^{\alpha\beta}$ sea simétrico. Como dos críticas finales a $T^{\alpha\beta}$ dado por [12.104] tenemos, que contiene explícitamente los potenciales y, por tanto, no es invariante frente a una transformación de contraste, y que su traza $(T_\alpha{}^\alpha)$ no es cero, como requiere que los fotones no tengan masa.

Existe un procedimiento general para construir un tensor $\Theta^{\alpha\beta}$ que sea simétrico, de traza nula e invariante en una transformación de contraste, a partir del tensor de tensiones canónico $T^{\alpha\beta}$ (véanse las referencias al final del capítulo). Para el tensor electromagnético $T^{\alpha\beta}$ de [12.104] procederemos de forma directa. Sustituimos $\partial^\beta A^\lambda = -F^{\lambda\beta} + \partial^\lambda A^\beta$ y obtenemos:

$$T^{\alpha\beta} = \epsilon_0 c^2 \left[g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] - \epsilon_0 c^2 g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\lambda A^\beta \qquad [12.111]$$

Los primeros términos de [12.111] son simétricos en α y β e invariantes en una transformación de contraste. Con la ayuda de las ecuaciones de Maxwell

sin fuentes, el último término puede escribirse:

$$\begin{aligned} T_D^{\alpha\beta} &\equiv -\epsilon_0 c^2 g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\lambda A^\beta = \epsilon_0 c^2 F^{\lambda\alpha} \partial_\lambda A^\beta \\ &= \epsilon_0 c^2 (F^{\lambda\alpha} \partial_\lambda A^\beta + A^\beta \partial_\lambda F^{\lambda\alpha}) \\ &= \epsilon_0 c^2 \partial_\lambda (F^{\lambda\alpha} A^\beta) \end{aligned} \qquad [12.112]$$

Es fácil verificar que el tensor $T_D^{\alpha\beta}$ tiene las propiedades siguientes:

$$\text{(I)} \qquad \partial_\alpha T_D^{\alpha\beta} = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \int T_D^{0\beta}\, d^3x = 0$$

Por consiguiente, la ley de conservación en forma diferencial [12.107] se cumplirá para la diferencia $(T^{\alpha\beta} - T_D^{\alpha\beta})$ si se cumple para $T^{\alpha\beta}$. Además, las relaciones integrales [12.106] para la energía y el ímpetu totales de los campos serán también válidas en función del tensor diferencia. Quedamos, pues, en libertad de definir el *tensor de tensiones simétrico* $\Theta^{\alpha\beta}$:

$$\Theta^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - T_D^{\alpha\beta}$$

o bien:

$$\Theta^{\alpha\beta} = \epsilon_0 c^2 \left(g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \right) \qquad [12.113]$$

Desarrollando explícitamente los cálculos resultan las componentes siguientes:

$$\begin{aligned} \Theta^{00} &= \frac{\epsilon_0}{2} (\boldsymbol{E}^2 + c^2 \boldsymbol{B}^2) \\ \Theta^{0i} &= \epsilon_0 c (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})_i \\ \Theta^{ij} &= -\epsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + c^2 B^2) \right] \end{aligned} \qquad [12.114]$$

Los índices i y j se refieren a las componentes cartesianas en el espacio tridimensional. El tensor $\Theta^{\alpha\beta}$ puede escribirse en forma matricial abreviada como sigue:

$$\Theta^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} u & cg \\ \hline cg & -T_{ij}^{(M)} \end{array} \right) \qquad [12.115]$$

En esta forma [12.115] las componentes tiempo-tiempo y tiempo-espacio aparecen expresadas como las densidades de energía e ímpetu [6.106] y [6.118], mientras que las componentes espacio-espacio [12.114] se ve que son precisamente el tensor de tensiones de Maxwell [6.120] cambiado de signo, que aquí hemos designado como $T_{ij}^{(M)}$ para evitar confusiones con el tensor canónico $T^{\alpha\beta}$. Las diferentes formas del tensor de tensiones, covariantes y mixtas, son

$$\Theta_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} u & -cg \\ \hline -cg & -T_{ij}^{(M)} \end{array} \right) \quad \Theta_\beta^\alpha = \left(\begin{array}{c|c} u & -cg \\ \hline cg & T_{ij}^{(M)} \end{array} \right) \quad \Theta_\alpha^\beta = \left(\begin{array}{c|c} u & cg \\ \hline -cg & T_{ij}^{(M)} \end{array} \right)$$

La ley de conservación en forma diferencial:

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = 0 \qquad [12.116]$$

engloba el teorema de Poynting y la conservación del ímpetu para los campos libres. Por ejemplo, con $\beta=0$ tenemos:

$$0=\partial_\alpha\Theta^{\alpha 0}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{dt}+\nabla\cdot S\right)$$

en la que $S=c^2g$ es el vector de Poynting. Esta es la forma de [6.108] correspondiente al caso en que no existan fuentes. Análogamente, para $\beta=i$

$$0=\partial_\alpha\Theta^{\alpha i}=\frac{\partial g_i}{\partial t}-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}T_{ij}^{(M)}$$

que es un resultado equivalente a [6.121] en ausencia de fuentes. La conservación del momento cinético del campo, definido mediante el tensor

$$M^{\alpha\beta\gamma}=\Theta^{\alpha\beta}x^\gamma-\Theta^{\alpha\gamma}x^\beta \qquad [12.117]$$

queda asegurada, como ya hemos comentado, por [12.116] y la simetría de $\Theta^{\alpha\beta}$. Evidentemente, hay otras magnitudes que se conservan además de la energía, el ímpetu y el momento cinético. El tensor $M^{\alpha\beta\gamma}$ tiene tres componentes tiempo-espacio además de las componentes espacio-espacio que representan la densidad de momento cinético. Estas tres componentes son un subproducto necesario de la generalización covariante del momento cinético y su conservación constituye un enunciado acerca del movimiento del centro de masas (véase el problema 12.16).

c) *Leyes de conservación para el campo electromagnético en interacción con partículas cargadas*

En presencia de fuentes externas el lagrangiano para las ecuaciones de Maxwell es [12.85]. El tensor de tensiones simétrico para el campo electromagnético mantiene su forma [12.113], pero el acoplamiento a la fuente constituida por la corriente hace que su divergencia ya no sea nula. El cálculo de la divergencia resulta inmediato:

$$\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta}=\epsilon_0c^2\left[\partial^\mu(F_{\mu\lambda}F^{\lambda\beta})+\frac{1}{4}\partial^\beta(F_{\mu\lambda}F^{\mu\lambda})\right]$$

$$=\epsilon_0c^2\left[(\partial^\mu F_{\mu\lambda})F^{\lambda\beta}+F_{\mu\lambda}\partial^\mu F^{\lambda\beta}+\frac{1}{2}F_{\mu\lambda}\partial^\beta F^{\mu\lambda}\right]$$

El primer término puede transformarse mediante las ecuaciones de Maxwell no homogéneas [12.89]. Pasando este término al primer miembro, tenemos:

$$\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta}+F^{\beta\lambda}J_\lambda=\epsilon_0c^2F_{\mu\lambda}(\partial^\mu F^{\lambda\beta}+\underline{\partial^\mu F^{\lambda\beta}+\partial^\beta F^{\mu\lambda}})$$

La razón para realizar esta agrupación particular de términos es que la suma que hemos subrayado puede ser sustituida, en virtud de la ecuación de Maxwell homogénea ($\partial^\mu F^{\lambda\beta}+\partial^\beta F^{\mu\lambda}+\partial^\lambda F^{\beta\mu}=0$) por $-\partial^\lambda F^{\beta\mu}=+\partial^\lambda F^{\mu\beta}$. Así, obtenemos:

$$\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta}+F^{\beta\lambda}J_\lambda=\epsilon_0c^2F_{\mu\lambda}(\partial^\mu F^{\lambda\beta}+\partial^\lambda F^{\mu\beta})$$

pero ahora el segundo miembro es la contracción (en μ y λ) de un factor simétrico y otro antisimétrico. El resultado, por consiguiente, es cero. Así, pues, la divergencia del tensor de tensiones es cero:

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = -F^{\beta\lambda} J_\lambda \qquad [12.118]$$

Las componentes espacial y temporal de esta ecuación son:

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{S}\right) = -\frac{1}{c}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} \qquad [12.119]$$

y

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^{(M)} = -[\rho E_i + (\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})_i] \qquad [12.120]$$

Que son precisamente las ecuaciones de conservación de la energía y del ímpetu del capítulo 6 para campos electromagnéticos en interacción con fuentes descritas mediante $J^\alpha = (c\rho, \boldsymbol{J})$. El 4-vector del segundo miembro de [12.118] se denomina *densidad de fuerza de Lorentz*:

$$f^\beta \equiv F^{\beta\lambda} J_\lambda = \left(\frac{1}{c}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E},\ \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\right) \qquad [12.121]$$

Si las fuentes consisten en un cierto número de partículas cargadas, la integral de volumen de f^β conduce mediante la ecuación de la fuerza de Lorentz [12.1] a la velocidad de cambio con el tiempo de la suma de las energías o de los ímpetus de todas las partículas:

$$\int f^\beta \, d^3x = \frac{dP^\beta_{\text{partículas}}}{dt}$$

Teniendo en cuenta lo expresado al final de la subsección *a)* referente a la covariancia, la integral del primer miembro de [12.118] extendida al espacio tridimensional en un instante fijo de tiempo es la velocidad de cambio de la energía y el ímpetu totales del campo. Por tanto, tenemos la conservación del 4-vector ímpetu del sistema combinado de partículas y campos:

$$\int d^3x \, (\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} + f^\beta) = \frac{d}{dt}\,(P^\beta_{\text{campo}} + P^\beta_{\text{partículas}}) = 0 \qquad [12.122]$$

La discusión anterior se ha centrado sobre el campo electromagnético, en tanto que las partículas sólo se han mencionado como fuentes de la 4-densidad de corriente. Un tratamiento más equitativo implica que el lagrangiano de un sistema combinado de partículas y campos tenga tres términos, un lagrangiano del campo, un lagrangiano de las partículas libres y un lagrangiano de interacción que comprende grados de libertad tanto de las partículas como del campo. La variación de la integral de acción respecto a las coordenadas de las partículas conduce a la ecuación de la fuerza de Lorentz, al igual que en la sección 12.1, mientras que la variación respecto a las «coordenadas» del campo da las ecuaciones de Maxwell, como en la sección 12.8. Sin embargo, cuan-

do se incluyen efectos de autoenergía y de reacción de radiación el tratamiento ya no es tan completamente directo. Al final del capítulo se dan referencias sobre estos aspectos.

Debería también hacerse mención del método basado en la acción a distancia asociado a los nombres de SCHWARZCHILD, TETRODE y FOKKER. En él se insiste sobre las partículas cargadas y se postula un principio invariante de acción en el que el término de interacción comprende integrales extendidas a las líneas de universo de todas las partículas. Los conceptos de campos electromagnéticos y ecuaciones de Maxwell son secundarios. Este método constituye la base de la teoría de radiación de absorbentes de Wheeler-Feynman *.

12.11. SOLUCION DE LA ECUACION DE ONDAS EN FORMA COVARIANTE. FUNCIONES DE GREEN INVARIANTES

El campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$ que se origina en una fuente externa $J^{\alpha}(x)$ satisface las ecuaciones de Maxwell no homogéneas:

$$\partial_{\alpha}F^{\alpha\beta}=\mu_0 J^{\beta}$$

Definiendo los campos en función de los potenciales esta expresión se convierte en:

$$\Box A^{\beta}-\partial^{\beta}(\partial_{\alpha}A^{\alpha})=\mu_0 J^{\beta}$$

Si los potenciales satisfacen la condición de Lorentz, $\partial^{\alpha}A^{\alpha}=0$, entonces son soluciones de la ecuación de ondas cuadridimensional:

$$\Box A^{\beta}=\mu_0 J^{\beta}(x) \qquad [12.123]$$

La solución de [12.123] puede conseguirse hallando una función de Green $D(x, x')$ para la ecuación:

$$\Box_x D(x, x')=\delta^{(4)}(x-x') \qquad [12.124]$$

en la que $\delta^{(4)}(x-x')=\delta(x_0-x_0')\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ es una función delta cuadridimensional. En ausencia de superficies límite, la función de Green sólo puede depender del 4-vector diferencia $z^{\alpha}=x^{\alpha}-x'^{\alpha}$. Por tanto, $D(x, x')=D(x-x')=D(z)$ y la ecuación [12.124] se convierte en:

$$\Box_z D(z)=\delta^{(4)}(z)$$

Para pasar del espacio de coordenadas al de números de ondas empleamos integrales de Fourier. La transformada de Fourier $\tilde{D}(k)$ de la función de Green se define por medio de

$$D(z)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\tilde{D}(k)e^{-ik\cdot z} \qquad [12.125]$$

* J. A. WHEELER y R. P. FEYNMAN, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 425 (1949).

siendo $k \cdot z = k_0 z_0 - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{z}$. Como la representación de la función delta es:

$$\delta^{(4)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, e^{-ik \cdot z} \qquad [12.126]$$

se encuentra que en el espacio k la función de Green es:

$$\tilde{D}(k) = -\frac{1}{k \cdot k} \qquad [12.127]$$

Por tanto, la función de Green $D(z)$ es:

$$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{-ik \cdot z}}{k \cdot k} \qquad [12.128]$$

La expresión [12.128] es ambigua, porque el integrando es singular, y sólo se le da un significado definido si se manejan adecuadamente las singularidades. Vamos a proceder en primer lugar a realizar la integración en dk_0. De este modo:

$$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \, e^{i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \, \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2} \qquad [12.129]$$

en la que hemos introducido la notación $\kappa = |\boldsymbol{k}|$. A la integral en k_0 se le da sentido considerando k_0 como variable compleja y tratándola como una integral de contorno en el plano k_0. Como se indica en la figura 12.8, el integrando tiene dos polos simples en $k_0 = \pm\kappa$. Escogiendo contornos de integración diferentes respecto a los polos se obtienen funciones de Green con comportamientos diferentes. En la figura 12.8 se han denominado r y a dos posibles

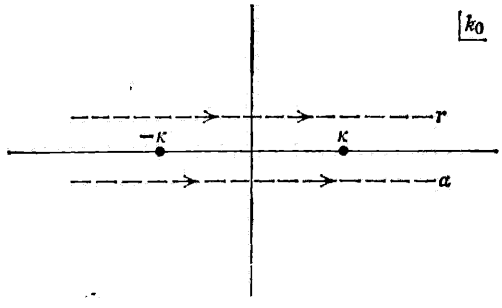


FIG. 12.8.

contornos. Estos caminos abiertos pueden cerrarse en el infinito mediante semicírculos en el semiplano superior o en el semiplano inferior, según el signo que tenga z_0 en la exponencial. Cuando $z_0 > 0$, la exponencial $e^{-ik_0 z_0}$ crece sin límite en el semiplano superior. Para poder emplear el teorema de los residuos debemos cerrar el contorno en el semiplano inferior. Cuando $z_0 < 0$, se cumple lo contrario.

Considérese ahora el contorno r. Cuando $z_0 < 0$, la integral resultante se

anula debido a que el contorno se cierra en el semiplano superior y no encierra ninguna singularidad. Para $z_0 > 0$, la integral en k_0 es:

$$\oint_r dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2} = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2}\right)$$

$$= -\frac{2\pi}{\kappa} \operatorname{sen}(kz_0)$$

Entonces, la función de Green [12.129] es:

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3k\, e^{ik\cdot z} \frac{\operatorname{sen}(\kappa z_0)}{\kappa}$$

La integración extendida a los ángulos de $\boldsymbol{k}$ conduce a:

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{2\pi^2 R} \int_0^\infty d\kappa \operatorname{sen}(\kappa R) \operatorname{sen}(\kappa z_0) \qquad [12.130]$$

siendo $R = |\boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$ la distancia espacial entre x^α y x'^α. Haciendo algunas transformaciones trigonométricas y un cambio de variable la ecuación [12.130] puede escribirse:

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{2\pi^2 R} \int_{-\infty}^\infty d\kappa \left[e^{i(z_0 - R)\kappa} - e^{i(z_0 + R)\kappa}\right]$$

Las integrales restantes son precisamente funciones delta de Dirac. Como $z_0 > 0$ y $R > 0$, la segunda integral es siempre cero. La función de Green para el contorno r es, pues:

$$D_r(x - x') = \frac{\theta(x_0 - x_0')}{4\pi R} \delta(x_0 - x_0' - R) \qquad [12.131]$$

En la que hemos reintroducido las variables originales x y x'. Esta función de Green se denomina *retardada o causal,* debido a que el instante del punto-fuente x_0' es siempre anterior al instante del punto-observación x_0. La ecuación [12.131], o su transformada de Fourier con respecto a x_0, $(4\pi R)^{-1} e^{i\omega R/c}$ es la familiar función de Green de las ondas radiales del capítulo 6.

Cuando se elige el contorno a de la figura 12.8, un cálculo exactamente paralelo conduce a la *función de Green avanzada*:

$$D_a(x - x') = \frac{\theta[-(x_0 - x_0')]}{4\pi R} \delta(x_0 - x_0' + R) \qquad [12.132]$$

Estas funciones de Green pueden ponerse en forma covariante utilizando la siguiente identidad:

$$\delta[(x - x')^2] = \delta[(x_0 - x_0')^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2] = \delta[(x_0 - x_0' - R)(x_0 - x_0' + R)]$$

$$= \frac{1}{2R} [\delta(x_0 - x_0' - R) + \delta(x_0 - x_0' + R)]$$

Entonces, como las funciones theta seleccionan uno u otro de los dos términos, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} D_r(x-x') &= \frac{1}{2\pi}\,\theta(x_0-x_0')\delta[(x-x')^2] \\ D_a(x-x') &= \frac{1}{2\pi}\,\theta(x_0'-x_0)\delta[(x-x')^2] \end{aligned}\right\} \qquad [12.133]$$

Las funciones theta, que aparentemente no son invariantes, son en realidad invariantes en las transformaciones de Lorentz propias cuando están ligadas por las funciones delta. Así, [12.133] da a las funciones de Green una expresión invariante explícitamente. Las funciones theta y delta en [12.133] demuestran que la función de Green retardada, o avanzada, es distinta de cero sólo en el cono de luz futuro, o pasado, respectivamente, del punto fuente.

La solución de la ecuación de ondas [12.123] puede expresarse ahora en términos de las funciones de Green:

$$A^\alpha(x) = A^\alpha_{\text{in}}(x) + \mu_0 \int d^4x'\, D_r(x-x')J^\alpha(x') \qquad [12.134]$$

$$A^\alpha(x) = A^\alpha_{\text{sal}}(x) + \mu_0 \int d^4x'\, D_a(x-x')J^\alpha(x') \qquad [12.135]$$

siendo A^α_{in} y A^α_{sal} soluciones de la ecuación de ondas homogénea. En [12.134] se emplea la función de Green retardada. En el límite $x_0 \to \infty$, se anula la integral extendida a las fuentes, suponiendo que estas fuentes están localizadas en el espacio y en el tiempo, debido al carácter retardado de la función de Green. Vemos que el potencial del campo libre $A^\alpha_{\text{in}}(x)$ admite la interpretación de un potencial «incidente» o «entrante», dado para $x_0 \to -\infty$. Análogamente, en [12.135] que contiene la función de Green avanzada, la solución homogénea $A^\alpha_{\text{sal}}(x)$ es el potencial asintótico «saliente», dado para $x_0 \to +\infty$. Los *campos de radiación* se definen como la diferencia entre los campos «saliente» y «entrante». Su 4-vector potencial es:

$$A^\alpha_{\text{rad}}(x) = A^\alpha_{\text{sal}} - A^\alpha_{\text{in}} = \mu_0 \int d^4x'\, D(x-x')J^\alpha(x') \qquad [12.136]$$

siendo:

$$D(z) = D_r(z) - D_a(z) \qquad [12.137]$$

la diferencia entre las funciones de Green avanzada y retardada.

En el capítulo 14 nos interesaremos en los campos de una partícula cargada que se mueva a lo largo de una trayectoria determinada. Si la partícula es una carga puntual e cuya posición en el sistema inercial K es $\boldsymbol{r}(t)$, su densidad de carga y su densidad de corriente en este sistema son:

$$\left.\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x}, t) &= e\delta[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t)] \\ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) &= e\boldsymbol{v}(t)\delta[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t)] \end{aligned}\right\} \qquad [12.138]$$

siendo $\boldsymbol{v}(t) = d\boldsymbol{r}(t)/dt$ la velocidad de la carga en el sistema K. Las densidades de carga y corriente pueden escribirse en forma manifiestamente covariante como un 4-vector densidad de corriente introduciendo el 4-vector posición de

la carga $r^\alpha(\tau)$ como función del tiempo propio de la carga τ e integrando a lo largo del tiempo propio con una función delta adicional apropiada. Así:

$$J^\alpha(x) = ec \int d\tau\, U^\alpha(\tau)\delta^{(4)}[x - r(\tau)] \qquad [12.139]$$

en la que U^α es la 4-velocidad de la carga. En el sistema inercial K, $r^\alpha = [ct, \mathbf{r}(t)]$ y $U^\alpha = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$. En la sección 14.1 se presenta cómo se utilizan [12.139] y [12.134] para deducir los potenciales y campos de una carga en movimiento.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

El formalismo de Lagrange y Hamilton para partículas relativistas cargadas se trata es todos los libros modernos sobre mecánica, así como en los libros de electrodinámica. Resultan útiles las referencias:

BARUT, capítulo II.
CORBEN y STEHLE, cap. 16.
GOLDSTEIN, cap. 6.
LANDAU y LIFSHITZ, *Teoría clásica de campos*, caps. 2 y 3.

El movimiento de partículas cargadas en campos electromagnéticos externos, especialmente campos magnéticos no homogéneos, es un asunto de importancia cada vez mayor en geofísica, física solar e investigación termonuclear. La referencia clásica para estos problemas es

ALFVÉN y FÄLTHAMMAR,

pero los resultados fundamentales aparecen también en:

CHANDRASEKHAR, caps. 2 y 3.
CLEMMOW y DOUGHERTY, cap. 4.
LINHART, cap. 1.
SPITZER, cap. 1.

El libro de

ROSSI y OLBERT

cubre el movimiento de partículas cargadas en los campos de la Tierra y el Sol. El tema de los invariantes adiabáticos lo trata ampliamente

NORTHROP.

Otra aplicación importante de la dinámica de partículas relativistas cargadas es a los aceleradores de alta energía. Se hallará una introducción a los problemas físicos en este campo en

CORBEN y STEHLE, cap. 17.

Pueden encontrarse algunos de los aspectos prácticos, así como la física básica de los aceleradores, en

LIVINGSTONE y BLEWETT,
PERSICO, FERRARI y SEGRE.

El lagrangiano de Darwin [12.82] ha sido invocado como herramienta útil para la decripción de las oscilaciones de baja frecuencia en plasmas por

A. N. KAUFMAN y P. S. ROSTLER, *Physics of Fluids*, **14**, 446 (1971).

Se ha utilizado también en un interesante artículo de

S. COLEMAN y J. H. VAN VLECK, *Phys. Rev.*, **171**, 1370 (1968),

para resolver una paradoja en la conservación del ímpetu y la tercera ley de Newton.

El tema de la descripción lagrangiana del campo se trata en

BARUT, cap. III,
CORBEN y STEHLE, cap. 15,
GOLDSTEIN, cap. 11,
SCHWARTZ, cap. 6,
WENTZEL, cap. 1.

La construcción general del tensor de tensiones simétrico, invariante en una transformación de contraste $\Theta^{\alpha\beta}$ a partir de $T^{\alpha\beta}$ se describe en

WENTZEL, apéndice,
LANDAU y LIFSHITZ, *Teoría clásica de campos*, secciones 32 y 94.

Las cuestiones particulares de la interacción entre partículas cargadas y campos electromagnéticos y las leyes de conservación asociadas quedan cubiertos en

BARUT, caps. IV y V,
LANDAU y LIFSHITZ, *Teoría clásica de campos*, cap. 4,
SCHWARTZ, cap. 7,

y de una forma especialmente completa en

ROHRLICH,

que trata los aspectos de autoenergía y reacción de radiación con detalle. Para una discusión cuidadosa sobre la energía, ímpetu y masa de los campos electromagnéticos, consúltese el libro de ROHRLICH que acabamos de citar y también

F. ROHRLICH, *Am. J. Phys.*, **38**, 1310 (1970).

Las funciones de Green invariantes para la ecuación de ondas se deducen en casi todos los libros sobre teoría cuántica de campos. Uno de tales libros, con un tratamiento covariante conciso de la electrodinámica clásica en su inicio, es

THIRRING, sección I.2 y apéndice III.

Dos revisiones sobre el tema de la masa del fotón, ya citadas en la introducción, son:

A. S. GOLDHABER y M. M. NIETO, *Rev. Mod. Phys.*, **43**, 277 (1971),
I. YU. KOBZAREV y L. B. OKUN', *Uspekhi Fiz. Nauk.*, **95**, 131 (1968) [traducción al inglés, *Sov. Phys. Uspekhi*, **11**, 338 (1968)].

PROBLEMAS

12.1. *a)* Demuéstrese que el lagrangiano invariante de Lorentz:

$$L = -\tfrac{1}{2}mU_\alpha U^\alpha - qU_\alpha A^\alpha$$

da las ecuaciones de movimiento relativista correctas para una partícula de masa m y carga q en interacción con un campo externo descrito mediante el 4-vector potencial $A^\alpha(x)$.

b) Defínanse los ímpetus canónicos y exprésese el hamiltoniano efectivo en forma espacio-temporal e invariante. El hamiltoniano efectivo es invariante de Lorentz. ¿Cuál es su valor?

12.2. *a)* Partiendo del principio de Hamilton, demuéstrese que los lagrangianos que difieren solamente en la derivada total respecto del tiempo de alguna función de las coordenadas y del tiempo, son equivalentes en el sentido de que conducen a las mismas ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

b) Demuéstrese de forma explícita que la transformación de contraste $A^\alpha \to A^\alpha + (\partial^\alpha \Lambda / \partial x_\beta)$ de los potenciales en el lagrangiano de una partícula cargada [12.9] da lugar a otro lagrangiano equivalente.

12.3. Una partícula interacciona con un potencial externo que es *escalar de Lorentz.*

a) Empléense la invariancia de Lorentz de la acción y las hipótesis usuales de invariancia traslacional y rotacional para demostrar que el lagrangiano relativista L debe ser de la forma [12.34], a saber, el lagrangiano de una partícula libre multiplicado por una función de x escalar de Lorentz.

b) Demuéstrese que si la partícula se mueve en forma no relativista en el sistema K' la fuerza de este sistema es aproximadamente $\boldsymbol{F}' = g\boldsymbol{E}'_{\text{ef}}$, siendo $\boldsymbol{E}'_{\text{ef}} = -\nabla'\phi$, y demuéstrese que en el sistema K hay como consecuencia una fuerza seudomagnética, $g(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}_{\text{ef}})$ siendo $\boldsymbol{B}_{\text{ef}} = (\gamma_v/c^2)\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}'_{\text{ef}}$.

c) Sin embargo, demuéstrese sustituyendo explícitamente y transformando $\partial^\alpha \phi(x)$ que la ecuación de la fuerza [12.36] calculada en K' conduce mediante las ecuaciones de transformación [12.32] para la fuerza a la misma ecuación [12.36] en el sistema K.

12.4. Una partícula de masa m y carga e se mueve en presencia de un campo eléctrico estático y uniforme $\boldsymbol{E}_0$.

a) Suponiendo que la velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$ era perpendicular al campo eléctrico, calcúlese la velocidad y posición de la partícula de forma explícita en función del tiempo.

b) Elimínese el tiempo, con lo que se obtendrá la trayectoria de la partícula en el espacio. Discútase la forma de la trayectoria para tiempos cortos y largos. (Defínanse tiempos «cortos» y «largos».)

12.5. Se desea construir un selector de velocidad $E \times B$ con campos eléctrico y magnético, combinados, estáticos y uniformes, sobre una longitud L. Si las anchuras de las rendijas de entrada y salida son Δx, discútase el intervalo de velocidades Δu alrededor del valor medio $u = E/B$, que es transmitido por el dispositivo en función de la masa, el ímpetu o la energía de las partículas incidentes, las intensidades de los campos, la longitud del selector y cualesquiera otras variables significativas. Despréciense los efectos de borde en los extremos. Báse se la discusión en la situación práctica de que sea L unos pocos metros, $E_{\text{máx}} \sim 3 \times 10^6$ volts/m, $\Delta x \sim 10^{-3}$ a 10^{-4} m, $u \sim 0{,}5c$ a $0{,}995c$. (Resulta instructivo considerar la ecuación de movimiento en un sistema que se mueve a la velocidad media u según la dirección del haz, así como respecto al laboratorio.) Referencias: C. A. COMBES y otros, *Phys. Rev.*, **112**, 1303 (1958); P. EBERHARD, M. L. GOOD y H. K. TICHO, *Rev. Sci. Inst.*, **31**, 1054 (1960).

12.6. Una partícula de masa m y carga e se mueve en el sistema del laboratorio en presencia de campos eléctrico y magnético cruzados, estáticos y uniformes. $\boldsymbol{E}$ es paralelo al eje x; $\boldsymbol{B}$ es paralelo al eje y.

a) Siendo $|\boldsymbol{E}| < c|\boldsymbol{B}|$, efectúese la transformación de Lorentz necesaria, descrita en la sección 12.4, para obtener de forma explícita las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula.

b) Repítase el cálculo de *a)*, cuando $|\boldsymbol{E}| > c|\boldsymbol{B}|$.

12.7. Campos, eléctrico $\boldsymbol{E}$ y magnético $\boldsymbol{B}$, estáticos y uniformes, forman un ángulo θ uno respecto del otro.

a) Mediante una elección adecuada de ejes, resuélvase la ecuación de fuerza que nos da el movimiento de la partícula de carga e y masa m en coordenadas cartesianas.

b) Demuéstrese que cuando $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son paralelos, eligiendo de forma apropiada las constantes de integración, etc., se puede expresar la solución en forma paramétrica

$$x=AR \operatorname{sen}\phi, \qquad y=AR\cos\phi, \qquad z=\frac{R}{\rho}\sqrt{1+A^2}\cosh(\rho\phi)$$

$$ct=\frac{R}{\rho}\sqrt{1+A^2}\operatorname{senh}(\rho\phi)$$

en donde $R=(mc/eB)$, $\rho=(E/cB)$, A es una constante arbitraria y ϕ es el parámetro (en nuestro caso, c/R veces el tiempo propio).

12.8. El campo magnético terrestre puede representarse de forma aproximada mediante un dipolo magnético de momento $M=8{,}1\cdot10^{22}$ Ampère-m^2. Considérese el movimiento de electrones energéticos en las proximidades de la Tierra sometidos a la acción de este campo dipolar (cinturones electrónicos de Van Allen).

a) Demuéstrese que la ecuación de una línea de fuerza magnética es $r=r_0\operatorname{sen}^2\theta$, en donde θ es el ángulo polar (colatitud) medido desde el eje del dipolo, y hállese una expresión del módulo de B a lo largo de una línea de fuerza cualquiera en función de θ.

b) Una partícula cargada positivamente gira alrededor de una línea de fuerza en el plano ecuatorial con un radio de giro a y a una distancia media del eje R ($a\ll R$). Demuéstrese que la posición acimutal de la partícula (longitud) varía de forma aproximadamente lineal con el tiempo de acuerdo con

$$\phi(t)=\phi_0+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2\omega_B(t-t_0)$$

en donde ω_B es la frecuencia de giro para el radio R.

c) Si, además del movimiento circular de *b)*, la partícula posee una pequeña componente de velocidad paralela a las líneas de fuerza, demuéstrese que experimenta pequeñas oscilaciones de θ alrededor de $\theta=\pi/2$ con una frecuencia $\Omega=(3/\sqrt{2})(a/R)\omega_B$. Hállese la variación de longitud por cada ciclo de oscilación en latitud.

d) En el caso de un electrón de 10 MeV situado a un radio medio $R=3\cdot10^9$ cm, hállense ω_B y a, y de este modo determínese cuánto tiempo emplea para desplazarse una vez alrededor de la Tierra y cuánto tiempo necesita para realizar un ciclo de oscilación en latitud. Calcúlense las mismas magnitudes para un electrón de 10 KeV con el mismo radio R.

12.9. Una partícula cargada se encuentra en un instante dado en el plano ecuatorial del campo magnético terrestre (supuesto dipolar) a una distancia R del centro de la Tierra. En dicho instante, su vector velocidad forma un ángulo α con el plano ecuatorial ($v_\parallel/v_\perp=\operatorname{tg}\alpha$). Suponiendo que la partícula describe espiras a lo largo de las líneas de fuerza con un radio de giro $a\ll R$, y que el flujo abarcado por la órbita es una constante del movimiento, hállese una ecuación que nos dé la latitud magnética máxima λ alcanzada por la partícula en función del ángulo α. Represéntese una gráfica (*no un esbozo* cualitativo) de λ frente a α. Indíquense paramétricamente a lo largo de la curva los valores de α para los cuales una partícula situada a un radio R en el plano ecuatorial golpeará la Tierra (de radio R_0) para $R/R_0=1{,}2,\ 1{,}5,\ 2{,}0,\ 2{,}5,\ 3,\ 4,\ 5$.

12.10. Considérese la precesión del spin de un muón, que inicialmente está polarizado longitudinalmente, a medida que el muón se mueve en una órbita circular en el plano perpendicular a un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B}$.

a) Demuéstrese que la diferencia Ω entre la frecuencia de precesión del spin y la frecuencia de giro orbital es:

$$\Omega=\frac{eBa}{m_\mu}$$

independientemente de la energía del muón, siendo $a=(g-2)/2$ la anomalía del momento magnético. (Hállense las ecuaciones de movimiento para las componentes del spin según direcciones mutuamente perpendiculares definidas por la velocidad de la partícula, el radio vector desde el centro de la circunferencia a la partícula y el campo magnético.)

b) Para el anillo de almacenamiento de muones del CERN (a que nos hemos referido en la sección 11.1, *c)*), el radio de la órbita es $R=2{,}5$ metros y $B=1{,}7$ Miriagauss. ¿Cuál es el ímpetu del muón? ¿Cuál es el factor de dilatación del tiempo γ? ¿Cuántos periodos de precesión $T=2\pi/\Omega$ tendrán lugar en la duración observada desde el laboratorio de la vida media de los muones? ($m_\mu=105{,}66$ MeV, $\tau_0=2{,}2\times10^{-6}$ s y $a\simeq\alpha/2\pi$).

c) Exprésese la frecuencia diferencia Ω tomando la frecuencia de rotación orbital como unidad y calcúlese cuántos periodos de precesión (a la frecuencia diferencia) tienen lugar en cada revolución para un muón de 300 MeV, para un electrón de 300 MeV y para un electrón de 5 GeV (este último valor es el típico de los anillos de almacenamiento de e^+e^- en Stanford y Hamburgo).

12.11. En la sección 11.11 se obtuvo la ecuación de movimiento BMT para el spin de una partícula de carga e y momento magnético con valor arbitrario del factor g.

a) Verifíquese que [11.171] es la ecuación correcta para la derivada temporal de la componente longitudinal del vector spin $\boldsymbol{s}$ en el sistema propio.

b) Sea $\hat{\boldsymbol{n}}$ un 3-vector unitario perpendicular a $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ y coplanar con $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ y $\boldsymbol{s}$ ($\hat{\boldsymbol{n}}$ en general depende del tiempo). Sea θ el ángulo entre $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ y $\boldsymbol{s}$. Demuéstrese que la velocidad de cambio de θ con el tiempo puede escribirse en la forma

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{e}{m}\left[\left(\frac{g}{2}-1\right)\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\hat{\boldsymbol{\beta}}\times\boldsymbol{B})+\left(\frac{g\beta}{2}-\frac{1}{\beta}\right)\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\frac{\boldsymbol{E}}{c}\right]$$

siendo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ los campos en el laboratorio y $c\boldsymbol{\beta}=c\beta\hat{\boldsymbol{\beta}}$ es la velocidad instantánea de la partícula en el laboratorio.

c) Cuando una partícula se mueve sin desviación a través de un selector de velocidad $E\times B$ y siendo $(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{\beta}})\cdot\boldsymbol{B}=B$, hállese $d\theta/dt$ en función de la velocidad de giro $eB/\gamma m$.

d) Definiendo los dos 4-vectores, $L^\alpha=(\gamma\beta,\gamma\hat{\boldsymbol{\beta}})$ y $N^\alpha=(0,\hat{\boldsymbol{n}})$, demuéstrese que $d\theta/d\tau$ puede escribirse en la forma cuasi-covariante:

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\frac{e}{m}\left[\frac{g}{2}L_\alpha-\frac{1}{v}U_\alpha\right]F^{\beta\alpha}N_\beta$$

siendo U^α la 4-velocidad de la partícula.

12.12. *a)* Particularícese el lagrangiano de Darwin [12.82] a la interacción entre dos partículas cargadas (m_1, q_1) y (m_2, q_2). Introdúzcanse las coordenadas reducidas de las partículas $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$, y las coordenadas respecto al centro de masas. Exprésese el lagrangiano en el sistema de referencia en el que se anula la velocidad del centro de masas y calcúlense las componentes del ímpetu canónico $p_x=\partial L/\partial v_x$, etc.

b) Calcúlese el hamiltoniano hasta el primer orden de aproximación en $1/c^2$ y demuéstrese que es

$$H=\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r}-\frac{p^4}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)+\frac{q_1q_2}{2m_1m_2c^2}\left(\frac{p^2+(\boldsymbol{p}\cdot\hat{r})^2}{r}\right)$$

Compárese con los distintos términos de [42.1] en la pág. 193 del BETHE y SALPETER (ob. cit.). Discútanse las concordancias y discrepancias.

12.13. Una densidad lagrangiana alternativa para el campo electromagnético es:

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2\mu_0}\partial_\alpha A_\beta\,\partial^\alpha A^\beta-J_\alpha A^\alpha$$

a) Dedúzcanse las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. ¿Son las ecuaciones de Maxwell? ¿Bajo qué hipótesis?

b) Demuéstrese en forma explícita, previa dilucidación de la hipótesis adecuada, que esta densidad lagrangiana difiere de [12.85] en una 4-divergencia. ¿Afecta esta 4-divergencia adicional a la acción o a las ecuaciones de movimiento?

12.14. Considérense las ecuaciones de Proca para una distribución de corriente localizada y estacionaria que sólo tiene momento magnético estático. Este modelo puede emplearse para estudiar los efectos observables de una masa del fotón no nula sobre el campo magnético terrestre. Nótese que si la imanación es $\mathcal{M}(\boldsymbol{x})$ la densidad de corriente puede escribirse $\boldsymbol{J}=\nabla\times\mathcal{M}$.

a) Demuéstrese que, si $\mathcal{M}=\boldsymbol{m}f(\boldsymbol{x})$, siendo $\boldsymbol{m}$ un vector fijo y $f(\boldsymbol{x})$ una función escalar localizada, el potencial vector es:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{m}\times\nabla\int f(\boldsymbol{x}')\frac{e^{-\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'$$

b) Si el dipolo magnético es un dipolo puntual en el origen, demuéstrese que el campo magnético es:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}[3\hat{r}(\hat{r}\cdot\boldsymbol{m})-\boldsymbol{m}]\left(1+\mu r+\frac{\mu^2r^2}{3}\right)\frac{e^{-\mu r}}{r^3}-\frac{2}{3}\mu^2\boldsymbol{m}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

c) El resultado de *b)* prueba que, para $r=R$ fijo (sobre la superficie de la Tierra), el campo magnético terrestre aparecerá como una distribución angular dipolar, más un campo magnético constante adicional (aparentemente un campo externo) antiparalelo a $\boldsymbol{m}$. Las observaciones superficiales y mediante satélites conducen a la conclusión de que este campo «externo» es menor de 4×10^{-3} veces el campo dipolar en el cuadro magnético. Estímese un límite inferior para μ^{-1} en radios terrestres y un límite superior para la masa del fotón en gramos a partir de este dato.

Este método estimativo de μ es debido a E. SCHRÖDINGER, *Proc. Roy. Irish Acad.*, **A49**, 135 (1943). Véase A. S. GOLDHABER y M. M. NIETO, *Phys. Rev. Letters*, **21**, 567 (1968).

12.15. Demuéstrese mediante el teorema de la divergencia en cuatro dimensiones o por cualquier otro método, que para campos electromagnéticos sin fuentes confinados en una pequeña región del espacio las integrales tridimensionales espaciales de Θ^{00} y Θ^{0i} se transforman como las componentes de un 4-vector, según requiere [12.106].

12.16. En una región localizada del espacio hay campos electromagnéticos sin fuentes. Considérense las diversas leyes de conservación que están contenidas en la integral de $\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma}=0$ extendida a todo el espacio, en la que $M^{\alpha\beta\gamma}$ está definido por [12.117].

a) Demuéstrese que cuando β y γ son ambos índices espaciales se deduce la conservación del momento cinético del campo.

b) Demuéstrese que cuando $\beta=0$ la ley de conservación es

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\frac{c^2\boldsymbol{P}_{em}}{E_{em}}$$

siendo $\boldsymbol{X}$ la posición del centro de masas de los campos electromagnéticos, definido por

$$\boldsymbol{X}\int u\,d^3x=\int \boldsymbol{x}u\,d^3x$$

siendo u la densidad de energía electromagnética y E_{em} y $\boldsymbol{P}_{em}$ la energía total y el ímpetu de los campos.

COLISIONES ENTRE PARTICULAS CARGADAS; PERDIDA DE ENERGIA Y DISPERSION

En el presente capítulo vamos a considerar colisiones entre partículas cargadas que se mueven rápidamente, insistiendo de forma especial en el intercambio energético entre las partículas que intervienen en la colisión y en las deflexiones producidas respecto a la dirección de incidencia. Una partícula cargada rápida que incide sobre la materia sufre colisones con los electrones atómicos y con los núcleos. Si la partícula es más pesada que un electrón (mesón μ o π, mesón K, protón, etc.), las colisiones con los electrones y con los núcleos tienen consecuencias distintas. Los electrones, por ser ligeros, pueden tomar cantidades apreciables de energía de la partícula incidente sin provocar desviaciones importantes, mientras que los núcleos, de gran masa, absorben muy poca energía; pero, a causa de su mayor carga, producen la dispersión de la partícula incidente. Así, pues, las pérdidas de energía de la partícula incidente tienen lugar casi por completo en los choques con los electrones. Por otra parte, las desviaciones de la partícula de la dirección de incidencia proceden fundamentalmente de colisiones esencialmente elásticas con los núcleos atómicos. La dispersión se halla confinada a ángulos bastante pequeños, de modo que una partícula pesada se mantiene en una trayectoria más o menos recta mientras va perdiendo energía hasta que se acerca al final de su alcance. Cuando las partículas incidentes son electrones, tienen lugar tanto pérdida de energía como dispersión en los choques con los electrones atómicos. Por consiguiente, la trayectoria es mucho menos rectilínea. Después de una distancia corta, los electrones tienden a difundirse en el material, en lugar de seguir una trayectoria rectilínea.

La dispersión y la pérdida de energía son temas importantes y se discuten en varios textos *, en los que se presentan tablas numéricas y gráficas. En consecuencia, nuestra discusión insistirá más en los conceptos físicos que en fórmulas numéricas exactas. Es más, para obtener resultados exactos se requiere un tratamiento mecanocuántico, aunque casi todos los aspectos fundamentales sean de origen clásico o semiclásico. El orden de magnitud de los efectos cuánticos se deduce fácilmente del principio de incertidumbre, como veremos a continuación.

Comenzaremos por considerar el problema simple de la transferencia de energía a un electrón libre por una partícula pesada rápida. A continuación se consideran los efectos de una fuerza de enlace sobre el electrón y se obtiene la fórmula clásica de Bohr para la pérdida de energía. Se describen las modificaciones cuánticas y los efectos de polarización del medio, seguidos por una

* Véanse las referencias al final del capítulo.

discusión del fenómeno íntimamente relacionado de la radiación de Cherenkov en materiales transparentes. Se considera brevemente la pérdida de energía en un plasma electrónico. Finalmente se presenta la dispersión elástica de partículas incidentes por los núcleos y la dispersión múltiple.

13.1. TRANSFERENCIA DE ENERGIA EN UNA COLISION DE COULOMB

Una partícula rápida de carga ze y masa M choca con un electrón en un átomo. Si la partícula se mueve rápidamente en comparación con la velocidad característica del electrón en su órbita, podemos tratar al electrón durante la colisión como libre e inicialmente en reposo. Supondremos como posterior aproximación que la transferencia de ímpetu Δp es suficientemente pequeña, de modo que la partícula incidente apenas se desvía de su trayectoria rectilínea, y además supondremos que el electrón no se mueve apreciablemente durante la colisión. Entonces, para hallar la transferencia de energía durante el choque, necesitamos solamente calcular el impulso causado por el campo eléctrico de la partícula incidente en la posición del electrón. El campo magnético de la partícula es de importancia despreciable si el electrón está prácticamente en reposo.

La figura 13.1 nos muestra la situación geométrica de la colisión. La partícula incidente tiene una velocidad v y una energía $E=\gamma mc^2$. Pasa frente al

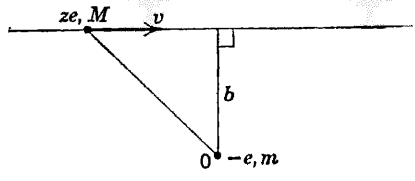


FIG. 13.1.

electrón de carga e y masa $m \ll M$ con un parámetro de impacto b. Los campos de la partícula incidente en la posición ocupada por el electrón vienen dados por [11.118] con $q=ze$. Unicamente el campo eléctrico transversal E_2 tiene una integral temporal no nula. Por tanto, el impulso de momento Δp tiene dirección transversal y su módulo es

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} eE_2(t)\,dt = \frac{2ze^2}{4\pi\epsilon_0 bv} \qquad [13.1]$$

Nótese que Δp es independiente de γ, como se discutió al final de la sección 11.10. La energía transferida al electrón es

$$\Delta E(b) = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{z^2e^4}{8\pi^2\epsilon_0^2 mv^2}\left(\frac{1}{b^2}\right) \qquad [13.2]$$

La desviación angular de la partícula incidente viene dada por $\theta \simeq \Delta p/p$, con

tal que $\Delta p \ll p$. Así, para pequeñas desviaciones,

$$\theta \simeq \frac{2ze^2}{4\pi\epsilon_0 pvb} \qquad [13.3]$$

Podemos comparar este resultado con la expresión exacta ya conocida que da la dispersión de Rutherford de una partícula no relativista de carga ze por un campo de fuerzas de Coulomb de carga $z'e$:

$$2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{2zz'e^2}{4\pi\epsilon_0 pvb} \qquad [13.4]$$

Vemos que ambas expresiones están de acuerdo para ángulos pequeños *.

La transferencia de energía $\Delta E(b)$ dada por [13.2] tiene varios aspectos interesantes. Depende solamente de la carga y velocidad de la partícula incidente, no de su masa. Varía inversamente con el cuadrado del parámetro de impacto, de modo que las colisiones próximas suponen transferencias de energía muy grandes. Por supuesto, hay un límite superior para la transferencia de energía, que es la que corresponde a una colisión frontal. Nuestro método de cálculo es válido realmente sólo para valores grandes de b. Podemos obtener un límite inferior $b_{\text{mín}}$ del parámetro de impacto para el que es válido nuestro cálculo aproximado, si igualamos [13.2] con el valor máximo permisible de la energía transferida [12.59] [véase problema 11.23, *b*)]:

$$\Delta E(b_{\text{mín}}) = \Delta E_{\text{máx}} = 2m\gamma^2 v^2 \qquad [13.5]$$

Esto nos da el límite inferior,

$$b_{\text{mín}} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m v^2} \qquad [13.6]$$

por debajo del cual nuestro resultado aproximado [13.2] debe reemplazarse por otra expresión más exacta que tienda a [13.5] cuando $b \to 0$. Puede demostrarse (problema 13.1) que el tratamiento adecuado da el resultado más exacto:

$$\Delta E(b) \simeq \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m v^2} \left(\frac{1}{b_{\text{mín}}^2 + b^2} \right) \qquad [13.7]$$

La ecuación [13.7] nos da el comportamiento límite adecuado cuando $b \to 0$ y se reduce a [13.2] para $b \gg b_{\text{mín}}$.

Se puede obtener el límite inferior de b mediante otro argumento. La ecuación [13.2] se dedujo suponiendo que el electrón no se movía apreciablemente durante el choque. Mientras la distancia d que en realidad recorre sea pequeña frente a b, deberemos esperar que [13.2] sea correcta. Podemos obtener una valoración de d si consideramos que $\Delta p/2m$ es un valor medio de la velocidad

* Se presenta una cuestión de sistema de referencia al comparar [13.3] y [13.4]. Como [13.4] se refiere a un centro de fuerzas fijo (o sistema CM), deberíamos compararlo con el resultado de la deflexión de un electrón ligero en el sistema en que la partícula incidente (pesada) está en reposo. Así, [13.3] con $p \simeq \gamma mv$, es válido como ímpetu del electrón en este sistema. El lector deberá comprobar que [13.3] y [13.4] son también compatibles en el sistema en que el electrón está en reposo, transformando los ángulos del sistema CM al sistema laboratorio.

del electrón durante el choque, y que el tiempo que dura la colisión viene dado por [11.153], $\Delta t \simeq b/\gamma v$. Por tanto, la distancia recorrida durante la colisión es del orden de

$$d \sim \frac{\Delta p}{2m} \times \Delta t = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m v^2} = b_{\text{mín}} \qquad [13.8]$$

Mientras sea $b \gg d$, [13.2] deberá ser válida. Es esta precisamente la condición que implica [13.7].

En el otro extremo de distancias muy grandes, el resultado aproximado [13.2] para $\Delta E(b)$ es incorrecto a causa del enlace de los electrones atómicos. Supusimos que los electrones eran libres mientras que de hecho están ligados a los átomos. Mientras el tiempo de colisión [11.153] sea pequeño en comparación con el periodo de movimiento orbital deberemos esperar que la colisión sea suficientemente brusca como para que el electrón pueda ser tratado como libre. Por otra parte, si la duración de la colisión es muy grande comparada con el periodo orbital, el electrón realizará muchos ciclos de su movimiento mientras la partícula pasa junto a él lentamente, y será influido de modo adiabático por los campos sin que haya transferencia neta de energía. La línea divisoria tiene lugar para el parámetro de impacto $b_{\text{máx}}$, en el cual el tiempo de colisión [11.153] y el periodo orbital resultan comparables. Si ω es una frecuencia de movimiento atómico característica, esta condición es:

$$\left.\begin{aligned} \Delta t(b_{\text{máx}}) &\sim \frac{1}{\omega} \\ \text{o} \qquad b_{\text{máx}} &= \frac{\gamma v}{\omega} \end{aligned}\right\} \qquad [13.9]$$

Para parámetros de impacto mayores que $b_{\text{máx}}$ es de esperar que la transferencia de energía sea menor que el valor [13.2], haciéndose rápidamente cero para $b \gg b_{\text{máx}}$.

El comportamiento general de $\Delta E(b)$ en función de b se representa en la figura 13.2. La curva punteada corresponde a la forma aproximada [13.2], mientras que el trazo continuo representa el resultado correcto. En el intervalo $b_{\text{mín}} < b < b_{\text{máx}}$ la transferencia de energía viene dada de forma aproximada por [13.2]. Pero para parámetros de impacto fuera de este intervalo, la transferencia de energía es considerablemente menor.

Una partícula rápida que pasa a través de la materia «ve» electrones a varias distancias de su trayectoria. Si hay N átomos por unidad de volumen con Z electrones por átomo, el número de electrones localizados de modo que su parámetro de impacto esté comprendido entre b y $(b+db)$ en un espesor de materia dx es:

$$dn = NZ\, 2\pi b\, db\, dx \qquad [13.10]$$

Para hallar la pérdida de energía de la partícula incidente por unidad de distancia, multiplicaremos [13.10] por la transferencia de energía e integraremos para todos los parámetros de impacto. Así, la pérdida de energía es:

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi NZ \int \Delta E(b) b\, db \qquad [13.11]$$

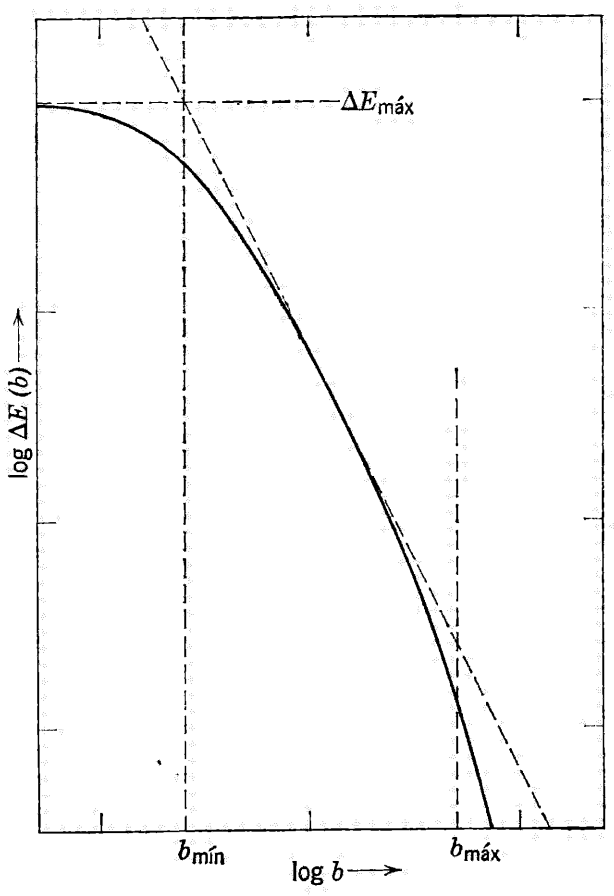


FIG. 13.2. Energía transferida en función del parámetro de impacto.

A la vista del comportamiento de $\Delta E(b)$ representado en la figura 13.2, podemos utilizar la aproximación [13.2] e integrar entre $b_{mín}$ y $b_{máx}$. Así tenemos el resultado

$$\frac{dE}{dx} \simeq \frac{NZ}{4\pi\epsilon_0^2}\frac{z^2e^4}{mv^2}\int_{b_{mín}}^{b_{máx}} \frac{1}{b^2}\, b\, db \qquad [13.12]$$

o

$$\frac{dE}{dx} \simeq \frac{NZ}{4\pi\epsilon_0^2}\frac{z^2e^4}{mv^2} \ln B \qquad [13.13]$$

en donde

$$B = \frac{b_{máx}}{b_{mín}} \simeq \frac{4\pi\epsilon_0^2\gamma^2 mv^3}{ze^2\omega} \qquad [13.14]$$

Esta expresión aproximada de la pérdida de energía presenta todos los aspectos esenciales del resultado clásico, debido a BOHR (1915). El modo de tratar el límite inferior de integración en [13.12] es completamente equivalente a utilizar [13.7] para expresar $\Delta E(b)$. El corte en $b = b_{máx}$ es solamente aproximado.

Por consiguiente, B es inseguro en un factor del orden de la unidad. Por aparecer B en el logaritmo, este factor es numéricamente de pequeña importancia y se puede despreciar. De todas formas, en la próxima sección se da un tratamiento adecuado de los efectos de enlace. La discusión de [13.13] como función de la energía y su comparación con la experiencia vamos a aplazarla hasta la sección 13.3.

13.2. TRANSFERENCIA DE ENERGIA A UNA CARGA ENLAZADA ARMONICAMENTE

Con el fin de justificar el valor plausible de $b_{máx}$ [13.9] que separa las colisiones coulombianas, cuando $b < b_{máx}$ en las que la transferencia de energía [13.2] es libre, de las colisiones prácticamente adiabáticas, cuando $b > b_{máx}$, en las que la transferencia de energía es despreciable, vamos a considerar el problema de la pérdida de energía de una partícula pesada cargada de carga ze y velocidad v que pasa frente a una carga enlazada armónicamente de masa m y carga $-e$. Esto nos servirá como modelo simplificado de la pérdida de energía de partículas que atraviesan la materia. Como antes, supondremos que la partícula pesada se desvía sólo muy ligeramente por causa de la colisión, de modo que su trayectoria será aproximadamente una línea recta. Además, pasa junto a la partícula enlazada con un parámetro de impacto b medido desde el origen O de la fuerza enlazante tal como se indica en la figura 13.3. Como

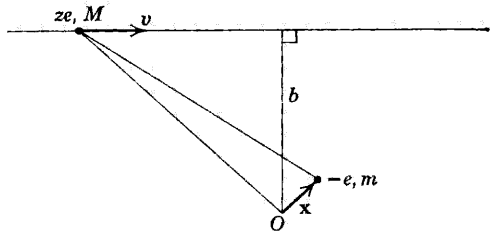


FIG. 13.3.

estamos interesados primordialmente en los parámetros de impacto grandes, cuando los efectos de enlace son importantes, podemos suponer que la transferencia de energía no es muy grande, que el movimiento de la partícula enlazada no es relativista durante la colisión y que las amplitudes de oscilación inicial y final alrededor del origen O son pequeñas frente a b. En estas condiciones solamente hay que incluir el campo eléctrico de la partícula incidente en la ecuación de fuerza. Más aún, podemos despreciar su variación en la posición de la partícula y podemos tomar como valor efectivo el que tiene en el origen. Por analogía con el problema correspondiente de absorción de radiación, se llama a veces a esto *aproximación dipolar.*

Con todas estas aproximaciones podemos expresar la ecuación de fuerza para la carga ligada armónicamente:

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m}E(t) \qquad [13.15]$$

en donde $\boldsymbol{E}(t)$ es el campo eléctrico en el punto O debido a la carga ze, cuyas componentes vienen dadas por [11.152]; ω_0 es la frecuencia característica del enlace, y Γ una constante de amortiguamiento pequeña. Este factor no es esencial, pero está presente al menos en cierto grado en los sistemas físicos reales y sirve para evitar ciertas ambigüedades que surgirían en su ausencia. Para resolver [13.15] efectuamos el análisis de Fourier de $\boldsymbol{E}(t)$ y $\boldsymbol{x}(t)$:

$$\boldsymbol{x}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{x}(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \qquad [13.16]$$

$$\boldsymbol{E}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \qquad [13.17]$$

Como $x(t)$ y $\boldsymbol{E}(t)$ son reales, y las partes positiva y negativa de la frecuencia de sus transformadas están relacionadas por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(-\omega)&=\boldsymbol{x}^*(\omega)\\ \boldsymbol{E}(-\omega)&=\boldsymbol{E}^*(\omega)\end{aligned} \qquad [13.18]$$

Sustituyendo las formas integrales de Fourier en la ecuación de fuerza, tenemos

$$\boldsymbol{x}(\omega)=-\frac{e}{m}\frac{\boldsymbol{E}(\omega)}{\omega_0^2-i\omega\Gamma-\omega^2} \qquad [13.19]$$

Conocida la forma de $\boldsymbol{E}(t)$, podemos determinar la amplitud de Fourier $\boldsymbol{E}(\omega)$. Entonces, podemos calcular $\boldsymbol{x}(t)$ a partir de [13.16], mediante [13.19]. Con tal que podamos efectuar las integraciones, el problema está resuelto.

Pero la magnitud que nos interesa de forma inmediata no es el movimiento detallado de la partícula enlazada, sino la transferencia de energía en la colisión. Esta puede calcularse considerando el trabajo efectuado por la partícula incidente sobre la enlazada. La velocidad con que se efectúa trabajo viene dada por

$$\frac{dE}{dt}=\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,d^3x' \qquad [13.20]$$

Así que el trabajo total efectuado por la partícula a su paso es

$$\Delta E=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int d^3x'\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} \qquad [13.21]$$

La densidad de corriente es $\boldsymbol{J}=-e\boldsymbol{v}\,\delta[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'(t)]$ para la carga enlazada. Por consiguiente,

$$\Delta E=-e\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}\,dt \qquad [13.22]$$

en donde $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}$, y en la aproximación dipolar $\boldsymbol{E}$ es el campo de la partícula incidente en el origen O. Usando las representaciones de Fourier [13.16] y [13.17], así como la expresión [2.46] para la función delta y las condiciones [13.18] de que sean reales, puede escribirse la energía en la forma:

$$\Delta E=2e\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty}i\omega\boldsymbol{x}(\omega)\cdot\boldsymbol{E}^*(\omega)\,d\omega \qquad [13.23]$$

Y si ahora sustituimos el resultado [13.19] para $x(\omega)$, se convierte en:

$$\Delta E = \frac{e^2}{m}\int_0^\infty |\boldsymbol{E}(\omega)|^2 \frac{2\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\,d\omega \qquad [13.24]$$

Para valores de Γ pequeños, el integrando es una función con un pico agudo alrededor de $\omega=\omega_0$ de forma aproximada a la de una línea de Lorentz. Por tanto, podemos aproximar el factor en que aparece el campo eléctrico poniendo su valor aproximado en $\omega=\omega_0$. Así, [13.24] se transforma en

$$\Delta E = \frac{2e^2}{m}|\boldsymbol{E}(\omega_0)|^2\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\left[\frac{\omega_0^2}{\Gamma^2}-x^2\right]^2+x^2} \qquad [13.25]$$

La integral tiene el valor $\pi/2$, independientemente de ω_0/Γ. Así, la transferencia de energía es

$$\Delta E = \frac{\pi e^2}{m}|\boldsymbol{E}(\omega_0)|^2 \qquad [13.26]$$

La ecuación [13.26] es un resultado muy general: la transferencia de energía a un oscilador no relativista por un campo electromagnético externo. En nuestro caso, el campo se debe a la partícula cargada que pasa. Pero igualmente hubiera servido un impulso de radiación o cualquier combinación de campos externos.

Para una partícula de carga ze que pasa junto al origen O con un parámetro de impacto b, a una velocidd v, los campos electromagnéticos en el origen vienen dados por [11.152] con $q=ze$. A fin de ilustrar la determinación de la transformada de Fourier [13.17], vamos a considerar $E_2(t)$. Su transformada $E_2(\omega)$ se define:

$$E_2(\omega) = \frac{zeb\gamma}{4\pi\epsilon_0\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}\,dt}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} \qquad [13.27]$$

Cambiando la variable de integración $x=\gamma vt/b$, [13.27] se expresa así:

$$E_2(\omega) = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0\sqrt{2\pi}bv}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega bx/\gamma v}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx \qquad [13.28]$$

Acudiendo a una tabla de transformadas de Fourier *, vemos que la integral es proporcional a una función de Bessel modificada de orden unidad (véase [3.101]). Así, pues,

$$E_2(\omega) = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 bv}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{\omega b}{\gamma v}K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\right] \qquad [13.29]$$

Análogamente, $E_1(t)$ dado por [11.152] tiene como transformada de Fourier

$$E_1(\omega) = -i\frac{ze}{4\pi\epsilon_0\gamma vb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{\omega b}{\gamma v}K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\right] \qquad [13.30]$$

* Véase, por ejemplo, MAGNUS y OBERHETTINGER, cap. VIII, o Bateman Manuscript Project, *Tables of Integral Transforms.*, vol. I, caps. I-III.

Ahora ya puede calcularse explícitamente la transferencia de energía [13.26] a la carga ligada armónicamente. Utilizando [13.29] y [13.30], hallamos:

$$\Delta E(b)=\frac{z^2e^4}{8\pi^2\epsilon_0^2mv^2}\left(\frac{1}{b^2}\right)\left[\xi^2K_1^2(\xi)+\frac{1}{\gamma^2}\xi^2K_0^2(\xi)\right] \qquad [13.31]$$

en donde

$$\xi=\frac{\omega_0 b}{\gamma v} \qquad [13.32]$$

El factor que multiplica el corchete es precisamente el resultado aproximado [13.2]. Para valores pequeños y grandes de ξ, las formas límite [3.103] y [3.104] nos demuestran que el corchete de [13.31] tiene por límites los valores:

$$[\ ]=\begin{cases}1, & \text{para } \xi\ll 1\\ \left(1+\dfrac{1}{\gamma^2}\right)\dfrac{\pi}{2}\xi e^{-2\xi} & \text{para } \xi\gg 1\end{cases} \qquad [13.33]$$

Puesto que $\xi=b/b_{\text{máx}}$, vemos que para $b\ll b_{\text{máx}}$, la transferencia de energía viene dada esencialmente por el resultado aproximado [13.2], mientras que para $b\gtrsim b_{\text{máx}}$ cae exponencialmente a cero. Así se justifican los argumentos cualitativos sobre el límite superior $b_{\text{máx}}$ que vimos en la sección anterior.

13.3. FORMULAS CLASICA Y MECANOCUANTICA DE LA PERDIDA DE ENERGIA

Podemos utilizar la fórmula [13.31], que da la transferencia de energía a una carga enlazada armónicamente, para calcular clásicamente la pérdida de energía por unidad de longitud de una partícula pesada que pasa rápidamente a través de la materia. Supongamos que hay N átomos por unidad de volumen con Z electrones por átomo. Podemos dividir los Z electrones en grupos, designados mediante el índice j, de f_j electrones, cada uno de los cuales presenta la misma frecuencia ω_j debida al enlace armónico. El número f_j recibe el nombre de *intensidad de oscilador* j. Evidentemente, las intensidades de oscilador satisfacen la regla $\sum_j f_j=Z$. Los argumentos que conducían a [13.11] y [13.12], pueden extenderse en forma trivial para hallar que la pérdida de energía es:

$$\frac{dE}{dx}=2\pi N\sum_j f_j\int_{b_{\text{mín}}}^{\infty}\Delta E_j(b)b\,db \qquad [13.34]$$

en donde $\Delta E_j(b)$ viene dado por [13.31] con $\xi=\omega_j b/\gamma v$, y además se especifica un límite inferior de $b_{\text{mín}}$ compatible con [13.7]. No es necesario límite superior, porque [13.31] se hace rápidamente cero para valores grandes de b. Podemos efectuar la integración de las funciones de Bessel modificadas, con lo que obtenemos el resultado,

$$\frac{dE}{dx}=\frac{Nz^2e^4}{4\pi\epsilon_0^2mv^2}\sum_j f_j\left[\xi_{\text{mín}}K_1(\xi_{\text{mín}})K_0(\xi_{\text{mín}})-\frac{v^2}{2c^2}\xi_{\text{mín}}\left(K_1^2(\xi_{\text{mín}})-K_0^2(\xi_{\text{mín}})\right)\right] \qquad [13.35]$$

en donde $\xi_{\text{mín}}=\omega_j b_{\text{mín}}/\gamma v$. En general, $\xi_{\text{mín}}\ll 1$. Lo cual quiere decir que se pueden utilizar las formas límite [3.103] para simplificar [13.35]. Esta expresión final para la pérdida de energía clásica es:

$$\frac{dE_c}{dx}=NZ\frac{z^2e^4}{4\pi\epsilon_0^2 mv^2}\left[\ln B_c-\frac{v^2}{2c^2}\right] \qquad [13.36]$$

en la que el argumento del logaritmo es

$$B_c=\frac{1{,}123\gamma c}{\langle\omega\rangle b_{\text{mín}}}=\frac{1{,}123\ 4\pi\epsilon_0\gamma^2 mv^3}{ze^2\langle\omega\rangle} \qquad [13.37]$$

La frecuencia media $\langle\omega\rangle$ que aparece en B_c es una media geométrica definida por

$$Z\ln\langle\omega\rangle=\sum_j f_j\ln\omega_j \qquad [13.38]$$

El resultado [13.36]-[13.38] es el obtenido por BOHR en su artículo clásico sobre pérdidas de energía (1915). Nuestra expresión aproximada [13.13] está de acuerdo con [13.36] en todos los aspectos esenciales, ya que el término aditivo $-v^2/2c^2$ es una corrección pequeña incluso para velocidades grandes.

La fórmula de Bohr [13.36] da cuenta razonablemente de la pérdida de energía de partículas alfa, y núcleos más pesados, que sean relativamente lentos. Pero para electrones, mesones, protones, e incluso partículas alfa rápidas, sobrestima considerablemente la pérdida de energía. La razón está en que para las partículas más ligeras las modificaciones mecanocuánticas hacen que falle el resultado clásico. Los efectos cuánticos importantes son: 1), carácter discreto de los posibles intercambios de energía; 2), limitaciones debidas a la naturaleza ondulatoria de las partículas y al principio de incertidumbre.

Podemos ilustrar el problema de la naturaleza discreta de la transferencia de energía, calculando la transferencia clásica [13.2] para $b\simeq b_{\text{máx}}$. *Grosso modo*, es ésta la transferencia más pequeña de importancia en los procesos de pérdida de energía. Si suponemos una sola frecuencia de enlace ω_0, tenemos:

$$\Delta E(b_{\text{máx}})\simeq\frac{1}{\gamma^2}z^2\left(\frac{v_0}{v}\right)^4\hbar\omega_0\left(\frac{\hbar\omega_0}{I_H}\right) \qquad [13.39]$$

en donde $v_0=c/137$ es la velocidad orbital de un electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno e $I_H=me^4/32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2=13{,}6$ eV es el potencial de ionización del hidrógeno. Como $\hbar\omega_0$ es del orden del potencial de ionización del átomo, esto es, del orden de I_H, vemos que para una partícula rápida ($v\gg v_0$) la transferencia de energía clásica [13.39] es muy pequeña comparada con el potencial de ionización, e incluso con la energía de excitación menor del átomo. Pero sabemos que la energía debe transmitirse en saltos cuánticos definidos. Una cantidad tan pequeña de energía como la dada por [13.39], sencillamente, no puede ser absorbida por el átomo. Podríamos argumentar que sólo si nuestra fórmula clásica [13.2] conduce a una transferencia de energía *grande* comparada con las energías típicas de excitación en el átomo, podríamos esperar que fuera correcta. Esto determinaría un límite superior muy distinto a los parámetros de impacto. Afortunadamente, el resultado clásico

puede aplicarse en sentido estadístico si reinterpretamos su significado. Las consideraciones cuánticas nos demuestran que el resultado clásico de la transferencia de una pequeña cantidad de energía en cada colisión es incorrecto. Pero si consideramos un gran número de colisiones, vemos que por término medio *sí* se transfiere una pequeña cantidad de energía. Sin embargo, ésta no se transfiere en cada colisión. En la mayor parte de las colisiones no hay transferencia energética. Pero en algunas, tiene lugar una excitación apreciable, que nos lleva a un pequeño valor medio al considerar muchas colisiones. En este sentido estadístico pueden reconciliarse el mecanismo cuántico, que considera transferencias de energía discretas, y el mecanismo clásico, con un continuo de posibles valores de la transferencia de energía. El acuerdo numérico detallado para las cantidades medias (no para las individuales) surge de las definiciones mecanocuánticas de las intensidades de oscilador f_j y de las frecuencias resonantes ω_j.

La otra modificación cuántica importante procede de la naturaleza ondulatoria de las partículas. El principio de incertidumbre impone ciertos límites al margen de validez de las consideraciones sobre órbitas clásicas. Si intentamos construir trenes de ondas que den significado aproximado a una trayectoria clásica, sabemos que el camino sólo puede definirse con una incertidumbre $\Delta x \gtrsim \hbar/p$. Cuando los parámetros de impacto b sean menores que esta incertidumbre, fallan los conceptos clásicos. Como la naturaleza ondulatoria de las partículas implica en cierto sentido que se difuminen en distancias del orden de Δx, podemos adelantar que la pérdida de energía correcta mecanocuántica corresponderá a transferencias de energía mucho más pequeñas que la dada por [13.2] para $b < \Delta x$. Así, pues, $\Delta x \sim \hbar/p$ es el análogo cuántico del parámetro de impacto mínimo [13.6]. En la colisión de dos partículas, cada una de ellas tiene naturaleza ondulatoria. Para una cierta velocidad relativa, la limitación debida al principio de incertidumbre corresponde a la más ligera de las dos. Si una partícula pesada incide para chocar con un electrón, el ímpetu del electrón en el sistema de coordenadas respecto al cual está en reposo la partícula incidente (que es aproximadamente el sistema CM), es $p' = \gamma m v$, en donde m es la masa del electrón. Por tanto, el parámetro de impacto mecanocuántico mínimo es

$$b_{\text{mín}}^{(q)} = \frac{\hbar}{\gamma m v} \qquad [13.40]$$

Cuando sean electrones que inciden sobre electrones, deberemos tener más cuidado y considerar el ímpetu en el s.c.m. cuando las masas sean iguales. Entonces obtenemos el parámetro de impacto mínimo para electrones,

$$[b_{\text{mín}}^{(q)}]_{\text{electrones}} = \frac{\hbar}{mc}\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \qquad [13.41]$$

En una situación dada, deberemos elegir el mayor de los dos parámetros de impacto mínimos [13.6] y [13.40] para definir el argumento B del logaritmo en dE/dx. La razón entre el valor clásico y el valor cuántico de $b_{\text{mín}}$ es

$$\eta = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar v} \qquad [13.42]$$

Si $\eta > 1$, deberemos utilizar la fórmula clásica de Bohr. Vemos que este caso

tiene lugar cuando las partículas incidentes son lentas y altamente cargadas, lo cual está de acuerdo con la observación. Si $\eta < 1$, el parámetro mínimo cuántico es mayor que el clásico. El argumento del logaritmo en [13.13] se convierte en

$$B_q = \frac{b_{\text{máx}}}{b_{\text{mín}}^{(q)}} = \eta B = \frac{\gamma^2 m v^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \qquad [13.43]$$

La ecuación [13.13] con el valor mecanocuántico B_q [13.43] es una buena aproximación de un resultado teórico cuántico debido a BETHE (1930). La fórmula de Bethe, en que se incluyen los efectos debidos a las colisiones próximas, es

$$\frac{dE_q}{dx} = NZ \frac{z^2 e^4}{4\pi\epsilon_0^2 m v^2} \left[\ln \left(\frac{2\gamma^2 m v^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right] \qquad [13.44]$$

Prescindiendo del pequeño término correctivo $-v^2/c^2$ y de un factor 2 en el argumento del logaritmo, es precisamente nuestra expresión aproximada.

Para electrones, los efectos cuánticos incluidos en [13.41] nos dan para el logaritmo un argumento mecanocuántico modificado

$$B_{\text{el}} \simeq (\gamma - 1) \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \frac{mc^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \rightarrow \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{2}} \frac{mc^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \qquad [13.45]$$

en donde la última expresión es válida para energías altas. En [13.45] se incluyen las modificaciones predominantes, aunque para los electrones haya otros efectos cuánticos, tales como los de *spin* y de intercambio.

En la figura 13.4 se representa el comportamiento general de las fórmulas clásica y mecanocuántica que dan la pérdida de energía. A energías bajas, la variación principal es según v^{-2}, puesto que el logaritmo varía con lentitud. Para energías altas, en que $v \rightarrow c$, la variación es creciente, y según $\ln \gamma$ para $\gamma \gg 1$. La fórmula de Bethe concuerda muy bien con la experiencia para todas las partículas rápidas con $\eta < 1$, siempre que la energía no sea demasiado elevada (véase la sección siguiente).

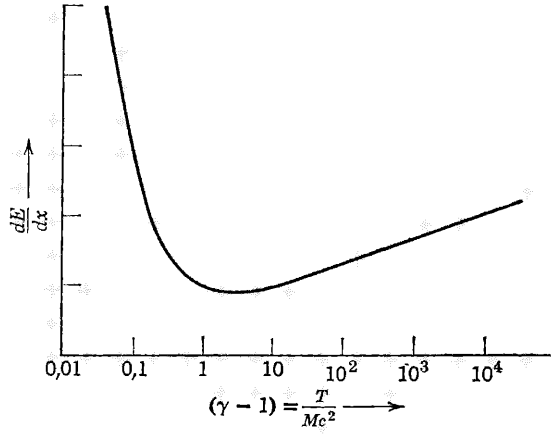


FIG. 13.4. Pérdida de energía en función de la energía cinética.

Vale la pena resaltar el origen físico de las dos potencias de γ que aparecen en B_c [13.37] y B_q [13.43]. Una potencia de γ proviene del aumento de la energía máxima [13.5] que se puede transferir en una colisión frontal, haciendo que $b_{\text{mín}} \propto \gamma^{-1}$ en [13.6] o [13.40]. La otra se debe al cambio relativista de la forma de los campos electromagnéticos [11.152] de una partícula rápida con el consiguiente acortamiento del tiempo de colisión [11.153] y aumento de $b_{\text{máx}}$ [13.9]. Para una partícula relativista, los campos transfieren energía de forma efectiva a mayores distancias que para otra no relativista.

A veces interesa conocer la pérdida de energía por unidad de longitud debida a las colisiones en las que por cada una se transfiere menos de una cierta cantidad de energía ϵ. Por ejemplo, en emulsiones fotográficas, los electrones emitidos con energía superior a unos 10 KeV tienen un alcance mayor que las dimensiones lineales medias de los granos de bromuro de plata. Por consiguiente, la energía disipada en el ennegrecimiento de los granos corresponde a las colisiones en las que la transferencia de energía es menor que unos 10 KeV. De forma clásica, podemos obtener la fórmula que da la pérdida de energía partiendo de la fórmula de Bohr [13.35], eligiendo un parámetro de impacto mínimo $b_{\text{mín}}(\epsilon)$ tal que [13.2] sea igual a ϵ. Así,

$$b_{\text{mín}}(\epsilon) = \frac{2ze^2}{4\pi\epsilon_0 v(2m\epsilon)^{1/2}}$$

Esto nos lleva a una fórmula de la forma de [13.36], pero en la que el argumento del logaritmo es

$$B_c(\epsilon) = \frac{1{,}123\ 4\pi\epsilon_0\gamma v^2(2m\epsilon)^{1/2}}{2ze^2\langle\omega\rangle}$$

Como las fórmulas mecanocuánticas de la pérdida de energía se obtienen de las clásicas reemplazando (véase [13.43]),

$$B_q = \eta B_c = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar v} B_c$$

será de esperar que la fórmula mecanocuántica de la pérdida de energía por unidad de longitud debida a colisiones cuya transferencia de energía es menor que ϵ, sea

$$\frac{dE_q}{dx}(\epsilon) = NZ\frac{z^2e^4}{4\pi\epsilon_0^2 mv^2}\left[\ln B_q(\epsilon) - \frac{v^2}{2c^2}\right] \qquad [13.46]$$

en donde

$$B_q(\epsilon) = \lambda\frac{\gamma v(2m\epsilon)^{1/2}}{\hbar\langle\omega\rangle} \qquad [13.47]$$

La constante λ es un factor numérico del orden de la unidad que no se puede determinar sin un cálculo mecanocuántico detallado. Los cálculos de BETHE (1930) dieron el valor $\lambda = 1$. El valor de $B_q(\epsilon)$ mecanocuántico puede escribirse en la forma:

$$B_q(\epsilon) = \frac{b_{\text{máx}}}{b_{\text{mín}}^{(q)}(\epsilon)} \qquad [13.48]$$

en donde $b_{máx}$ viene dado por [13.9], y el parámetro de impacto mínimo es

$$b_{mín}^{(q)}(\epsilon) \simeq \frac{\hbar}{\Delta p} \simeq \frac{\hbar}{(2m\epsilon)^{1/2}} \qquad [13.49]$$

Esta fórmula supone que la trayectoria clásica debe estar indefinida en una cantidad al menos del orden de [13.49] para que la incertidumbre en el ímpetu transversal Δp sea más pequeña que la transferencia de ímpetu en la colisión. De otro modo, seríamos incapaces de asegurar que ha tenido lugar realmente una transferencia de energía menor que ϵ. Por tanto, [13.49] constituye en este caso de forma natural un límite inferior mecanocuántico del modelo orbital clásico.

La expresión de dE/dx obtenida hasta ahora representa la pérdida *media* de energía por unidad de longitud de una partícula que atraviesa la materia. Como el número de colisiones por unidad de longitud es finito, aunque sea grande, y el espectro de posibles pérdidas de energía en las colisiones individuales es amplio, habrá fluctuaciones en torno al valor medio. Estas fluctuaciones dan lugar a dispersión en la energía o alcance de una partícula que atraviesa un cierto espesor de sustancia. Si el número de colisiones es bastante grande y la pérdida de energía no lo es tanto, la energía final de la partícula estará distribuida en forma de gaussiana en torno a la media. La anchura de la gaussiana puede estimarse en la forma siguiente. Definimos la pérdida de energía cuadrática media por unidad de longitud, en analogía con [13.11], en la forma:

$$\frac{dE^2}{dx} = 2\pi NZ \int_{b_{mín}}^{b_{máx}} [\Delta E(b)]^2 b\, db$$

estando $\Delta E(b)$ dado por [13.2]. Esta expresión, suponiendo que $b_{mín} \ll b_{máx}$, se convierte en:

$$\frac{dE^2}{dx} = NZ \frac{z^2 e^4}{4\pi\epsilon_0^2 mv^2} \left[\gamma^2 mv^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \right] \qquad [13.50]$$

El término $-\beta^2/2$ se ha añadido manualmente para hacer que la expresión sea correcta relativísticamente. Las colisiones que contribuyen de forma más importante a dE^2/dx son las colisiones próximas. Para tales colisiones, que implican desviaciones grandes del electrón en el sistema propio de la partícula incidente, existe una corrección relativista que depende del spin y modifica el resultado en la forma expuesta.

Cuando una partícula de energía inicial E_0 atraviesa un espesor x de absorbente y sale con una energía media $\bar{E}$, puede demostrarse (véase, por ejemplo, BOHR, sección 2.3) que la desviación cuadrática media en energía es

$$\Omega^2 = x \frac{dE^2}{dx} \qquad [13.51]$$

en donde se supone que $(E_0 - \bar{E})/E_0$ es pequeño de manera que resulta suficiente calcular [13.50] para $E = E_0$. Entonces, la distribución de energía será aproximadamente:

$$P(E_0, E, x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Omega} e^{-(E-\bar{E})^2/2\Omega^2} \qquad [13.52]$$

Este resultado es válido supuesto que $\Omega \ll \bar{E}$ y $\Omega \ll (E_0 - \bar{E})$, y también $\Omega \gg E_{máx} \simeq 2\gamma^2 mv^2$. Para partículas ultrarrelativistas la última condición acaba por fallar. Entonces, la distribución de energía no es gaussiana, sino que está descrita por la curva de Landau. El lector interesado puede consultar las referencias que se dan al final del capítulo para más detalles.

13.4. EFECTO DE DENSIDAD EN LA PERDIDA DE ENERGIA POR COLISION

Con partículas no demasiado relativistas, las pérdidas de energía observadas vienen dadas con bastante precisión por [13.44] (o por [13.36], si $\eta > 1$), cualquiera que sea la partícula y en todo tipo de medio. Sin embargo, para partículas ultrarrelativistas, las pérdidas observadas son menores que las predichas por [13.44], especialmente en sustancias densas. En función de la dE/dx, que se indica en la figura 13.4, la pérdida de energía observada aumenta después del mínimo con una pendiente que es aproximadamente la mitad de la curva teórica, es decir, correspondiendo a la potencia 1 de γ en el argumento del logaritmo de [13.44] en lugar de 2. En emulsiones fotográficas, la pérdida de energía, medida a partir de las densidades de grano, aumenta apenas por encima del mínimo hasta una meseta que se extiende a las energías mayores conocidas. Esto, nuevamente, corresponde a una reducción en una unidad de la potencia de γ, esta vez en la [13.47] de $B_q(\epsilon)$.

Esta reducción en la pérdida de energía, conocida como el efecto de densidad, fue estudiada teóricamente por primera vez por FERMI (1940). En nuestra discusión hasta el momento, hemos hecho tácitamente una hipótesis que no es válida en las sustancias densas. Hemos supuesto que es correcto calcular el efecto de los campos debidos a la partícula incidente sobre un electrón de un átomo cada vez y luego sumar de forma no coherente las transferencias de energía a todos los electrones de los átomos en que $b_{mín} < b < b_{máx}$. Ahora bien, $b_{máx}$ es muy grande frente a las dimensiones atómicas, especialmente para valores grandes de γ. Por tanto, en los medios densos, hay muchos átomos entre la trayectoria de la partícula incidente y el átomo en cuestión, si b es comparable con $b_{máx}$. Estos átomos, influidos por los campos de la partícula rápida, producirán campos perturbadores en la posición del átomo elegido, con lo que se modificará la respuesta de éste a los campos de la partícula rápida. Dicho de otra forma, en los medios densos la polarización dieléctrica altera los campos de la partícula haciéndolos cambiar de su valor en el vacío al valor característico de los campos macroscópicos en un dieléctrico. Al calcular la energía transferida en colisiones distantes debe tomarse en cuenta esta modificación de los campos debida a la polarización del medio. En las colisiones próximas la partícula interacciona sólo con un átomo a la vez. En este caso se puede aplicar el cálculo para una partícula libre sin efectos de polarización. El parámetro de impacto divisorio entre las colisiones próximas y distantes es del orden de las dimensiones atómicas. No es necesario especificar el valor de b con gran precisión, porque aparece la unión de dos logaritmos en el cálculo de la suma.

Calcularemos la pérdida de energía en colisiones distantes ($b \geqslant a$), suponiendo que se pueden calcular los campos en el medio haciendo uso de la aproximación consistente en suponer un dieléctrico macroscópico continuo de constante dieléctrica $\epsilon(\omega)$. Si a es del orden de las dimensiones atómicas, esta

aproximación no será válida para las más próximas de las colisiones distantes, pero será válida para la gran mayoría de las colisiones.

El problema de hallar el campo eléctrico en el medio, debido a la partícula rápida incidente que se mueve con velocidad constante, se puede resolver con mayor rapidez mediante transformadas de Fourier. Si transformamos los potenciales $A_\mu(x)$ y las densidades $J_\mu(x)$ en el espacio y tiempo de acuerdo con la regla general

$$F(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k\int d\omega\, F(k,\omega)e^{ik\cdot x-i\omega t} \qquad [13.53]$$

la ecuación de ondas transformada es

$$\left.\begin{aligned}\left[k^2-\frac{\omega^2\epsilon(\omega)}{c^2\epsilon_0}\right]\Phi(k,\omega)&=\frac{1}{\epsilon(\omega)}\rho(k,\omega)\\ \left[k^2-\frac{\omega^2\epsilon(\omega)}{c^2\epsilon_0}\right]A(k,\omega)&=\mu_0 J(k,\omega)\end{aligned}\right\} \qquad [13.54]$$

La constante dieléctrica $\epsilon(\omega)$ aparece en forma característica en las posiciones determinadas por la presencia de D en las ecuaciones de Maxwell. Se encuentra fácilmente que las transformadas de Fourier de:

$$\left.\begin{aligned}\rho(x,t)&=ze\delta(x-vt)\\ J(x,t)&=v\rho(x,t)\end{aligned}\right\} \qquad [13.55]$$

y

son:

$$\left.\begin{aligned}\rho(k,\omega)&=\frac{ze}{2\pi}\,\delta(\omega-k\cdot v)\\ J(k,\omega)&=v\rho(k,\omega)\end{aligned}\right\} \qquad [13.56]$$

De [13.54] vemos que las transformadas de Fourier de los potenciales son

$$\left.\begin{aligned}\Phi(k,\omega)&=\frac{ze}{2\pi\epsilon(\omega)}\cdot\frac{\delta(\omega-k\cdot v)}{k^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\dfrac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}}\\ A(k,\omega)&=\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}\,\frac{v}{c^2}\,\Phi(k,\omega)\end{aligned}\right\} \qquad [13.57]$$

y

Por las definiciones de los campos electromagnéticos en función de los potenciales obtenemos sus transformadas de Fourier

$$\left.\begin{aligned}E(k,\omega)&=i\left(\frac{\omega\epsilon(\omega)}{c\epsilon_0}\,\frac{v}{c}-k\right)\Phi(k,\omega)\\ B(k,\omega)&=i\,\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}\times\frac{v}{c^2}\,\Phi(k,\omega)\end{aligned}\right\} \qquad [13.58]$$

Al calcular la pérdida de energía, resulta evidente por [13.23] que nos interesa la transformada de Fourier, respecto del tiempo, de los campos electromagnéticos a una distancia b perpendicular a la trayectoria de la partícula

que se mueve a lo largo del eje z. Así, el campo eléctrico necesario es:

$$\boldsymbol{E}(\omega)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)e^{ibk_2} \qquad [13.59]$$

en donde el punto de observación tiene por coordenadas $(0, b, 0)$. Para ilustrar la determinación de $\boldsymbol{E}(\omega)$ vamos a considerar el cálculo de $E_1(\omega)$, componente de $\boldsymbol{E}$ paralela a $\boldsymbol{v}$. Utilizando las formas explícitas [13.57] y [13.58], obtenemos:

$$E_1(\omega)=\frac{ize}{2\pi\epsilon(\omega)}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,e^{ibk_2}\left(\frac{\omega\epsilon(\omega)v}{\epsilon_0c^2}-k_1\right)\frac{\delta(\omega-vk_1)}{k^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\dfrac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}} \qquad [13.60]$$

Se puede efectuar la integración sobre dk_1 de forma inmediata. Así, pues,

$$E_1(\omega)=-\frac{ize\omega}{2\pi(2\pi)^{3/2}v^2}\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)}-\beta^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}dk_2e^{ibk_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_3}{k_2^2+k_3^2+\lambda^2}$$

en donde

$$\lambda^2=\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}=\frac{\omega^2}{v^2}\left(1-\beta^2\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right) \qquad [13.61]$$

La integral sobre dk_3 tiene el valor $\pi/(\lambda^2+k_2^2)^{\frac{1}{2}}$, de modo que podemos expresar $E_1(\omega)$ así:

$$E_1(\omega)=-\frac{ize\omega}{4\pi\epsilon_0\sqrt{2\pi}\,v^2}\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)}-\beta^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ibk_2}}{(\lambda^2+k_2^2)^{1/2}}dk_2 \qquad [13.62]$$

La integral que nos queda tiene la misma estructura general que [13.28]. El resultado es

$$E_1(\omega)=-\frac{ize\omega}{4\pi\epsilon_0v^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)}-\beta^2\right)K_0(\lambda b) \qquad [13.63]$$

en donde la raíz cuadrada de [13.62] se elige de forma que λ esté en el cuarto cuadrante. Mediante un cálculo análogo, obtenemos los restantes campos:

$$\left.\begin{aligned}E_2(\omega)&=\frac{ze}{4\pi v}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\lambda}{\epsilon(\omega)}K_1(\lambda b)\\ B_3(\omega)&=\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}\frac{v}{c^2}E_2(\omega)\end{aligned}\right\} \qquad [13.64]$$

En el límite $\epsilon(\omega)\to\epsilon_0$ se ve fácilmente que los campos [13.63] y [13.64] se reducen a los resultados anteriores [13.30] y [13.29].

Para hallar la energía transferida a un átomo cuya situación viene dada por el parámetro de impacto b, escribimos sin más la generalización de [13.23]:

$$\Delta E(b)=2e\sum_j f_j\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty}i\omega\boldsymbol{x}_j(\omega)\cdot\boldsymbol{E}^*(\omega)\,d\omega$$

en donde $x_j(\omega)$ es la amplitud del electrón de tipo j en el átomo. En lugar de usar [13.19] para expresar $x_j(\omega)$, expresamos la suma de los momentos dipolares en función de la polarizabilidad molecular y, por tanto, de la constante dieléctrica

$$-e\sum_j f_j x_j(\omega) = \frac{1}{N}(\epsilon(\omega)-\epsilon_0)\boldsymbol{E}(\omega)$$

en donde N es el número de átomos por unidad de volumen. Entonces, podemos expresar la transferencia de energía

$$\Delta E(b) = \frac{2}{N}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty -i\omega\epsilon(\omega)\,|\boldsymbol{E}(\omega)|^2\,d\omega \qquad [13.65]$$

La pérdida de energía por unidad de longitud, correspondiente a parámetros de impacto $b \geqslant a$, es, evidentemente,

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = 2\pi N\int_a^\infty \Delta E(b)b\,db \qquad [13.66]$$

Si en [13.65] y [13.66] sustituimos los campos [13.63] y [13.64], tenemos, después de algunos pasos de cálculo, la expresión debida a FERMI

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{1}{2\pi^2\epsilon_0}\frac{(ze)^2}{v^2}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty i\omega\lambda^* a K_1(\lambda^* a)K_0(\lambda a)\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)}-\beta^2\right)d\omega \qquad [13.67]$$

en donde λ viene dado por [13.61]. De forma más elegante podemos llegar a este resultado calculando la energía electromagnética que fluye a través de un cilindro de radio a alrededor de la trayectoria de la partícula incidente. Así, pues,

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{a>b} = \frac{1}{v}\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\mu_0 v}\int_{-\infty}^\infty 2\pi a B_3 E_1\,dx$$

La integral sobre dx en un tiempo fijo equivale a una integral en un punto del cilindro extendida a todo el tiempo. Teniendo en cuenta que $dx = v\,dt$, tenemos

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = -\frac{2\pi a}{\mu_0}\int_{-\infty}^\infty B_3(t)E_1(t)\,dt$$

que se puede convertir en una integral en frecuencia,

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = -\frac{4\pi}{\mu_0}a\,\mathrm{Re}\int_0^\infty B_3^*(\omega)E_1(\omega)\,d\omega \qquad [13.68]$$

Con los campos [13.63] y [13.64] obtenemos el resultado de Fermi [13.67].

La expresión de Fermi [13.67] guarda poca semejanza con nuestros resultados previos, tales como [13.35]. Pero en condiciones en las que los efectos de polarización carecen de importancia, nos conduce a los mismos resultados. Por ejemplo, con partículas no relativistas ($\beta \ll 1$) resulta inmediato según

[13.61] que $\lambda \simeq \omega/v$, independientemente de $\epsilon(\omega)$. Entonces las funciones de Bessel modificadas de [13.67] son reales y solamente contribuye a la integral la parte imaginaria de $1/\epsilon(\omega)$. Si despreciamos la corrección debida a la polarización de la sección 4.5 al campo interno de un átomo, podemos expresar la constante dieléctrica

$$\epsilon(\omega) \simeq \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_j} \qquad [13.69]$$

en donde hemos utilizado la expresión [13.19] del momento dipolar. Si suponemos que el segundo término es pequeño, podemos calcular fácilmente la parte imaginaria de $1/\epsilon(\omega)$ y sustituirla en [13.67]. A continuación, podemos efectuar la integración sobre $d\omega$ utilizando la misma aproximación que en [13.24]-[13.26] y llegamos a la forma no relativista de [13.35]. Si despreciamos la desviación de λ del valor $\omega/\gamma v$, sin llevar a cabo nuevas aproximaciones, [13.67] nos lleva exactamente al resultado de Bohr [13.35].

El efecto de densidad procede evidentemente de la presencia de argumentos complejos en las funciones de Bessel modificadas, lo que corresponde a tomar en consideración $\epsilon(\omega)$ en [13.61]. Como $\epsilon(\omega)$ está multiplicado en ella por β^2, resulta claro que el efecto de densidad sólo puede ser realmente importante para energías elevadas. Los cálculos detallados para todas las energías, utilizando alguna expresión explícita de $\epsilon(\omega)$ tal como [13.69], son muy complicados y no son particularmente informativos. Nos contentaremos con el límite ultrarrelativista ($\beta \simeq 1$). Más aún, como las frecuencias importantes en la integral respecto de $d\omega$ son frecuencias ópticas y el radio a es del orden de las dimensiones atómicas $|\lambda a| \sim (\omega a/c) \ll 1$. Por tanto, podemos aproximar las funciones de Bessel por sus límites para argumentos pequeños [3.103]. Así, en el límite relativista, la expresión de Fermi [13.67] es

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} \simeq \frac{1}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{(ze)^2}{c^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty i\omega \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)} - 1\right) \times$$

$$\times \left\{ \ln\left(\frac{1{,}123c}{\omega a}\right) - \frac{1}{2} \ln\left[1 - \epsilon(\omega)/\epsilon_0\right] \right\} d\omega \qquad [13.70]$$

Resulta de interés señalar aquí que el argumento del segundo logaritmo es en realidad $[1 - \beta^2\epsilon(\omega)/\epsilon_0]$. En el límite $\epsilon = \epsilon_0$, este término logarítmico da un factor γ al combinar los logaritmos, lo cual se corresponde con el resultado antiguo [13.36]. Siempre que $\epsilon(\omega) \neq \epsilon_0$, podemos expresar este factor como $[1 - \epsilon(\omega)/\epsilon_0]$, con lo que, al suprimir una potencia de γ en el logaritmo, estamos de acuerdo con la experiencia.

La integral de [13.70], en la que $\epsilon(\omega)$ viene dado por [13.69], puede resolverse con más facilidad mediante el teorema de Cauchy, transformando la integral extendida a los valores reales positivos de ω en otra sobre ω imaginario positivo, menos otra extendida a la cuarta parte de la circunferencia del infinito. La integral a lo largo del eje imaginario no da contribución. Si se supone que Γ_j en [13.69] es constante, el resultado de la integración a lo largo del cuadrante de circunferencia puede escribirse en la forma sencilla

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2\omega_p^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{1{,}123c}{a\omega_p}\right) \qquad [13.71]$$

en donde ω_p es la frecuencia del plasma electrónico,

$$\omega_p^2 = \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m} \qquad [13.72]$$

La expresión relativista correspondiente sin tener en cuenta el efecto de densidad es, según [13.36],

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2\omega_p^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\ln\left(\frac{1{,}123\gamma c}{a\langle\omega\rangle}\right) - \frac{1}{2}\right] \qquad [13.73]$$

Vemos que el efecto de densidad produce una simplificación en el sentido de que el valor asintótico de la pérdida de energía ya no depende de los detalles de la estructura atómica a través de $\langle\omega\rangle$ [13.38], sino solamente del número de electrones por unidad de volumen a través de ω_p. Dos sustancias que tengan estructuras atómicas muy distintas darán lugar a la misma pérdida de energía de partículas ultrarrelativistas, siempre que sus densidades sean tales que haya el mismo número de electrones por unidad de volumen.

Como hay calculadas numerosas curvas de pérdida de energía basadas en la fórmula de Bethe [13.44], resulta a veces conveniente tabular la reducción de la pérdida de energía debida al efecto de densidad. Esta es precisamente la diferencia entre [13.73] y [13.71]:

$$\lim_{\beta\to 1} \Delta\left(\frac{dE}{dx}\right) = \frac{(ze)^2\omega_p^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\ln\left(\frac{\gamma\omega_p}{\langle\omega\rangle}\right) - \frac{1}{2}\right] \qquad [13.74]$$

En emulsiones fotográficas, la pérdida de energía importante viene dada por [13.46] y [13.47] con $\epsilon \simeq 10$ KeV. Si aplicamos la corrección de densidad, se transforma esta expresión en una constante para energías elevadas

$$\frac{dE(\epsilon)}{dx} \to \frac{(ze)^2\omega_p^2}{8\pi\epsilon_0 c^2}\ln\left(\frac{2mc^2\epsilon}{\hbar^2\omega_p^2}\right) \qquad [13.75]$$

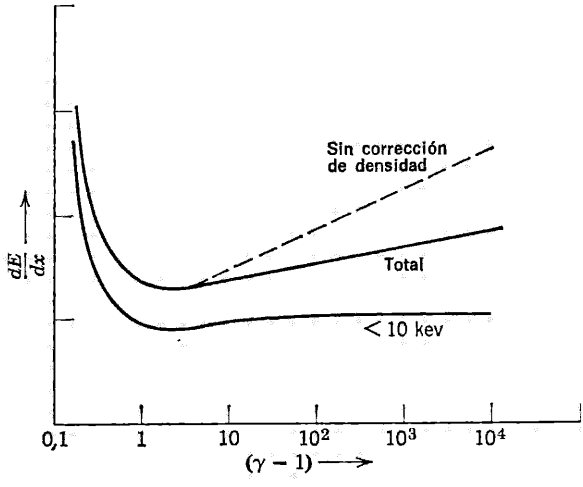


FIG. 13.5. Pérdida de energía incluido el efecto de densidad. La curva de trazos es la pérdida de energía total sin corrección de densidad. En las curvas continuas se incluye el efecto de densidad, la superior corresponde a la pérdida de energía total, y la inferior representa la pérdida de energía debida a transferencias individuales de menos de 10 keV.

Para el bromuro de plata, $\hbar\omega_p \simeq 48$ eV. Así, pues, para partículas simplemente cargadas, [13.75] dividido por la densidad tiene el valor aproximado de 1,02 MeV-cm²/g. Esta pérdida de energía está en buen acuerdo con la experiencia y corresponde a un aumento sobre el valor mínimo de menos del 10 por 100. La figura 13.5 presenta la pérdida de energía y la pérdida por transferencias de menos de 10 KeV, para una sustancia típica. La curva de trazos es la curva de Bethe para la pérdida total de energía sin la corrección del efecto de densidad.

13.5. RADIACION DE CHERENKOV

El efecto de densidad en la pérdida de energía está íntimamente ligado a la respuesta coherente de un medio al paso de una partícula relativista que determina la emisión de radiación de Cherenkov. De hecho, se trata del mismo fenómeno en circunstancias límite diferentes. La expresión [13.67] o, mejor, [13.68], representa la energía perdida por la partícula hacia regiones separadas una distancia mayor que $b=a$ de su trayectoria. Al hacer variar a podemos examinar cómo se reparte la energía por el medio. En [13.70] hemos considerado que a era de dimensiones atómicas y supuesto que $|\lambda a| \ll 1$. Tomemos ahora el límite opuesto. Si $|\lambda a| \gg 1$, las funciones modificadas de Bessel pueden aproximarse mediante sus formas asintóticas. Entonces, los campos [13.63] y [13.64] se convierten en:

$$\left.\begin{aligned} E_1(\omega, b) &\to i\frac{ze\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[1-\frac{\epsilon_0}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right]\frac{e^{-\lambda b}}{\sqrt{\lambda b}} \\ E_2(\omega, b) &\to \frac{ze}{4\pi v\epsilon(\omega)}\sqrt{\frac{\lambda}{b}}\,e^{-\lambda b} \\ B_3(\omega, b) &\to \frac{v}{\epsilon_0 c^2}\,\epsilon(\omega)E_2(\omega, b) \end{aligned}\right\} \qquad [13.76]$$

El integrando de [13.68] en este límite es:

$$\left(-\frac{4\pi}{\mu_0}aB_3^*E_1\right) \to \frac{z^2e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left(-i\sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}}\right)\omega\left[1-\frac{\epsilon_0}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right]e^{-(\lambda+\lambda^*)a} \qquad [13.77]$$

La parte real de esta expresión, integrada respecto a la frecuencia, da la energía depositada lejos de la trayectoria de la partícula. Si λ tiene una parte real positiva, como en general ocurre, el factor exponencial en [13.67] hará que la expresión se anule rápidamente a grandes distancias. Toda la energía se deposita cerca de la trayectoria. El único caso en que esto no es cierto es cuando λ *es puramente imaginaria.* Entonces, la exponencial es la unidad; la expresión es independiente de a; *parte de la energía escapa* hasta el infinito *en forma de radiación.* Puede verse a partir de [13.61] que λ puede ser puramente imaginaria si $\epsilon(\omega)$ es real (sin absorción) y $\beta^2\epsilon(\omega) > \epsilon_0$. En realidad, puede admitirse cierta absorción débil, pero en interés de la simplicidad supondremos que $\epsilon(\omega)$ es esencialmente real de aquí en adelante. La condición $\beta^2\epsilon(\omega) > \epsilon_0$ puede

escribirse en la forma más transparente:

$$v > \frac{c}{\sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}}} \qquad [13.78]$$

Esto nos indica que *es necesario que la velocidad de la partícula sea mayor que la velocidad de fase* de los campos electromagnéticos a la frecuencia ω a fin de que *haya emisión de radiación de Cherenkov* a esta frecuencia.

Al considerar la fase de λ a medida que cambia $\beta^2\epsilon$ desde ser menor que la unidad a ser mayor, suponiendo que $\epsilon(\omega)$ tenga una parte imaginaria infinitesimal positiva para $\omega > 0$, se ve que

$$\lambda = -i|\lambda|, \quad \text{si } \beta^2\epsilon > \epsilon_0$$

esto significa que $(\lambda^*/\lambda)^{1/2} = i$, y que [13.77] es real e independiente de a. Entonces, la ecuación [13.68] representa la energía radiada en forma de radiación de Cherenkov por unidad de longitud a lo largo de la trayectoria de la partícula:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} = \frac{(ze)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\epsilon(\omega)>(1/\beta^2)} \omega \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right) d\omega \qquad [13.79]$$

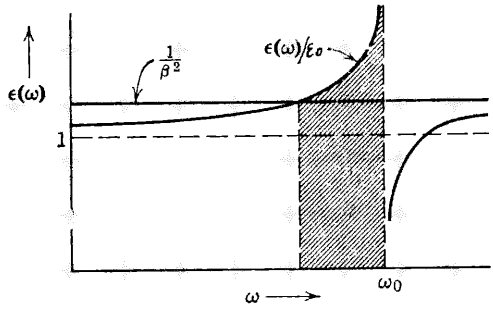


FIG. 13.6. Banda de Cherenkov. La radiación se emite solamente para el intervalo de frecuencias rayado, en que $\epsilon(\omega) > \beta^{-2}$.

El integrando obviamente da el espectro en frecuencia diferencial. Este es el resultado de Frak-Tamm, publicado por primera vez en 1937 al explicar la radiación observada por Cherenkov en 1934. Evidentemente, la radiación no se emite uniformemente en todas las frecuencias. Tiende a ser emitida en bandas situadas algo por debajo de las regiones de dispersión anómala, en las que $\epsilon(\omega)/\epsilon_0 > \beta^{-2}$, como se indica en la figura 13.6. Naturalmente, si $\beta \simeq 1$, las regiones en las que $\epsilon(\omega)/\epsilon_0 > \beta^{-2}$ pueden ser muy extensas.

Otro aspecto característico de la radiación de Cherenkov es su ángulo de emisión. A grandes distancias de la trayectoria los campos son transversales, campos de radiación. La dirección de propagación está dada por $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$. Como se ha dibujado en la figura 13.7, el ángulo de emisión de la radiación de Cherenkov, θ_C, respecto a la velocidad de la partícula viene dado por:

$$\text{tg}\,\theta_c = -\frac{E_1}{E_2} \qquad [13.80]$$

A partir de [13.76] para los campos lejanos, obtenemos:

$$\cos\theta_c = \frac{1}{\beta\sqrt{\epsilon(\omega)/\epsilon_0}} \qquad [13.81]$$

Ahora el criterio $\beta^2\epsilon > \epsilon_0$ puede reenunciarse como el requisito de que el ángulo emisión θ_C sea un ángulo físico cuyo coseno sea menor que la unidad.

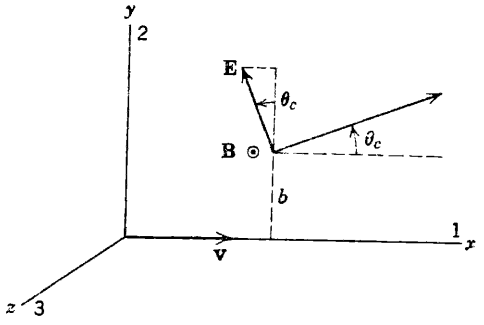


FIG. 13.7.

De paso notemos, en la figura 13.7, que la radiación de Cherenkov está polarizada linealmente de modo total en el plano que contiene la dirección de observación y la trayectoria de la partícula.

El ángulo de emisión θ_C puede interpretarse cualitativamente en términos de un frente de onda de «choque» semejante a la de la proa de un buque, o al frente de choque que acompaña al vuelo supersónico. En la figura 13.8 se han

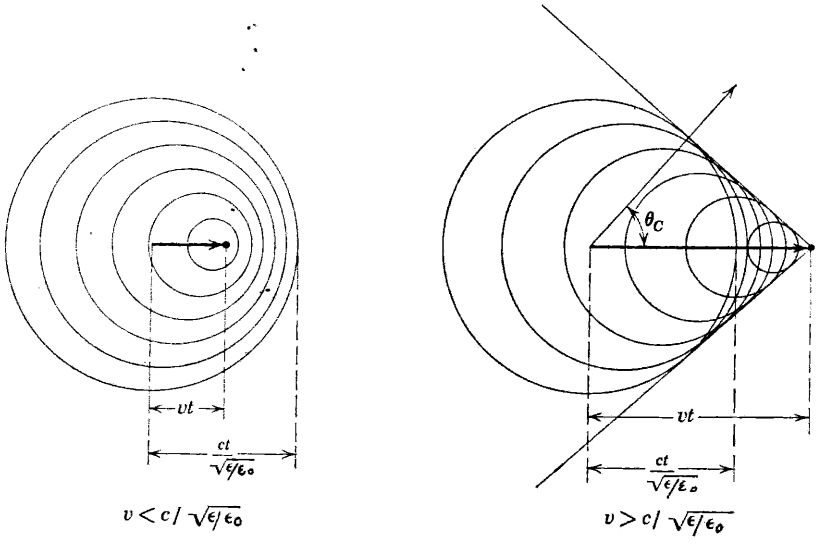


FIG. 13.8. Radiación de Cherenkov. Paquetes de onda esféricos de los campos de una partícula que va a una velocidad menor que, y mayor que, la de la luz en medio. Para $v > c$ aparece una onda electromagnética de choque, que se propaga en la dirección dada por el ángulo de Cherenkov θ_C.

dibujado dos series de frentes de ondas esféricos que se desplazan con la velocidad $c/\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ a partir de las posiciones instantáneas consecutivas de una partícula que se mueve con la velocidad constante v. En la parte de la izquierda se supone que v es menor que $c/\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$, y en la parte de la derecha que es mayor. Cuando $v > c/\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ los frentes de onda interfieren de modo que producen un frente, u onda, de «choque» detrás de la partícula, cuyo ángulo se ve que es el complementario de θ_C. Un observador en reposo ve una onda que se propaga en la dirección de θ_C.

Puede darse un tratamiento cuantitativo a la situación cualitativa dibujada en la figura 13.8 examinando los potenciales $\Phi(x, t)$ o $A(x, t)$ construidos a partir de [13.57] utilizando [13.53]. Por ejemplo, el potencial vector toma la forma:

$$A(x, t) = \frac{ze}{(2\pi)^3 \epsilon_0 c} \boldsymbol{\beta} \int d^3k \, \frac{e^{ik_1(x-vt)} e^{i\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}}}{k_1^2(1-\beta^2\epsilon/\epsilon_0) + k_\perp^2}$$

siendo $\epsilon = \epsilon(k_1 v)$, mientras que $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{k}_\perp$ son coordenadas transversales. Haciendo la aproximación, poco realista pero tratable, de que ϵ es una constante, puede calcularse la integral de modo directo. En el régimen de Cherenkov ($\beta^2\epsilon > \epsilon_0$) el denominador tiene polos sobre la trayectoria de integración. Escogiendo el contorno de la integración en k_1 de modo que se anule el potencial para puntos delante de la partícula ($x - vt > 0$), se encuentra que el resultado es:

$$A(x, t) = \boldsymbol{\beta} \frac{ze}{2\pi\epsilon_0 c \sqrt{(x-vt)^2 + (\beta^2\epsilon/\epsilon_0 - 1)\rho^2}} \qquad [13.82]$$

dentro del cono de Cherenkov, y cero fuera de él. Nótese que $\boldsymbol{A}$ es singular a lo largo del frente de choque, como sugieren las ondas de la figura 13.8. La expresión [13.82] sólo puede tomarse como indicativa. La constante dieléctrica varía con $\omega = k_1 v$. Esta dependencia funcional elimina la singularidad matemática de [13.82].

Es posible utilizar las propiedades de la radiación de Cherenkov para medir las velocidades de partículas rápidas. Si partículas con una velocidad dada pasan a través de un medio de constante dieléctrica ϵ conocida, la luz es emitida con el ángulo de Cherenkov [14.81]. De este modo, por una medida del ángulo, podemos determinar la velocidad. Como, por lo general, la constante dieléctrica de un medio varía con la frecuencia, se emitirá luz de distintos colores con ángulos algo diferentes. Para seleccionar un pequeño intervalo de frecuencias puede emplearse un filtro de banda estrecha y así mejorar la precisión de la medición de velocidad. Para partículas muy rápidas ($\beta \lesssim 1$) se puede utilizar un gas que nos dé una constante dieléctrica que difiera muy poco de la unidad, y de forma que tengamos $(\epsilon - \epsilon_0)$ variable sobre límites amplios variando la presión del gas. En física de alta energía se utilizan dispositivos contadores basados en la radiación de Cherenkov para medidas de velocidad, como analizadores de masa en combinación con medidas de ímpetu, y como discriminadores para eliminar partículas lentas no deseadas.

13.6. PERDIDA DE ENERGIA EN UN PLASMA ELECTRONICO

La pérdida de energía de una partícula no relativista que pasa a través de un plasma se puede tratar de forma análoga al efecto de densidad en una partícula relativista. Como vimos en la sección 10.9, la escala de longitudes en un plasma se divide en dos regiones. En dimensiones grandes comparadas con la distancia de apantallamiento de Debye k_D^{-1} [10.91], el plasma actúa como un medio continuo en que las partículas cargadas participan en un comportamiento colectivo tal como oscilaciones del plasma. En dimensiones pequeñas frente a k_D^{-1}, predomina el comportamiento individual de las partículas y éstas interaccionan de acuerdo con el potencial de dos cuerpos apantallado [10.98]. Esto significa que al calcular la pérdida de energía la distancia de apantallamiento de Debye desempeña el mismo papel que la dimensión atómica a en los cálculos del efecto de densidad. En colisiones próximas podemos no tener en cuenta los efectos colectivos y utilizar el potencial apantallado entre dos cuerpos para calcular esta contribución a la pérdida de energía. Esto se deja como ejercicio al lector (problema 13.3). Para las colisiones distantes, con parámetros de impacto $bk_D > 1$, podemos calcular los efectos colectivos mediante la fórmula de Fermi [13.67], dando un valor adecuado a la constante dieléctrica en un plasma. Así, las pérdidas de energía en colisiones distantes corresponden a excitar las oscilaciones de plasma en el medio.

Para una partícula no relativista, [13.67] da la siguiente expresión de la pérdida de energía a distancias $b > k_D^{-1}$:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_D b>1} \simeq \frac{1}{2\pi^2}\frac{(ze)^2}{v^2}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{i\omega}{\epsilon(\omega)}\left[\frac{\omega}{k_D v}K_1\left(\frac{\omega}{k_D v}\right)K_0\left(\frac{\omega}{k_D v}\right)\right]d\omega \qquad [13.83]$$

Como las frecuencias más importantes en el integrando se hallan alrededor de $\omega \sim \omega_p$, el argumento principal de la función de Bessel es

$$\frac{\omega_p}{k_D v} = \frac{\langle u^2\rangle^{1/2}}{v} \qquad [13.84]$$

Si las partículas inciden con velocidades v menores que las velocidades térmicas, este argumento es grande frente a la unidad, y debido al decrecimiento exponencial de las funciones de Bessel para valores grandes del argumento, la pérdida de energía en excitar las oscilaciones del plasma por tales partículas es despreciable. Casi toda la pérdida de energía tiene lugar en colisiones binarias próximas. Si la velocidad es comparable a, o mayor que, las velocidades térmicas, la partícula puede perder cantidades considerables de energía en excitar oscilaciones colectivas. Evidentemente, esta energía de oscilación está localizada en las vecindades de la trayectoria de la partícula hasta distancias del orden de $(v/\langle u^2\rangle^{\frac{1}{2}})k_D^{-1}$.

Si la partícula se mueve rápidamente en comparación con las velocidades térmicas, podemos utilizar las formas conocidas de las funciones de Bessel modificadas para argumentos pequeños. Así, [13.83] se transforma en

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_D b>1} \simeq \frac{1}{2\pi^2}\frac{(ze)^2}{v^2}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left(\frac{i\omega}{\epsilon(\omega)}\right)\ln\left(\frac{1{,}123 k_D v}{\omega}\right)d\omega \qquad [13.85]$$

Como constante dieléctrica vamos a tomar la forma sencilla [7.59], añadiendo algo de amortiguamiento

$$\epsilon(\omega)=\epsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+i\omega\Gamma}\right) \qquad [13.86]$$

Supondremos que la constante de amortiguamiento Γ es pequeña en comparación con ω_p. La combinación

$$\mathrm{Re}\left(\frac{i\omega\epsilon_0}{\epsilon(\omega)}\right)=\omega_p^2\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega^2-\omega_p^2)^2+\omega^2\Gamma^2}$$

tiene el carácter resonante usual que vimos, por ejemplo, en [13.24]. En el límite $\Gamma\ll\omega_p$ de [13.85] conduce al resultado sencillo:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_Db>1}\simeq\frac{(ze)^2}{4\pi\epsilon_0 v^2}\omega_p^2\ln\left(\frac{1{,}123k_Dv}{\omega_p}\right) \qquad [13.87]$$

Este resultado puede combinarse con los del problema 13.3 para dar una expresión para la pérdida total de energía de una partícula que atraviesa un plasma:

$$\frac{dE}{dx}=\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_Db<1}+\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_Db>1}$$
$$\simeq\frac{(ze)^2}{4\pi\epsilon_0 v^2}\omega_p^2\ln\left(\frac{\Lambda v}{\omega_p b_{\mathrm{mín}}}\right) \qquad [13.88]$$

siendo Λ un número del orden de la unidad y estando $b_{\mathrm{mín}}$ dado por el mayor entre [13.6] y [13.40]. La presencia de ω_p en el logaritmo sugiere que las pérdidas de energía tienen lugar en saltos cuánticos de valor $\hbar\omega_p$, de igual forma que la presencia de la frecuencia media $\langle\omega\rangle$ en [13.44] era indicativa de los saltos cuánticos típicos en los átomos. Los electrones que pasan a través de láminas metálicas delgadas presentan este carácter discreto en su pérdida de energía. El fenómeno puede utilizarse para determinar la frecuencia efectiva de plasma en los metales *.

13.7. DISPERSION ELASTICA DE PARTICULAS RAPIDAS POR ATOMOS

En las secciones anteriores hemos tratado la pérdida de energía de partículas que atravesaban la materia. En estas consideraciones se suponía que la trayectoria de la partícula era una línea recta. En realidad esta aproximación no es rigurosamente cierta. Como vimos en la sección 13.1, cualquier intercambio de ímpetu entre los participantes en una colisión conduce a una desviación angular. Señalábamos en las notas de introducción al principio del capítulo que las colisiones con electrones determinaban la pérdida de energía, mientras

* Véase H. RAETHER, *Springer Tracts in Modern Physics*, vol. 38, ed. G. Hohler, Springer-Verlag, Berlín (1965), págs. 84-157.

que las colisiones con los átomos eran las que daban lugar a dispersión. Si despreciamos el apantallamiento del campo coulombiano de núcleo por los electrones, una partícula rápida de momento $p=\gamma Mv$ y carga ze, que pasa por delante de un núcleo pesado de carga Ze, con un parámetro de impacto b, experimentará una desviación angular

$$\theta \simeq \frac{zZe^2}{2\pi\epsilon_0 pvb} \qquad [13.89]$$

de acuerdo con [13.3].

La sección eficaz diferencial de dispersión $d\sigma/d\Omega$ (con dimensiones de área por unidad de ángulo sólido por átomo) se define mediante la relación

$$nb\,db\,d\phi = n\frac{d\sigma}{d\Omega}\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi \qquad [13.90]$$

en donde n es el número de partículas que inciden sobre un átomo por unidad de área y unidad de tiempo. El primer miembro de [13.90] es el número de partículas por unidad de tiempo que inciden con ángulos acimutales entre ϕ y $(\phi+d\phi)$, con parámetros de impacto entre b y $(b+db)$. El segundo miembro es el número de partículas desviadas por unidad de tiempo que emergen con ángulos polares (θ, ϕ) dentro del elemento de ángulo sólido $d\Omega=\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi$. La ecuación [13.90] se limita simplemente a establecer la conservación de partículas, ya que b y θ están relacionados funcionalmente. Podemos, pues, expresar la sección eficaz diferencial de dispersión clásica así:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\text{sen}\,\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \qquad [13.91]$$

Hemos considerado el valor absoluto porque db y $d\theta$ pueden, en general, tener signos opuestos, y la sección eficaz es, por definición, positiva. Si b es una función de θ de varios valores, deberemos sumar en [13.91] las distintas contribuciones.

Mediante la relación [13.89] entre b y θ hallamos la sección eficaz nuclear de dispersión por átomo para ángulos pequeños, hallada por RUTHERFORD,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{zZe^2}{2\pi_0\epsilon pv}\right)^2 \frac{1}{\theta^4} \qquad [13.92]$$

Se observa que los Z electrones de cada átomo dan una contribución Z^{-1} veces la del núcleo. De aquí que podamos no tenerlos en cuenta, excepto por su acción de pantalla. La ley de Rutherford de la dispersión nuclear para ángulos pequeños es también cierta mecanocuánticamente, sin que dependa del *spin* de las partículas incidentes. Estos efectos de *spin* deben ser considerados a ángulos grandes, pero con partículas no relativistas la fórmula clásica de Rutherford,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{8\pi\epsilon_0 Mv^2}\right)^2 \text{cosec}^4\frac{\theta}{2} \qquad [13.93]$$

que se deduce de [13.4], es válida también en el campo de la mecánica cuántica.

Como la mayor parte de la dispersión tiene lugar para ángulos $\theta \ll 1$, e incluso cuando $\theta = \pi/2$ el resultado para ángulos pequeños [13.92] está dentro del 30 por 100 del valor dado por la expresión de Rutherford, resulta suficientemente exacta la utilización de [13.92] para todos los ángulos para los que la descripción mediante un campo coulombiano puntual no apantallado es suficiente.

En el caso de ángulos grandes y pequeños se presentan desviaciones de la aproximación por campo coulombiano puntual, las cuales corresponden a parámetros de impacto pequeño y grande. Cuando b es grande, los efectos de apantallamiento de los electrones atómicos dan lugar a que el potencial decrezca con mayor rapidez que $(1/r)$. En el modelo de Fermi-Thomas podemos aproximar el potencial de forma grosera mediante

$$V(r) \simeq \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-r/a) \qquad [13.94]$$

en que el radio atómico a es

$$a \simeq 1{,}4 a_0 Z^{-1/3} \qquad [13.95]$$

La longitud $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$ es el radio de Bohr del hidrógeno. Para parámetros de impacto del orden de, o mayores que a, el rápido decrecimiento del potencial [13.94] hará que el ángulo de dispersión se anule mucho más rápidamente al aumentar b que si viniera dado por [13.89]. Esto implica que la sección eficaz de dispersión, para ángulos pequeños, en lugar de crecer como θ^{-4}, tenderá a un valor finito en $\theta = 0$. Utilizando un potencial de corte de tipo coulombiano, y mediante un cálculo sencillo, vemos que la sección eficaz tiene la forma general:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 pv}\right)^2 \frac{1}{(\theta^2 + \theta_{\text{mín}}^2)^2} \qquad [13.96]$$

en donde $\theta_{\text{mín}}$ es un ángulo de corte. El mínimo ángulo $\theta_{\text{mín}}$ por debajo del cual la sección eficaz discrepa apreciablemente de la forma simple [13.92], se puede determinar bien sea clásica o mecanocuánticamente. Tal como hacíamos con $b_{\text{mín}}$ en los cálculos de pérdida de energía, el mayor de los dos ángulos es el correcto para ser empleado. Clásicamente, podemos dar una estimación de $\theta_{\text{mín}}$ haciendo $b = a$ en [13.89]. Así tenemos

$$\theta_{\text{mín}}^{(c)} \simeq \frac{zZe^2}{2\pi\epsilon_0 pva} \qquad [13.97]$$

Mecanocuánticamente, debido al tamaño finito del centro dispersante, la trayectoria clásica aproximada debe estar localizada dentro de los límites $\Delta x < a$; la partícula incidente deberá poseer por lo menos una incertidumbre en el ímpetu transversal de $\Delta p \gtrsim \hbar/a$. En las colisiones, para las que la transferencia de ímpetu es grande frente a $\hbar/a$, será válida la fórmula clásica de Rutherford. Pero en las transferencias de ímpetu más pequeñas, será de esperar una uniformización de la sección eficaz debida a la difuminación mecanocuántica de la trayectoria. Esto nos lleva al valor mecanocuántico de $\theta_{\text{mín}}$:

$$\theta_{\text{mín}}^{(q)} \simeq \frac{\hbar}{pa} \qquad [13.98]$$

Observemos que la razón entre los valores clásico y mecanocuántico de $\theta_{\text{mín}}$ es $Zze^2/2\pi\epsilon_0\hbar v$, lo cual está de acuerdo con la razón [13.42] de los valores clásico y cuántico de $b_{\text{mín}}$. Si se trata de partículas rápidas, $(Zze^2/2\pi\epsilon_0\hbar v)$ es menor que la unidad para todas las sustancias excepto las de mayor Z. Así, pues, utilizaremos como $\theta_{\text{mín}}$ el valor cuántico [13.92]. Si utilizamos [13.95] para el radio de apantallamiento a, [13.98] se transforma en:

$$\theta^{(q)}_{\text{mín}} \simeq \frac{Z^{1/3}}{192}\left(\frac{mc}{p}\right) \qquad [13.99]$$

en donde p es el ímpetu de la partícula incidente $(p=\gamma Mv)$ y m es la masa del electrón.

Para ángulos relativamente grandes, la sección eficaz se desvía de [13.92] debido al tamaño finito del núcleo Con electrones y mesones μ, la influencia del tamaño nuclear es un efecto puramente electromagnético, pero con los mesones π, protones, etc., hay además efectos debidos a fuerzas de naturaleza nuclear. Como el efecto global, cualquiera que sea la razón, consiste en disminuir la sección eficaz por debajo del valor predicho por [13.92], nos vamos a limitar a considerar el aspecto electromagnético. A *grosso modo*, podemos aproximar la distribución de carga en un núcleo atómico por una distribución volúmica uniforme en el interior de una esfera de radio R, que decrece rápidamente a cero en el exterior de R. Así, pues, el potencial electrostático en el interior del núcleo no es de la forma $1/r$, sino más bien de forma parabólica con un valor finito en $r=0$.

$$V(r)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\dfrac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 R}\left(1-\dfrac{r^2}{3R^2}\right), & \text{para } r<R\\[2ex] \dfrac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r}, & \text{para } r>R\end{cases} \qquad [13.100]$$

Una particularidad del campo coulombiano debido a una carga puntual es que la sección eficaz mecanocuántica viene dada por la fórmula clásica de Rutherford. Así, pues, para un núcleo puntual no hay necesidad de considerar la división de las regiones angulares en ángulos que corresponden a parámetros de impacto mecanocuántico $b^{(q)}_{\text{mín}}$ [13.40]. No obstante, en un núcleo de tamaño finito interviene la longitud de onda de De Broglie de la partícula incidente. Si consideramos paquetes de onda que inciden sobre el potencial [13.100], relativamente constante (en el interior de $r=R$), habrá desviaciones apreciables de la sencilla fórmula [13.92]. La situación es completamente análoga a la difracción de ondas por un objeto esférico, tema que fue considerado en el capítulo 9. La dispersión se reduce a ángulos menores que $\sim(\lambda\!\!\!^{-}/R)$, en donde $\lambda\!\!\!^{-}$ es la longitud de la onda (dividida por 2π). Para ángulos grandes, las ondas procedentes de distintas partes del sistema difractante interfieren, ocasionando así un rápido decrecimiento acompañado quizá de máximos y mínimos. Puesto que la longitud de onda de la partícula es $\lambda\!\!\!^{-}=\hbar/p$, el ángulo de dispersión máximo, más allá del cual la sección eficaz cae muy por debajo de la que corresponde a la ley θ^{-4}, es

$$\theta_{\text{máx}} \simeq \frac{\hbar}{pR} \qquad [13.101]$$

Si utilizamos el valor estimado $R \simeq (e^2/8\pi\epsilon_0 mc^2) \cdot A^{1/3} = 1{,}4A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ cm, tenemos el valor numérico

$$\theta_{máx} \simeq \frac{274}{A^{1/3}} \left(\frac{mc}{p} \right) \qquad [13.102]$$

Observemos que para todos los valores de Z y A, $\theta_{máx} \gg \theta_{mín}$. Si el ímpetu de la partícula incidente es tan pequeño que $\theta_{máx} \gtrsim 1$, el tamaño del núcleo no tiene efecto apreciable en la dispersión. En un blanco de aluminio, $\theta_{máx} = 1$ cuando $p \sim 50$ MeV/c, que corresponde a una energía cinética de unos 50 MeV, 12 MeV y 1,3 MeV para electrones, mesones μ y protones, respectivamente. Solamente para energías mayores que éstas se hacen importantes los efectos de tamaño nuclear en la dispersión. Para este valor del ímpetu, $\theta^{(q)}_{mín} \sim 10^{-4}$ radianes.

En la figura 13.9 se presenta el comportamiento general de la sección eficaz. La curva punteada corresponde a la aproximación de Rutherford para ángulos pequeños, mientras que la curva continua nos muestra el comporta-

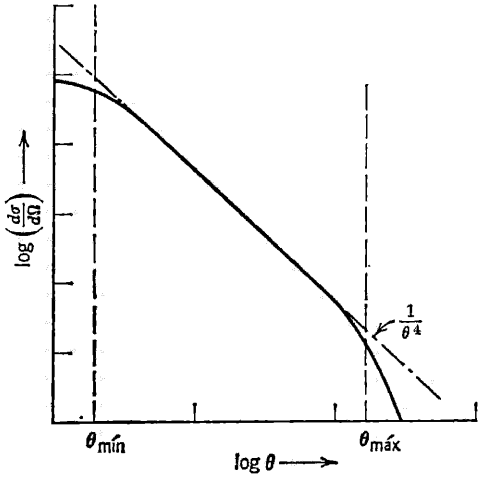


FIG. 13.9. Dispersión atómica, para ángulos pequeños se incluyen los efectos del apantallamiento electrónico y para ángulos grandes los del tamaño finito del núcleo.

miento cualitativo de la sección eficaz, incluidos el apantallamiento y tamaño finito del núcleo. La sección eficaz total de dispersión puede obtenerse integrando [13.96] a todos los ángulos sólidos:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{zZe^2}{\epsilon_0 pv} \right)^2 \int_0^\infty \frac{\theta \, d\theta}{(\theta^2_{mín} + \theta^2)^2} \qquad [13.103]$$

Lo cual da

$$\sigma \simeq \frac{1}{4\pi} \left(\frac{zZe^2}{\epsilon_0 pv} \right)^2 \frac{1}{\theta^2_{mín}} = \frac{a^2}{4\pi} \left(\frac{zZe^2}{\epsilon_0 \hbar v} \right)^2 \qquad [13.104]$$

en donde la forma final se obtiene usando $\theta_{\text{mín}}^{(q)}$ [13.98]. Nos dice esta expresión que, a grandes velocidades, la sección eficaz total puede ser bastante menor que el valor clásico dado por el área geométrica πa^2.

13.8. ANGULO DE DISPERSION CUADRATICO MEDIO Y DISTRIBUCION ANGULAR EN LA DISPERSION MULTIPLE

La dispersión de Rutherford está confinada a ángulos muy pequeños aun para un campo coulombiano puntual y para partículas rápidas $\theta_{\text{máx}}$ es pequeño comparado con la unidad. Así, pues, existe una gran probabilidad de que se produzca dispersión con ángulos pequeños. Una partícula que atraviesa un espesor finito de materia experimentará muchas desviaciones de pequeños ángulos y, por lo general, emergerá con un ángulo pequeño, resultado de la superposición estadística de un gran número de desviaciones. Solamente en muy raras ocasiones se nos desviará la partícula en un ángulo grande, y como estos sucesos son poco frecuentes, la partícula en cuestión habrá efectuado solamente una colisión de desviación grande. Podemos, pues, dividir el campo de variabilidad del ángulo en dos regiones, una de ángulos comparativamente grandes que contiene solamente dispersión simple y otra de ángulos muy pequeños a la que corresponde dispersión múltiple o compuesta. Por consideración separada de estas dos regiones podemos obtener una aproximación de la distribución angular completa. La región intermedia a la que pertenecen las llamadas dispersiones mixtas, debe permitirnos una transición suave de los ángulos pequeños a los grandes.

La magnitud más importante en la región de dispersión múltiple, en la que tenemos una sucesión grande de desviaciones pequeñas, distribuidas simétricamente alrededor de la dirección de incidencia, es el ángulo cuadrático medio correspondiente a una sola desviación. Este ángulo se define por medio de:

$$\langle\theta^2\rangle = \frac{\int \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega} \qquad [13.105]$$

Con las aproximaciones de la sección 13.7 obtenemos

$$\langle\theta^2\rangle = 2\theta_{\text{mín}}^2 \ln\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{\theta_{\text{mín}}}\right) \qquad [13.106]$$

Si se utiliza el valor cuántico de $\theta_{\text{mín}}$, junto con el [13.102] de $\theta_{\text{máx}}$, la ecuación [13.106] para $A \simeq 2Z$, toma la forma:

$$\langle\theta^2\rangle \simeq 4\theta_{\text{mín}}^2 \ln(204Z^{-1/3}) \qquad [13.107]$$

Si el tamaño del núcleo no importara (generalmente caso de interés sólo para electrones y tal vez otras partículas con energías muy bajas), $\theta_{\text{máx}}$ debería hacerse igual a la unidad en [13.106]. De este modo, el argumento que aparece en el logaritmo de [13.107] sería $\left(\frac{192}{Z^{1/3}}\frac{p}{mc}\right)^2$, en lugar de $(204Z^{-1/3})$.

A menudo interesa utilizar el ángulo de dispersión proyectado θ', haciéndose dicha proyección sobre cierto plano, tal como el de una emulsión fotográfica o una cámara de burbujas, como se indica en la figura 13.10. Para ángulos pequeños se demuestra fácilmente que

$$\langle \theta'^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle \qquad [13.108]$$

En cada colisión, las desviaciones angulares obedecen a la fórmula de Rutherford [13.92], entre los límites $\theta_{\text{mín}}$ y $\theta_{\text{máx}}$; el valor medio de dicho ángulo

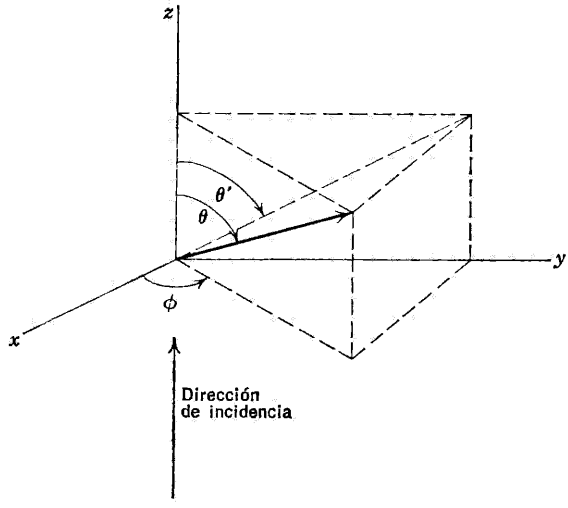


FIG. 13.10.

es cero (observado a partir de la dirección de incidencia o también como ángulo de proyección), y el valor cuadrático medio $\langle \theta^2 \rangle$ viene dado por [13.106]. Como las colisiones sucesivas son sucesos independientes, podemos basarnos en el teorema estadístico del límite central para demostrar que en un gran número n de tales colisiones la distribución angular será aproximadamente una gaussiana alrededor de la dirección al frente con un ángulo cuadrático medio $\langle \Theta^2 \rangle = n \langle \theta^2 \rangle$. El número de colisiones que tienen lugar cuando la partícula atraviesa un espesor t de material que contiene N átomos por unidad de volumen es:

$$n = N\sigma t \simeq \frac{N}{4\pi} \left(\frac{zZe^2}{\epsilon_0 pv} \right)^2 \frac{t}{\theta^2_{\text{mín}}} \qquad [13.109]$$

Lo cual quiere decir que el ángulo cuadrático medio de la gaussiana es

$$\langle \Theta^2 \rangle \simeq \frac{N}{2\pi} \left(\frac{zZe^2}{\epsilon_0 pv} \right)^2 \ln \left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{\theta_{\text{mín}}} \right) t \qquad [13.110]$$

O haciendo uso de [13.107] para expresar $\langle \theta^2 \rangle$, tenemos

$$\langle \Theta \rangle^2 \simeq \frac{N}{\pi} \left(\frac{zZe^2}{\epsilon_0 pv} \right)^2 \ln (204 Z^{-1/3})\, t \qquad [13.111]$$

El ángulo cuadrático medio aumenta de forma lineal con el espesor t. Pero todavía para espesores razonables tales que la partícula no pierda energía apreciable, la gaussiana será muy aguda para ángulos muy pequeños hacia adelante.

La distribución del ángulo proyectado de la dispersión múltiple es

$$P_M(\theta')\,d\theta' = \frac{1}{\sqrt{\pi\langle\Theta^2\rangle}} \exp\left(-\frac{\theta'^2}{\langle\Theta^2\rangle}\right) d\theta' \qquad [13.112]$$

en donde se considera tanto los valores positivos de θ' como los negativos. La fórmula de Rutherford para ángulos pequeños [13.92] también puede expresarse en función del ángulo proyectado en la forma:

$$\frac{d\sigma}{d\theta'} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{zZe^2}{\epsilon_0 pv}\right)^2 \frac{1}{\theta'^3} \qquad [13.113]$$

Esto conduce a una distribución de dispersión simple para el ángulo proyectado:

$$P_S(\theta')\,d\theta' = Nt\frac{d\sigma}{d\theta'}\,d\theta' = \frac{1}{8\pi} Nt\left(\frac{zZe^2}{\epsilon_0 pv}\right)^2 \frac{d\theta'}{\theta'^3} \qquad [13.114]$$

La distribución correspondiente a la dispersión simple sólo es válida para ángulos grandes comparados con $\langle\Theta^2\rangle^{1/2}$, y contribuye a dar una cola a la distribución gaussiana.

Si expresamos los ángulos en función del ángulo proyectado relativo:

$$\alpha = \frac{\theta'}{\langle\Theta^2\rangle^{1/2}} \qquad [13.115]$$

las distribuciones de dispersión simple y múltiple pueden escribirse:

$$\begin{aligned} P_M(\alpha)\,d\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha \\ P_S(\alpha)\,d\alpha &= \frac{1}{8\ln(204Z^{-1/3})}\,\frac{d\alpha}{\alpha^3} \end{aligned} \qquad [13.116]$$

en la que hemos utilizado [13.111] para sustituir $\langle\Theta^2\rangle$. Notemos que con estas unidades las proporciones relativas de dispersiones simples y múltiples resultan independientes del espesor y sólo dependen de Z. Incluso esta dependencia de Z no es demasiado acusada, pues el factor $8\ln(204Z^{-1/3})$ tiene el valor 36 para $Z=13$ (aluminio) y el valor 31 para $Z=82$ (plomo). La figura 13.11 nos muestra el comportamiento general de las distribuciones de dispersión en función de α. La transición de dispersión múltiple a simple se realiza en las vecindades de $\alpha \simeq 2{,}5$. En este punto, la gaussiana tiene un valor de 1/600 de su valor de pico. Así, la distribución de dispersión simple añade solamente una cola muy pequeña a la curva de dispersión múltiple.

Hay dos causas que ocasionan desviaciones del comportamiento representado en la figura 13.11. La forma de la gaussiana es el límite a que tiende la distribución angular para valores de n muy grandes. Si el espesor t es tal que n [13.109] no es muy grande (es decir, $n \lesssim 100$), la distribución obedece a la

curva de dispersión simple para ángulos más pequeños que $\alpha \simeq 2{,}5$ y el máximo para el ángulo cero es algo más agudo que en la gaussiana. Por el contrario, si el espesor es bastante grande, el ángulo cuadrático medio $\langle \Theta_2 \rangle$ se hace

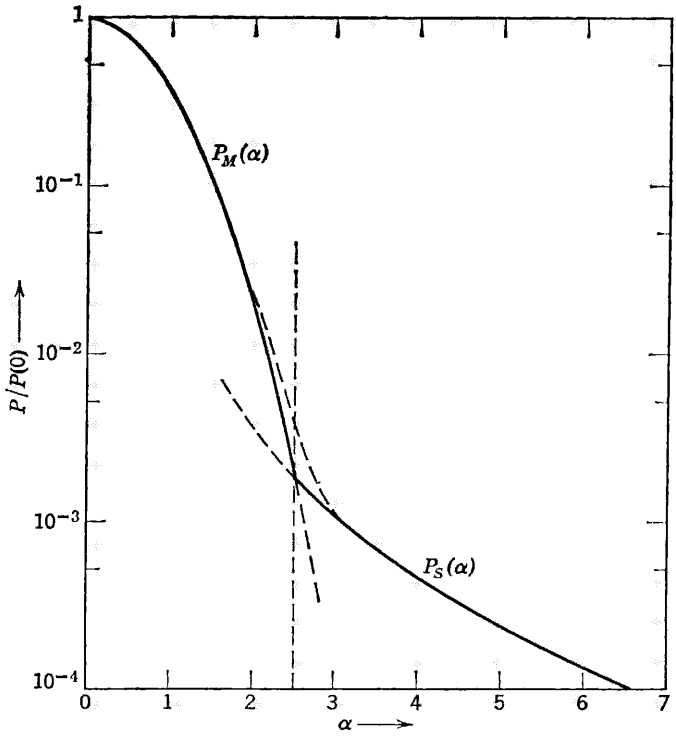


FIG. 13.11. Distribuciones del ángulo proyectado para dispersión simple y múltiple. En la región intermedia (α entre 2 y 3) la curva de trazos indica la transición suave desde la dispersión múltiple cuando los ángulos son pequeños (en forma de gaussiana, aproximadamente) a la dispersión simple para grandes ángulos (proporcional a α^{-3}).

comparable al ángulo $\theta_{\text{máx}}$ [13.102] que limita la amplitud angular de la distribución de dispersión simple. Para espesores mayores, la curva de dispersión múltiple se extiende angularmente más allá de la región de dispersión simple, con lo que la cola debida a ésta ya no aparece en la distribución (véase el problema 13.5).

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

Los problemas de penetración de partículas en la materia interesaron a NIELS BOHR durante toda su vida. Una presentación agradable con insistencia en la actuación combinada de efectos clásicos y mecanocuánticos aparece en su extenso artículo de revisión de 1948.

BOHR.

Tablas numéricas y gráficas de valores de pérdidas de energía, así como fórmulas clave se dan en

ROSSI, cap. 2.
SEGRE, artículo por H. A. BETHE y J. ASHKIN.

Véase también

U. FANO, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **13**, 1, (1963).

ROSSI da un tratamiento semiclásico de la pérdida de energía y la dispersión semejante al nuestro. También considera la cuestión de las fluctuaciones en la pérdida de energía, incluyendo la teoría de Landau-Symon.

El efecto de densidad sobre la pérdida de energía de partículas extremadamente relativistas aparece discutida, con numerosos resultados en forma gráfica para diferentes sustancias, en

R. M. STERNHEIMER, en *Methods of Experimental Physics*, vol. 5A, *Nuclear Physics*, parte A, eds. L. C. L. Yuan y C. S. Wu, Academic, Nueva York (1961), págs. 4-55.

La radiación de Cherenkov se discute en muchos sitios. Su aplicación a detectores de partículas se describe en el libro de Yuan y Wu, que acabamos de mencionar, y también en

D. M. RITSON, ed., *Techniques in High Energy Physics*, Interscience, Nueva York (1961).

Sin embargo, para aplicaciones recientes el lector debe dirigirse a las revistas como *Nuclear Instruments and Methods*.

PROBLEMAS

13.1. Una partícula pesada de masa M, carga ze y velocidad v no relativista, entra en colisión con un electrón libre de masa m y carga $-e$ inicialmente en reposo. Sin más aproximaciones que la de movimiento no relativista y $M \gg m$, demuéstrese que la energía transferida al electrón en esta colisión de Coulomb, en función del parámetro de impacto b es

$$\Delta E(b) = \frac{(ze)^2}{8\pi^2\epsilon_0^2 m v^2} \frac{1}{b^2 + (ze^2/4\pi\epsilon_0 m v^2)^2}$$

13.2. *a)* Tomando $\hbar\langle\omega\rangle = 12Z$ eV en la fórmula mecanocuántica de la pérdida de energía, calcúlese la pérdida de energía (en Mev/cm) en aire en condiciones normales de presión y temperatura, aluminio, cobre, plomo, para un protón y un mesón μ, cada uno con energías cinéticas de 10, 100, 1000 Mev.

b) Transfórmense los resultados de pérdida de energía en Mev-cm^2/g y compárense los valores obtenidos en las distintas sustancias. Explíquese por qué todas las pérdidas de energía en Mev-cm^2/g difieren una de otra en un factor de 2, mientras que los valores en Mev/cm difieren grandemente.

13.3. Considérese la pérdida de energía por colisiones próximas de una partícula pesada no relativista, de carga ze, que pasa a través de un plasma electrónico. Supóngase que entre la partícula incidente y los electrones se ejerce la interacción de Coulomb apantallada [10.98].

a) Demuéstrese que la transferencia de energía en una colisión de parámetro de impacto b viene dada de forma aproximada por

$$\Delta E(b) \simeq \frac{(ze^2)^2}{8\pi^2\epsilon_0^2 m v^2} k_D^2 K_1^2(k_D b)$$

en donde m es la masa del electrón, v la velocidad de la partícula incidente, y k_D el número de ondas de Debye [10.99].

b) Determínese la pérdida de energía por unidad de distancia recorrida para las colisiones con parámetro de impacto mayor que $b_{\text{mín}}$. Suponiendo que $k_D b_{\text{mín}} \ll 1$, demuéstrese que:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{K_D b < 1} \simeq \frac{(ze)^2}{4\pi\epsilon_0 v^2} \omega_p^2 \ln\left(\frac{1}{1{,}47\, K_D b_{\text{mín}}}\right)$$

donde $b_{\text{mín}}$ está dado por el mayor entre [13.6] y [13.40].

13.4. Con las mismas aproximaciones que las que se utilizaron en la discusión de la dispersión múltiple, demuéstrese que el desplazamiento transversal *proyectado* y (véase Fig 13.10) de una partícula incidente viene descrito de forma aproximada por una distribución de Gauss

$$P(y)\, dy = \text{A} \exp\left[\frac{-y^2}{2\langle y^2\rangle}\right] dy$$

en donde la media de los cuadrados de los desplazamientos es $\langle y^2\rangle = (x^2/6)\langle\Theta^2\rangle$, siendo x el espesor del material atravesado y $\langle\Theta^2\rangle$ la media de los cuadrados de los ángulos de dispersión.

13.5. Si tenemos en cuenta el tamaño finito de los núcleos en la cola correspondiente a dispersión simple de la distribución de dispersión múltiple, hay un espesor crítico x_c más allá del cual no se presenta la cola de dispersión simple.

a) Defínase x_c de forma adecuada y calcúlese su valor (en cm) para el aluminio y el plomo, suponiendo que la partícula incidente es una partícula relativista.

b) Calcúlese el número de colisiones que tienen lugar para este espesor y averígüese si la aproximación gaussiana es válida.

13.6. Suponiendo que el plexiglás o la lucita tienen un índice de refracción de 1,50 en la región visible, calcúlese el ángulo de emisión de radiación de Cherenkov visible para electrones y protones en función de sus energías en MeV. Determínese cuántos «cuantos» de longitudes de onda entre 4 000 y 6 000 angstroms son emitidos por centímetro de recorrido en lucita por un electrón de 1 MeV, un protón de 500 MeV, un protón de 5 GeV.

13.7. Una partícula de carga ze se mueve a lo largo del eje z con velocidad constante v, pasando por $z=0$ en $t=0$. El medio a través del cual se mueve la partícula está descrito por una constante dieléctrica $\epsilon(\omega)$.

a) Empezando con el potencial $\Phi(k, \omega)$ de [13.57], demuéstrese que el potencial de frecuencia ω está dado en función de la coordenada espacial x por:

$$\Phi(\omega, x) = \frac{ze}{4\pi v \epsilon(\omega)} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, K_0\left(\frac{|\omega|\rho}{v}\sqrt{1-\beta^2\epsilon}/\epsilon_0\right) e^{i\omega z/v}$$

siendo z y $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ las coordenadas cilíndricas del punto de observación.

b) Suponiendo que ϵ es independiente de la frecuencia y que $\beta^2\epsilon < \epsilon_0$, tómese la transformada de Fourier con respecto a ω de la expresión de la parte *a)* y obténgase $\Phi(x, t)$. Calcúlense los campos eléctrico y magnético y compárenlos con los campos en el vacío [11.152]. Demuéstrese que, entre otras cosas, el factor γ en el vacío aparece sustituido por $\Gamma=(1-\beta^2\epsilon/\epsilon_0)^{-1/2}$.

c) Repítanse los cálculos de *a)* y *b)* cuando $\beta^2\epsilon > \epsilon_0$. Demuéstrese que ahora

$$\Phi(\omega, x)=\frac{ze}{4\pi v\epsilon(\omega)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{i\omega z/v}\left[-N_0\left(\frac{|\omega|\rho}{v}\sqrt{\beta^2\epsilon/\epsilon_0-1}\right)\pm iJ_0\left(\frac{|\omega|\rho}{v}\sqrt{\beta^2\epsilon/\epsilon_0-1}\right)\right]$$

para $\omega \gtrless 0$. Calcúlese la transformada de Fourier restante para obtener $\Phi(x, t)$. Relaciónese el resultado con el dado en la sección 13.5 para $A(x, t)$.

13.8. Un monopolo magnético con carga magnética g pasa a través de la materia y pierde energía por colisiones con los electrones, lo mismo que ocurre con una partícula con carga eléctrica ze.

a) Dentro de la misma aproximación presentada en las secciones 13.1 a 13.3, demuéstrese que la energía perdida por unidad de distancia está dada aproximadamente por [13.44], pero con $ze \to \beta g/c$, dando:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\substack{\text{monopolo}\\ \text{magnético}}} \simeq NZ\frac{g^2e^2}{4\pi\epsilon_0^2mc^2}\ln\left(\frac{2\gamma^2mv^2}{\hbar\langle\omega\rangle}\right)$$

b) Cuando la carga magnética está determinada por la condición de cuantización de Dirac [6.153], ¿qué valor de z es necesario para que una partícula cargada ordinaria a velocidades relativistas pierda energía al mismo ritmo que el monopolo? Dibújese, para el monopolo magnético, una curva de dE/dx equivalente a la figura 13.4 y coméntense las diferencias.

RADIACION DE CARGAS EN MOVIMIENTO

Como es bien conocido, las cargas aceleradas emiten radiación electromagnética. En el capítulo 9 hemos tratado ejemplos de radiación debida a densidades macroscópicas de carga y corriente variables con el tiempo, que son fundamentalmente cargas en movimiento. Volveremos a tales problemas en el capítulo 16, en que trataremos sistemáticamente la radiación multipolar, pero hay una clase de fenómenos de radiación en que la fuente es una carga puntual en movimiento, o un pequeño número de tales cargas. En estos problemas resulta interesante desarrollar el formalismo de modo que la intensidad y polarización de la radiación estén relacionadas directamente con las propiedades de la trayectoria y movimiento de la carga. De especial interés es la radiación y su espectro de frecuencias. Para movimientos no relativistas, la radiación viene descrita por el ya conocido resultado de Larmor (véase la sección 14.2). Pero para partículas relativistas aparece un cierto número de efectos interesantes y poco corrientes. Es en estos efectos relativistas en los que queremos insistir. En el presente capítulo se deducen una serie de resultados generales que se aplican a diversos ejemplos de cargas que describen movimientos determinados, especialmente en campos de fuerza externos. La única excepción es un tratamiento de la radiación de transición, el fenómeno cooperativo que ocurre cuando una partícula cruza la interfase entre dos medios de propiedades dieléctricas diferentes. El capítulo 15 tratará de la radiación emitida en las colisiones atómicas y nucleares.

14.1. LOS POTENCIALES DE LIENARD-WIECHERT Y LOS CAMPOS DE UNA CARGA PUNTUAL

En la sección 12.11 se demostró que, si no hay campos incidentes, el 4-vector potencial producido por una partícula cargada en movimiento es:

$$A^{\alpha}(x)=\mu_0 \int d^4x'\, D_r(x-x')J^{\alpha}(x') \qquad [14.1]$$

en donde $D_r(x-x')$ es la función de Green retardada [12.133] y

$$J^{\alpha}(x')=ec \int d\tau\, V^{\alpha}(\tau)\delta^{(4)}[x'-r(\tau)] \qquad [14.2]$$

es el 4-vector densidad de corriente de la carga, $V^{\alpha}(\tau)$ es su 4-velocidad y $r^{\alpha}(\tau)$ su posición. Al introducir en [14.1] la función de Green y la densidad de

corriente, después de integrar respecto a d^4x', se obtiene:

$$A^\alpha(x)=\frac{\mu_0 ec}{2\pi}\int d\tau\, V^\alpha(\tau)\theta[x_0-r_0(\tau)]\delta\{[x-r(\tau)]^2\} \qquad [14.3]$$

La integral que resta, extendida al tiempo propio de la carga, sólo da contribución en el instante $\tau=\tau_0$, estando τ_0 definido por la condición del cono de luz:

$$[x-r(\tau_0)]^2=0 \qquad [14.4]$$

y el requisito de que exista retardo $x_0>r_0(\tau_0)$. En la figura 14.1 se indica esquemáticamente el significado de estas condiciones. La función de Green

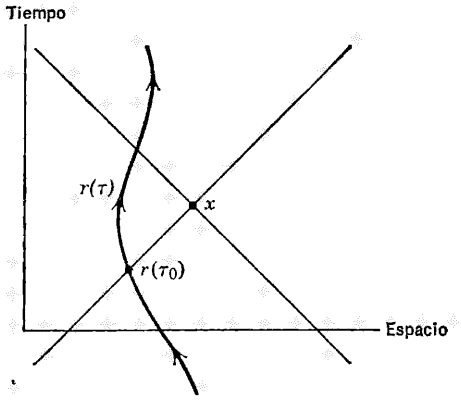


FIG. 14.1.

sólo es diferente de cero en el cono de luz correspondiente al pasado del punto de observación. La línea de universo de la partícula $r(\tau)$ corta al cono de luz en los dos únicos puntos, uno anterior y otro posterior a x_0. El punto anterior, $r^\alpha(\tau_0)$, es la única parte de la trayectoria que contribuye a los campos en x^α. Para calcular [14.3], utilizaremos la regla,

$$\delta[f(x)]=\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}\right|}$$

en donde los puntos $x=x_i$ son los ceros de $f(x)$, supuestos simples. Necesitamos:

$$\frac{d}{d\tau}[x-r(\tau)]^2=-2[x-r(\tau)]_\beta V^\beta(\tau) \qquad [14.5]$$

evaluada en el punto $\tau=\tau_0$. Por consiguiente, el 4-vector potencial es:

$$A^\alpha(x)=\left.\frac{\mu_0 ceV^\alpha(\tau)}{4\pi V\cdot[x-r(\tau)]}\right|_{\tau=\tau_0} \qquad [14.6]$$

en la que τ_0 está definida por [14.4].

Los potenciales [14.6] se conocen como *potenciales de Liénard-Wiechert.* Frecuentemente se escriben en forma no covariante, pero es más familiar, quizá, como sigue. La restricción impuesta por el cono de luz [14.4] implica que $x_0 - r_0(\tau_0) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(\tau_0)| \equiv R$. Entonces,

$$\begin{aligned} V \cdot (x - r) &= V_0[x_0 - r_0(\tau_0)] - \boldsymbol{V} \cdot [\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(\tau_0)] \\ &= \gamma cR - \gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} R \\ &= \gamma cR(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}) \end{aligned} \qquad [14.7]$$

siendo $\boldsymbol{n}$ un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(\tau)$ y $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}(\tau)/c$. Así, pues, los potenciales [14.6] pueden escribirse:

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = \left[\frac{e}{4\pi\epsilon_0(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})R} \right]_{\text{ret}} ; \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \left[\frac{\mu_0 e \boldsymbol{v}}{4\pi(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})R} \right]_{\text{ret}} \qquad [14.8]$$

Los corchetes con la indicación «ret» como subíndice significan que la magnitud en el corchete debe ser evaluada en el instante retardado $r_0(\tau_0) = x_0 - R$. Es evidente que para movimiento no relativista los potenciales se reducen a los resultados bien sabidos.

Los campos electromagnéticos $F^{\alpha\beta}(x)$ pueden calcularse directamente de [14.6] o [14.8], pero es más sencillo volver a la integral extendida a $d\tau$, [14.13]. Al calcular $F^{\alpha\beta}$ la diferenciación respecto al punto de observación x actuará sobre las funciones theta y delta. La diferenciación de la función theta dará $\delta[x_0 - r_0(\tau)]$, de modo que restringe la función delta a ser $\delta(-R^2)$. No habrá contribución de esta diferenciación salvo en $R = 0$. Excluyendo el punto $R = 0$ de las consideraciones, la derivada $\partial^\alpha A^\beta$ es

$$\partial^\alpha A^\beta = \frac{\mu_0 e c}{2\pi} \int d\tau \; V^\beta(\tau) \theta[x_0 - r_0(\tau)] \partial^\alpha \delta\{[x - r(\tau)]^2\} \qquad [14.9]$$

La derivada parcial puede escribirse:

$$\partial^\alpha \delta[f] = \partial^\alpha f \cdot \frac{d}{df} \delta[f] = \partial^\alpha f \cdot \frac{d\tau}{df} \cdot \frac{d}{d\tau} \delta[f]$$

siendo $f = [x - r(\tau)^2]$. La diferenciación indicada da:

$$\partial^\alpha \delta[f] = -\frac{(x - r)^\alpha}{V \cdot (x - r)} \frac{d}{d\tau} \delta[f]$$

Cuando se introduce esto en [14.9] y se realiza la integración por partes, el resultado es:

$$\partial^\alpha A^\beta = \frac{\mu_0 e c}{2\pi} \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x - r)^\alpha V^\beta}{V \cdot (x - r)} \right] \theta[x_0 - r[(\tau)] \delta\{[x - r(\tau)]^2\} \qquad [14.10]$$

En la integración por partes la diferenciación de la función theta no da contribución alguna, como ya se ha indicado. La forma de [14.10] es la misma que la de la [14.3], con $V^\alpha(\tau)$ reemplazado por el término de la derivada. Por tanto, el resultado puede interpretarse como la sustitución de [14.6]. El tensor

intensidad del campo es:

$$F^{\alpha\beta}=\frac{e}{4\pi\epsilon_0 cV\cdot(x-r)}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{(x-r)^\alpha V^\beta-(x-r)^\beta V^\alpha}{V\cdot(x-r)}\right] \qquad [14.11]$$

En esta expresión r^α y V^α son funciones de τ. Después de la diferenciación la expresión completa debe evaluarse en el tiempo propio retardado τ_0.

El tensor intensidad del campo $F^{\alpha\beta}$ [14.11] es manifiestamente covariante, pero no explícito. Algunas veces es útil tener los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ como funciones explícitas de la velocidad y aceleración de la carga. Para llevar a cabo la diferenciación de [14.11] algunos ingredientes necesarios son:

$$\left.\begin{aligned}(x-r)^\alpha&=(R,R\boldsymbol{n});\qquad V^\alpha=(\gamma c,\gamma c\boldsymbol{\beta})\\ \frac{dV^\alpha}{d\tau}&=[c\gamma^4\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}},\ \gamma c^2\dot{\boldsymbol{\beta}}+c\gamma^4\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})]\\ \frac{d}{d\tau}[V\cdot(x-r)]&=-c^2+(x-r)_\alpha\frac{dV^\alpha}{d\tau}\end{aligned}\right\} \qquad [14.12]$$

siendo $\dot{\boldsymbol{\beta}}=d\boldsymbol{\beta}/dt$, la aceleración ordinaria dividida por c, cuando se emplean estas expresiones y la [14.7], pueden escribirse los campos [14.11] en las formas, inelegantes, pero quizá más intuitivas,

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}]_{\text{ret}} \qquad [14.13]$$

$$\boldsymbol{E}(x,t)=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^3R^2}\right]_{\text{ret}}+\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c}\left[\frac{\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^3R}\right]_{\text{ret}} \qquad [14.14]$$

Los campos [14.13] y [14.14], en forma natural, se dividen en «campos de velocidad», que no dependen de la aceleración, y «campos de aceleración», que dependen linealmente de $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Los campos de velocidad son campos esencialmente estáticos que decrecen como R^{-2}, mientras que los campos de aceleración son, tanto $\boldsymbol{E}$ como $\boldsymbol{B}$, campos de radiación típicos transversales al radio vector y que decrecen como R^{-1}.

En el caso particular de una partícula en movimiento uniforme el segundo término de [14.14] está ausente. El primer término, el campo de velocidad, debe ser el mismo que el que se obtuvo en la sección 11.10 por medio de una transformación de Lorentz del campo de Coulomb estático. Un modo de establecer esto es notar que en [14.11] para $F^{\alpha\beta}$, si V^α es constante, el campo es:

$$F^{\alpha\beta}=\frac{ec}{4\pi\epsilon_0[V\cdot(x-r)]^3}\cdot[(x-r)^\alpha V^\beta-(x-r)^\beta V^\alpha] \qquad [14.15]$$

de acuerdo con la tercera forma covariante del problema 11.15. Sin embargo, puede ser interesante hacer la transformación de las coordenadas de la carga desde su posición presente (utilizada en la sección 11.10) a la posición retardada aquí utilizada con el fin de demostrar explícitamente que las expresiones [11.152] y [14.14], de apariencia diferente, son, en realidad la misma. En la figura 14.2 se indican las dos posiciones de la carga, los puntos P y P', en tanto que O es el punto de observación. La distancia $P'Q$ es $\beta r\cos\theta=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}R$. Por consiguiente, la distancia OQ es $(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})R$. Pero de los triángulos OPQ y

$PP'Q$ tenemos $[1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})R]^2=r^2-(PQ)^2=r^2-\beta^2R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$. Entonces en el triángulo OMP' tenemos $R\,\mathrm{sen}\,\theta=b$, de modo que:

$$[(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})R]^2=b^2+v^2t^2=\frac{1}{\gamma^2}(b^2+\gamma^2v^2t^2) \qquad [14.16]$$

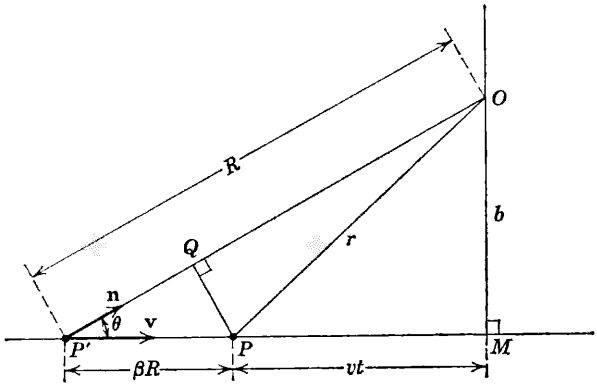


FIG. 14.2. Posiciones actual y retardada de una carga en movimiento uniforme

La componente transversal E_2 de [11.152],

$$E_2=\frac{e\gamma b}{4\pi\epsilon_0(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} \qquad [14.17,a]$$

puede escribirse entonces en función de la posición retardada, en la forma

$$E_2=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{b}{\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^3R^3}\right]_{\mathrm{ret}} \qquad [14.17,b]$$

Esta es, precisamente, la componente transversal del campo de velocidad de [14.14]. Las otras componentes de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ se obtienen en forma semejante.

14.2. POTENCIA TOTAL RADIADA POR UNA CARGA ACELERADA. FORMULA DE LARMOR Y SU GENERALIZACION RELATIVISTA

Si una carga está acelerada, pero se observa desde un sistema de referencia en que su velocidad es pequeña frente a la de la luz, el campo de aceleración de [14.14] se reduce a

$$\boldsymbol{E}_a=\frac{e}{4\pi\epsilon_0c}\left[\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{R}\right]_{\mathrm{ret}} \qquad [14.18]$$

El flujo energético instantáneo viene dado por el vector de Poynting

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c\mu_0}|\boldsymbol{E}_a|^2\boldsymbol{n} \qquad [14.19]$$

O sea, que la potencia radiada por unidad de ángulo sólido es *

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{1}{c\mu_0}|R\boldsymbol{E}_a|^2=\frac{e^2}{16\pi^2 c\epsilon_0}|\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 \qquad [14.20]$$

Si Θ es el ángulo entre la aceleración $\dot{\boldsymbol{v}}$ y $\boldsymbol{n}$, como se indica en la figura 14.3, entonces la potencia radiada puede escribirse:

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}|\dot{\boldsymbol{v}}|^2\,\mathrm{sen}^2\,\Theta \qquad [14.21]$$

Esta fórmula presenta la dependencia angular característica en $\mathrm{sen}^2\,\Theta$ que es un resultado bien conocido. De [14.18] notamos que la radiación está polariza-

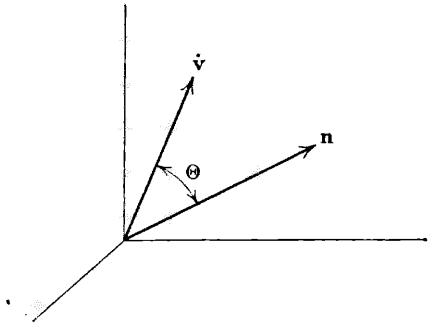


FIG. 14.3.

da en el plano determinado por $\dot{\boldsymbol{v}}$ y $\boldsymbol{n}$. La potencia total instantánea radiada se obtiene integrando [14.21] a todos los ángulos sólidos. Así tenemos

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}|\dot{\boldsymbol{v}}|^2 \qquad [14.22]$$

Este es el familiar resultado de Larmor para una carga acelerada, no relativista.

La fórmula de Larmor [14.22] es susceptible de generalización recurriendo a argumentos de covarianza bajo las transformaciones de Lorentz; así se obtiene un resultado válido para velocidades arbitrarias de la carga. La energía electromagnética radiada se comporta en las transformaciones de Lorentz como la componente temporal de un 4-vector (véase el problema 12.15). Esto puede emplearse (véase ROHRLICH, pág. 109 ss.) para demostrar que la potencia P es una magnitud invariante de Lorentz. Si podemos hallar un invariante de Lorentz que se reduzca a la fórmula de Larmor [14.22] para $\beta \ll 1$, habremos obtenido la generalización deseada. Por supuesto que existen muchos invariantes de Lorentz que se reducen a la forma deseada para $\beta \to 0$. Pero de [14.14] resulta

* Al expresar distribuciones angulares de radiación pondremos siempre de manifiesto la polarización de forma explícita mediante el cuadrado de un vector proporcional al campo eléctrico. Si se desea la distribución angular de algún tipo particular de polarización, puede obtenerse entonces tomando el producto escalar del vector por el vector polarización adecuado antes de elevar al cuadrado.

evidente que el resultado general que pretendemos debe incluir solamente $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Con esta restricción en el orden de las derivadas que pueden aparecer, el resultado es único. Para hallar la generalización adecuada vamos a escribir la fórmula de Larmor de la forma sugestiva

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2c^3}\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right) \qquad [14.23]$$

en donde m es la masa de la carga y $\boldsymbol{p}$ su ímpetu. La generalización invariante de Lorentz es

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2c^3}\left(\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp^\mu}{d\tau}\right) \qquad [14.24]$$

siendo $d\tau=dt/\gamma$ el elemento de tiempo propio, y p^μ el 4-vector ímpetu-energía de la partícula cargada *. Con el fin de comprobar que [14.24] se reduce debidamente a [14.23] cuando $\beta\to 0$, vamos a calcular el producto escalar de cuadrivectores:

$$-\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp^\mu}{d\tau}=\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2=\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\right)^2-\beta^2\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 \qquad [14.25]$$

Si expresamos [14.24] en función de la velocidad y aceleración por medio de $E=\gamma mc^2$ y $\boldsymbol{p}=\gamma m\boldsymbol{v}$, obtenemos el resultado de Liénard (1898):

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\gamma^6[(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2-(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2] \qquad [14.26]$$

Los aceleradores de partículas cargadas constituyen un campo de aplicación de la expresión relativista de la potencia radiada. Las pérdidas de radiación son a veces el factor que limita la máxima energía práctica alcanzable. Para una fuerza aplicada fija (es decir, una cierta variación de ímpetu con el tiempo) la potencia radiada [14.24] está en razón inversa del cuadrado de la masa de la partícula en cuestión. Por tanto, los efectos de radiación son mayores para electrones.

En un acelerador lineal el movimiento es unidimensional. Según [14.25], resulta evidente que la potencia radiada en este caso es

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2c^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 \qquad [14.27]$$

El cambio de ímpetu por unidad de tiempo es igual al cambio de energía de la partícula por unidad de longitud. Por tanto,

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2c^3}\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 \qquad [14.28]$$

* Podemos comprobar que [14.24] es único, sin más que tener en cuenta que un invariante de Lorentz se obtiene tomando productos escalares de cuadrivectores o tensores de mayor orden. Los cuadrivectores disponibles son p_μ y $dp_\mu/d\tau$. Solamente la forma [14.24] se reduce a la fórmula de Larmor cuando $\beta\to 0$. La contracción de tensores de mayor orden, tales como $p_\mu(dp_\nu/d\tau)$, puede demostrarse que, o se anula, o resulta ser proporcional a [14.24] o a m^2.

lo que nos dice que en movimiento rectilíneo la potencia radiada depende solamente de las fuerzas exteriores, que fijan la variación de energía de la partícula por unidad de longitud, y no depende para nada de la energía o ímpetu reales de la partícula. La razón entre la potencia radiada y la potencia suministrada por las fuentes externas es

$$\frac{P}{(dE/dt)} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2c^3}\frac{1}{v}\frac{dE}{dx} \rightarrow \frac{2}{3}\frac{(e^2/mc^2)}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\frac{dE}{dx} \qquad [14.29]$$

donde la última forma es válida para partículas relativistas ($\beta \rightarrow 1$). La ecuación [14.29] nos dice que la pérdida por radiación es despreciable a menos que la ganancia de energía sea del orden de $mc^2 = 0{,}511$ MeV en una distancia de $2{,}82 \times 10^{-15}$ m, o sea, ¡del orden de 2×10^{14} MeV/metro! Las ganancias de energía típicas son del orden de 10 MeV/metro, por tanto, las pérdidas por radiación son completamente despreciables en los aceleradores lineales, sea para electrones o para partículas más pesadas.

Las circunstancias cambian de modo drástico en los aceleradores circulares como el sincrotrón o betatrón. En estos dispositivos el ímpetu $\boldsymbol{p}$ cambia rápidamente de dirección con el giro de la partícula, pero la variación de energía por revolución es pequeña. Esto significa que:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\right| = \gamma\omega|\boldsymbol{p}| \gg \frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau} \qquad [14.30]$$

Entonces, la potencia radiada [14.24] se puede expresar de forma aproximada

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2c^3}\gamma^2\omega^2|\boldsymbol{p}|^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2c}{4\pi\epsilon_0\rho^2}\beta^4\gamma^4 \qquad [14.31]$$

en donde hemos hecho $\omega = (c\beta/\rho)$, siendo ρ el radio de la órbita. Este resultado fue obtenido por primera vez por LIÉNARD, en 1898. La pérdida de energía por radiación en cada revolución es

$$\delta E = \frac{2\pi\rho}{c\beta}P = \frac{1}{3}\frac{e^2}{\epsilon_0\rho}\beta^3\gamma^4 \qquad [14.32]$$

Para electrones de alta energía tiene el valor numérico:

$$\delta E\ (\text{Mev}) = 8{,}85 \times 10^{-2}\frac{[E\ (\text{bev})]^4}{\rho\ (\text{metros})} \qquad [14.33]$$

En los primeros sincrotrones para electrones, $\rho \simeq 1$ metro, $E_{\text{máx}} \simeq 0{,}3$ GeV. Por tanto, $\delta E_{\text{máx}} \simeq 1$ KeV por revolución. Esta energía era menor que, pero no despreciable frente a, la ganancia de unos pocos kilovoltios por vuelta. A energías mayores, la limitación sobre la potencia de radiofrecuencia disponible para compensar la pérdida por radiación llega a ser la consideración dominante. En el sincrotrón de Cornell de 10 GeV, por ejemplo, el radio de la órbita es $\rho \sim 100$ metros, el campo magnético máximo es de $\sim 3{,}3$ kG y la tensión de radiofrecuencia por vuelta es de 10,5 MV a 10 GeV. De acuerdo con [14.33] la pérdida por vuelta es de 8,85 MeV. En los anillos de almacenamiento electrón-positrón se aplican las mismas consideraciones generales, en

ellos debe suministrarse potencia de r.f. justamente para mantener constante la energía de los haces mientras circulan.

La potencia radiada en los aceleradores circulares de electrones puede calcularse mediante la fórmula:

$$P\,(\text{watts}) = 10^6\,\delta E\,(\text{MeV})\,J\,(\text{amp}) \qquad [14.34]$$

siendo J la corriente del haz que circula. Esta ecuación es válida si la emisión de radiación por los distintos electrones del haz no es coherente. En los mayores sincrotrones la potencia radiada alcanza 0,1 wat por cada microamperio del haz. Aunque esta disipación de potencia sea muy pequeña, la energía radiada se detecta realmente y posee algunas propiedades interesantes que discutiremos en la sección 14.6.

14.3. DISTRIBUCION ANGULAR DE LA RADIACION EMITIDA POR UNA CARGA ACELERADA

La distribución angular para una carga acelerada dotada de movimiento no relativista, presenta una dependencia sencilla en $\text{sen}^2\,\Theta$, tal como nos dice la fórmula [14.21], en donde Θ es el ángulo medido respecto de la dirección de la aceleración. En movimiento relativista los campos de aceleración dependen además de la velocidad de la partícula y, por tanto, la distribución angular es más complicada. Si partimos de [14.14] podemos calcular que la componente radial del vector de Poynting es:

$$[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}]_{\text{ret}} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c}\left\{\frac{1}{R^2}\left|\frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^3}\right|^2\right\}_{\text{ret}} \qquad [14.35]$$

Evidentemente, hay dos tipos de efecto relativista. Uno es el efecto de la relación espacial específica entre $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, que determina el detalle de la distribución angular. El otro es un efecto relativista general que surge de la transformación del sistema en que la partícula está en reposo al sistema del observador, y que se manifiesta por la presencia de los factores $(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})$ en el denominador de [14.35]. En partículas ultrarrelativistas este último efecto domina el aspecto global de la distribución angular.

En [14.35] $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}$ es la energía por unidad de área y por unidad de tiempo detectada en el punto de observación en el instante t, debida a la radiación emitida por la carga en el instante $t' = t - R(t')/c$. Si queremos calcular la energía radiada durante un periodo finito de aceleración, es decir, desde $t' = T_1$ a $t' = T_2$, podemos escribir:

$$E = \int_{t=T_1+[R(T_1)/c]}^{t=T_2+[R(T_2)/c]} [\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}]_{\text{ret}}\,dt = \int_{t'=T_1}^{t'=T_2} (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\frac{dt}{dt'}\,dt' \qquad [14.36]$$

Vemos que la magnitud útil y con significado es $(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\,(dt/dt')$, la potencia radiada por unidad de área referida al tiempo propio de la partícula. Definiremos, por tanto, la potencia radiada por unidad de ángulo sólido como

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\frac{dt}{dt'} = R^2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\,(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}) \qquad [14.37]$$

Si suponemos que la carga es acelerada solamente durante un corto intervalo de tiempo, en el cual $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ son en la práctica constantes en dirección y módulo, y observamos la radiación lo suficientemente lejos de la carga para que tanto $\boldsymbol{n}$ como R presenten variaciones despreciables durante este intervalo de aceleración, tendremos que [14.37] es proporcional a la distribución angular de la energía radiada. Con la ecuación [14.35] para el vector de Poynting, la distribución angular es:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c}\frac{|\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}|^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5} \qquad [14.38]$$

El ejemplo más sencillo de [14.38] corresponde al movimiento rectilíneo en el que $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ son paralelos. Si θ es el ángulo de observación medido a partir de la dirección común de $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, [14.38] se reduce a

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{e^2\dot{v}^2}{16\pi^2c^3\epsilon_0}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} \qquad [14.39]$$

Cuando $\beta\ll 1$, éste es el resultado de Larmor [14.21]; pero cuando $\beta\to 1$, la distribución angular se inclina hacia delante más y más, aumentando su magnitud como se indica esquemáticamente en la figura 14.4. El ángulo $\theta_{\text{máx}}$ para el cual la intensidad es máxima es:

$$\theta_{\text{máx}}=\cos^{-1}\left[\frac{1}{3\beta}(\sqrt{1+15\beta^2}-1)\right]\to\frac{1}{2\gamma} \qquad [14.40]$$

donde la última forma corresponde al límite en que $\beta\to 1$. Para este mismo límite la intensidad de pico es proporcional a γ^8. Incluso para $\beta=0{,}5$, que co-

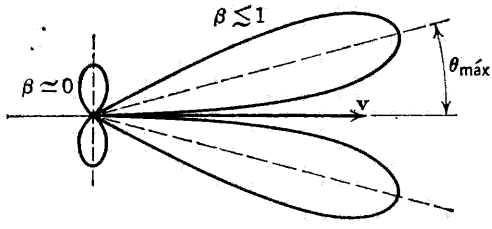


FIG. 14.4. Diagrama de radiación para una carga acelerada en su dirección de movimiento. Los dos diagramas no están a escala; el relativista (adecuado para $\gamma\sim 2$) ha sido reducido en un factor de $\sim 10^2$ para la aceleración.

rresponde a electrones de ~ 80 KeV de energía cinética, $\theta_{\text{máx}}=38{,}2°$. Para partículas relativistas, $\theta_{\text{máx}}$ es muy pequeño, siendo del orden de la razón entre la energía de la partícula en reposo y la energía total. Así, la distribución angular se reduce a un cono muy estrecho en la dirección del movimiento. Para estos ángulos pequeños la distribución angular [14.39] puede expresarse de forma aproximada

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}\simeq\frac{2}{\epsilon_0\pi^2}\frac{e^2\dot{v}^2}{c^3}\gamma^8\frac{(\gamma\theta)^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^5} \qquad [14.41]$$

La unidad natural de ángulos es evidente γ^{-1}, que es la que hemos utilizado en la distribución angular de la figura 14.5. Los máximos se presentan para

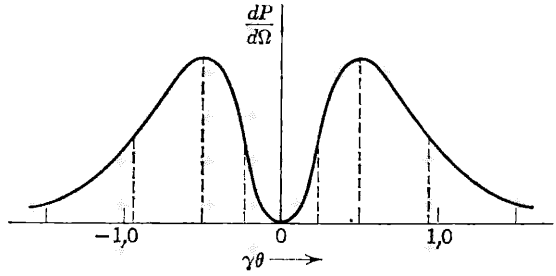


FIG. 14.5. Distribución angular de radiación para una partícula relativista.

$\gamma\theta = \frac{1}{2}$, y los puntos de potencia mitad en $\gamma\theta = 0{,}23$ y $\gamma\theta = 0{,}91$. El ángulo medio cuadrático de emisión de la radiación en el límite relativista es

$$\langle\theta^2\rangle^{1/2} = \frac{1}{\gamma} = \frac{mc^2}{E} \qquad [14.42]$$

Esto es típico de los diagramas de radiación relativistas, independientemente de la relación vectorial entre $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Integrando [14.39] para todos los ángulos, podemos obtener la potencia total radiada.

$$P(t') = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\dot{v}^2\gamma^6 \qquad [14.43]$$

Esta expresión está de acuerdo con [14.26] y [14.27].

Otro ejemplo de distribución angular de radiación es el de una carga dotada instantáneamente de movimiento circular con la aceleración $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ perpendicular a su velocidad $\boldsymbol{\beta}$. Elegimos un sistema de coordenadas en el que esté $\boldsymbol{\beta}$ en la dirección z, y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ en la dirección x. Si los ángulos polares θ, ϕ definen la dirección de observación, como es habitual y se indica en la figura 14.6, la fórmula general [14.38] se reduce a:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{|\dot{v}|^2}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left[1 - \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right] \qquad [14.44]$$

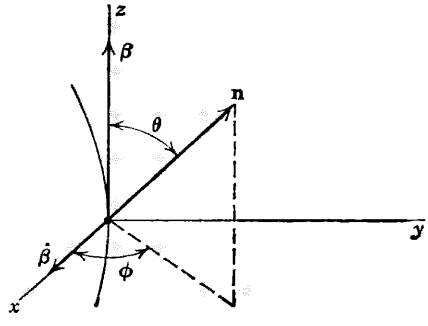


FIG. 14.6.

Observamos que, aun cuando la distribución angular en detalle sea diferente de la correspondiente al caso de aceleración longitudinal, se presenta el mismo pico característico relativista en los ángulos hacia adelante. En el límite relativista ($\gamma \gg 1$) la distribución angular se puede expresar, aproximadamente, por

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \simeq \frac{1}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{e^2|\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{c^3} \gamma^6 \frac{1}{(1+\gamma^2\theta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2\theta^2 \cos^2\phi}{(1+\gamma^2\theta^2)^2}\right] \qquad [14.45]$$

En esta aproximación el ángulo cuadrático medio de emisión viene dado por [14.42], igual que en el caso de movimiento unidimensional. Podemos hallar la potencia total radiada integrando [14.44] para todos los ángulos, o bien partiendo de [14.26]

$$P(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2|\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4 \qquad [14.46]$$

Resulta instructivo comparar la potencia radiada [14.43] o [14.27] en el caso en que la aceleración es paralela a la velocidad con la potencia radiada [14.46] cuando la aceleración es perpendicular a la velocidad, siendo igual en ambos casos la cuantía de la fuerza aplicada. En el movimiento circular, la «velocidad» de cambio de ímpetu (que es igual a la fuerza aplicada) es $\gamma m\dot{\boldsymbol{v}}$. Por tanto, podemos expresar [14.46] de la forma

$$P_{\text{circular}}(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)^2 \qquad [14.47]$$

Si comparamos esto con el resultado [14.27] correspondiente a un movimiento rectilíneo, vemos que, para una fuerza aplicada fija, la radiación emitida con aceleración transversal supera en un factor γ^2 a la radiación emitida con aceleración longitudinal.

14.4. RADIACION EMITIDA POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO ARBITRARIO EXTREMADAMENTE RELATIVISTA

Si una partícula cargada está dotada de movimiento extremadamente relativista siguiendo una trayectoria arbitraria, la radiación emitida en un instante cualquiera puede suponerse como la superposición coherente de las contribuciones debidas a las componentes de la aceleración paralela y perpendicular a la velocidad. Pero ya hemos visto que, cuando las fuerzas paralela y perpendicular son comparables, la radiación debida a la componente paralela es despreciable (es del orden de $1/\gamma^2$) frente a la debida a la componente perpendicular. Como consecuencia, podemos despreciar la componente paralela de la aceleración y tomar aproximadamente como radiación emitida por la partícula cargada sólo la de la componente perpendicular. En otras palabras, que la radiación emitida por una partícula cargada en movimiento relativista extremado es aproximadamente la misma que la emitida por una partícula que se mueve instantáneamente a lo largo de un arco circular cuyo radio de curvatura ρ viene dado por

$$\rho = \frac{v^2}{\dot{v}_\perp} \simeq \frac{c^2}{\dot{v}_\perp} \qquad [14.48]$$

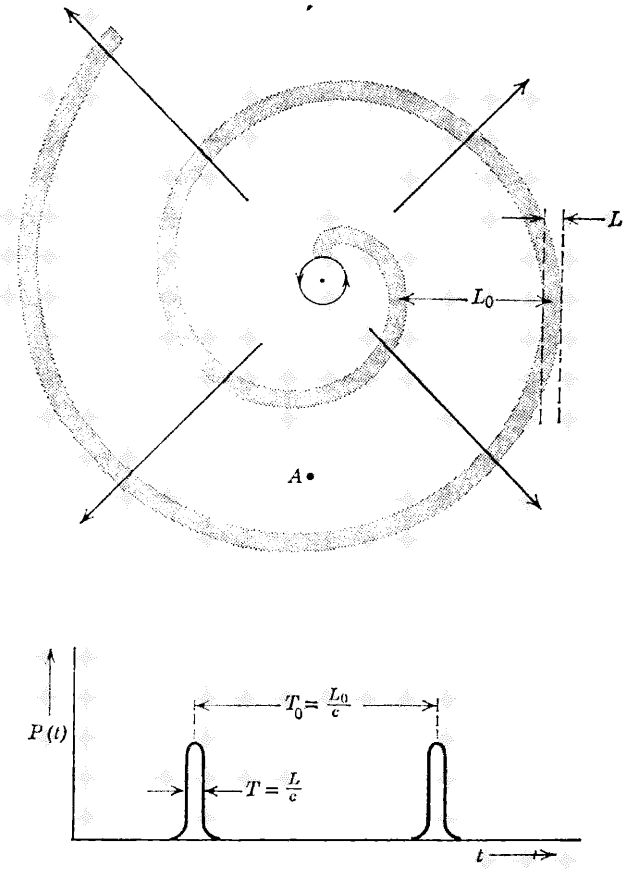


FIG. 14.7. Una partícula relativista en movimiento periódico emite un diagrama de radiación de forma espiral que un observador en el punto A detecta como pequeños trenes de radiación de duración $T=L/c$, y que se suceden a intervalos regulares T_0/c. La duración del impulso está dada por [14.49], mientras que el intervalo $T_0=2\pi\rho/v \simeq 2\pi\rho/c$. Véase R. Y. TSIEN, *Am. J. Phys.*, 40, 46 (1972) para hallar diagramas de las líneas del campo de partículas radiantes.

siendo $\dot{v}_\perp$ la componente perpendicular de la aceleración. La forma de la distribución angular es la dada por [14.44] o [14.45]. Corresponde a un estrecho cono o haz de radiación dirigido según el vector velocidad instantánea de la carga.

Para un observador provisto de un detector sensible a la frecuencia el hecho de que la radiación esté confinada a un estrecho haz paralelo a la velocidad tiene consecuencias importantes. La radiación sólo será visible cuando la velocidad de la partícula esté dirigida hacia el observador. Para una partícula en movimiento arbitrario el observador detectará un impulso o destello de radiación de muy corta duración (o una sucesión de tales destellos si la partícula está en movimiento periódico), como se esquematiza en la figura 14.7. Como la amplitud angular del haz es del orden de γ^{-1}, mientras ilumina al observador, la partícula viajará sólo una distancia del orden de:

$$d=\frac{\rho}{\gamma}$$

que corresponde a un intervalo de tiempo:

$$\Delta t = \frac{\rho}{\gamma v}$$

Para desarrollar un argumento conceptualmente sencillo, supóngase que se desprecia la curvatura de la trayectoria durante este tiempo y que se emite un impulso rectangular de radiación. En el intervalo Δt el frente del impulso recorre una distancia

$$D = c\Delta t = \frac{\rho}{\gamma\beta}$$

Como la partícula se está moviendo en la misma dirección con velocidad v y se desplaza una distancia d en el intervalo Δt, el final del impulso estará sólo a una distancia

$$L = D - d = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\frac{\rho}{\gamma} \simeq \frac{\rho}{2\gamma^3} \qquad [14.49]$$

detrás del frente a medida que el impulso se aleja. Así, pues, la longitud espacial del impulso es L, o su duración temporal L/c. Según argumentos generales de la descomposición de Fourier de un tren de ondas finito esto implica que el espectro de la radiación contendrá componentes en frecuencia apreciables hasta una frecuencia crítica:

$$\omega_c \sim \frac{c}{L} \sim \left(\frac{c}{\rho}\right)\gamma^3 \qquad [14.50]$$

Para el caso de movimiento circular c/ρ es la frecuencia angular de rotación ω_0, e incluso en el caso de movimiento arbitrario esta frecuencia desempeña el papel de una frecuencia fundamental. La ecuación [14.50] demuestra que la partícula relativista emite un espectro de frecuencia amplio, que se extiende hasta γ^3 veces la frecuencia fundamental. En un sincrotrón de 200 MeV, $\gamma_{máx} \simeq 400$, mientras que $\omega_0 \simeq 3 \times 10^8$ s^{-1}. El espectro en frecuencias de la radiación emitida se extiende hasta $\sim 2 \times 10_{16}$ s^{-1}, o hasta una longitud de onda de 1 000 angstrom, aun cuando la frecuencia fundamental se halle en la región de 100 MHz. Para la máquina de Cornell de 10 GeV, $\gamma_{máx} \simeq 2 \times 10^4$ y $\omega_0 \simeq 3 \times 10^6$ s^{-1}. Esto significa que $\omega_c \simeq 2{,}4 \times 10^{19}$ s^{-1}, lo que corresponde a rayos X de 16 keV. En la sección 14.6 discutiremos en detalle la distribución angular de las diferentes componentes en frecuencia, así como la energía total radiada en función de la frecuencia.

14.5. DISTRIBUCION ANGULAR Y EN FRECUENCIA DE LA ENERGIA RADIADA POR CARGAS ACELERADAS

Los argumentos cualitativos de la anterior sección mostraban que, en un movimiento relativista, la energía radiada se extiende a un amplio intervalo de frecuencias. La amplitud del espectro de frecuencias fue estimada haciendo uso de una de las propiedades de las integrales de Fourier. Este argumento

puede hacerse preciso y cuantitativo si recurrimos al teorema de Parseval del análisis de Fourier.

La forma general de la potencia radiada por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |A(t)|^2 \qquad [14.51]$$

en donde

$$A(t) = \left(\frac{1}{c\mu_0}\right)^{1/2} [RE]_{\text{ret}} \qquad [14.52]$$

siendo E el campo eléctrico [14.14]. En [14.51] se expresa la potencia con el tiempo del observador (al contrario de la definición de la sección 14.3) porque lo que pretendemos es considerar el espectro de frecuencias en función de las frecuencias registradas por el observador. Para concretar, supondremos que la aceleración tiene lugar en un intervalo de tiempo finito, o por lo menos que cesa para tiempos pasado y futuro suficientemente remotos; de este modo, la energía total radiada es finita. Más aún, consideraremos el punto de observación lo suficientemente alejado de la carga como para que la región espacial dentro de la cual tiene lugar la aceleración de la misma se vea bajo un pequeño elemento de ángulo sólido.

La energía total radiada por unidad de ángulo sólido es la integral de [14.51] respecto del tiempo

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |A(t)|^2 \, dt \qquad [14.53]$$

Si utilizamos transformadas de Fourier, se puede expresar de forma alternativa como un integral sobre el espectro de frecuencias. Introducimos la transformada de Fourier de $A(t)$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} \, dt \qquad [14.54]$$

y su inversa

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} \, d\omega \qquad [14.55]$$

Entonces, [14.53] puede expresarse:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, A^*(\omega') \cdot A(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t} \qquad [14.56]$$

Si intercambiamos las órdenes de integración en tiempo y frecuencia, vemos que la integral respecto del tiempo es precisamente una representación de Fourier de la función delta $\delta(\omega' - \omega)$. Por tanto, la energía radiada por unidad de ángulo sólido se nos convierte en

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 \, d\omega \qquad [14.57]$$

La igualdad de [14.57] y [14.53], con las restricciones matemáticas adecuadas

sobre la función $A(t)$, es un caso especial del teorema de Parseval. Como el signo de la frecuencia no tiene significado físico, se acostumbra a integrar solamente para frecuencias positivas. Así, la relación:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{dI(\omega, \boldsymbol{n})}{d\Omega} d\omega \qquad [14.58]$$

nos define una magnitud que es la energía radiada por unidad de ángulo sólido y por unidad de intervalo de frecuencias

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = |\boldsymbol{A}(\omega)|^2 + |\boldsymbol{A}(-\omega)|^2 \qquad [14.59]$$

Si $\boldsymbol{A}(t)$ es real, resulta evidente, según [14.55], que $\boldsymbol{A}(-\omega) = \boldsymbol{A}^*(\omega)$. Entonces:

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = 2\,|\boldsymbol{A}(\omega)|^2 \qquad [14.60]$$

Este resultado relaciona de forma cuantitativa la potencia radiada, como función del tiempo, con el espectro de frecuencias de dicha energía radiada.

Pero si para el campo eléctrico de una carga acelerada usamos [14.14], podemos obtener una expresión general de la energía radiada por unidad de ángulo sólido y unidad de intervalo de frecuencias, mediante una integral extendida a la trayectoria de la partícula. Debemos calcular la transformada de Fourier [14.54] de $\boldsymbol{A}(t)$ dada por [14.52]. Si usamos [14.14], tenemos:

$$\boldsymbol{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{\boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})^3}\right]_{\text{ret}} dt \qquad [14.61]$$

en donde «ret» significa que se debe calcular para $t' + [R(t')/c] = t$. Cambiemos la variable de integración de t a t', con lo que obtenemos el resultado

$$\boldsymbol{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t' + [R(t')/c])} \frac{\boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})^2} dt' \qquad [14.62]$$

Como hemos supuesto el punto de observación suficientemente alejado de la región en que tiene lugar la aceleración, el vector unitario $\boldsymbol{n}$ es sensiblemente constante con el tiempo. Más aún, la distancia $R(t')$ puede ponerse de forma aproximada

$$R(t') \simeq x - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}(t') \qquad [14.63]$$

siendo x la distancia desde un cierto origen O al punto de observación P, y $\boldsymbol{r}(t')$ la posición de la partícula respecto a O, tal como se indica en la figura 14.8. Entonces, salvo un factor de fase de conjunto, la ecuación [14.62] se convierte en:

$$\boldsymbol{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}(t)/c)} \frac{\boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})^2} dt \qquad [14.64]$$

Se han omitido para abreviar las primas en la variable tiempo. La energía ra-

diada por unidad de ángulo sólido y unidad de intervalo de frecuencias [14.60] es, por tanto,

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 c\epsilon_0}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2} e^{i\omega(t-[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)/c])}\, dt\right|^2 \qquad [14.65]$$

Para un movimiento dado se conoce $\boldsymbol{r}(t)$, y podemos calcular $\boldsymbol{\beta}(t)$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$; así podemos calcular la integral en función de ω y de la dirección de $\boldsymbol{n}$. Si se trata del movimiento acelerado de más de una carga, deberemos poner una suma coherente de amplitudes $A_j(\omega)$, una para cada carga, en lugar de la amplitud única que aparece en [14.65] (véanse problemas 14.11, 15.3-15.6).

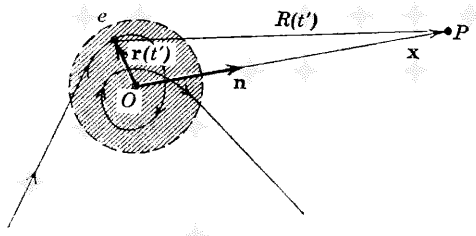


FIG. 14.8.

Aunque [14.65] tenga la propiedad de que el intervalo de tiempo de integración viene explícitamente limitado a tiempos para los que la aceleración es distinta de cero, podemos para ciertos fines obtener una expresión más sencilla integrando por partes [14.64]. Resulta fácil demostrar que el integrando de [14.64], si prescindimos de la exponencial, es una diferencial exacta

$$\frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})}\right] \qquad [14.66]$$

Integrando por partes, obtenemos la distribución de intensidad

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{16\pi^3 c\epsilon_0}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}) e^{i\omega(t-[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)/c])}\, dt\right|^2 \qquad [14.67]$$

El lector puede preguntarse justificadamente si [14.67] es correcta tal como está enunciada en todos los casos. Supóngase que la aceleración sólo es diferente de cero para $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$. ¿Por qué entonces se extiende la integración en [14.67] a todo tiempo? La respuesta exacta es que puede demostrarse, sumando y restando las integrales extendidas a los intervalos de tiempo en que la velocidad es constante, que [14.67] se deduce de [14.65] suponiendo que se eliminan las ambigüedades para $t = \pm\infty$ introduciendo un factor de convergencia $e^{-\epsilon|t|}$ en el integrando y tomando el límite $\epsilon \to 0$ después de calcular la integral. En procesos como la desintegración beta en los que la descripción clásica implica la detención o puesta en movimiento casi instantánea de cargas, debe ponerse un cuidado adicional para especificar la velocidad de cada partícula como una función del tiempo físicamente sensible.

Deberemos observar que, tanto en [14.67] como en [14.65], la polarización

de la radiación emitida viene especificada en cada caso por la dirección de la integral vectorial. Se puede obtener la intensidad de radiación con una cierta polarización tomando el producto escalar del vector unitario de polarización apropiado con la integral vectorial, antes de calcular el cuadrado de su módulo.

Si tenemos un número de cargas e_j en movimiento acelerado, en el integrando de [16.47] hay que efectuar la sustitución

$$e\boldsymbol{\beta}e^{-i(\omega/c)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)} \rightarrow \sum_{j=1}^{N} e_j\boldsymbol{\beta}_j e^{-i(\omega/c)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_j(t)} \qquad [14.68]$$

En el caso límite de tratarse de una distribución continua de carga en movimiento, la suma sobre j se transforma en una integral sobre la densidad de corriente $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$

$$e\boldsymbol{\beta}e^{-i(\omega/c)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)} \rightarrow \frac{1}{c}\int d^3x\, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)e^{-i(\omega/c)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}} \qquad [14.69]$$

Entonces, la distribución de intensidad se transforma en

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{\omega^2}{16\pi^3c^3\epsilon_0}\left|\int dt \int d^3x\, \boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)]e^{i\omega[t-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})/c]}\right|^2 \qquad [14.70]$$

resultado que puede obtenerse de la solución directa de la ecuación de ondas no homogénea para el potencial vector [14.1].

Resulta de cierto interés la radiación asociada con un momento magnético en movimiento. Recordemos del capítulo 5 que una densidad de imanación $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}, t)$ es equivalente a una densidad de corriente $\boldsymbol{J}_M = \nabla\times\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Esta corriente puede sustituirse en [14.70], pero existe otra contribución. En el capítulo 11 encontramos que una imanación en movimiento lleva asociada una polarización eléctrica. Resulta evidente de la ecuación de Maxwell-Ampère que la fuente de corriente efectiva para un momento magnético *móvil* es, por consiguiente:

$$\boldsymbol{J}_{\text{ef}} = \nabla\times\boldsymbol{\mathcal{M}} + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{P}}}{\partial t} \qquad [14.71]$$

siendo $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ la densidad de polarización eléctrica asociada. Si se sustituye en [14.70] y se integra por partes, se obtiene:

$$\frac{d^2I'}{d\omega\, d\Omega} = \frac{\omega^4}{16\pi^3c^3\epsilon_0}\left|\int dt \int d^3x\, \boldsymbol{n}\times\left[\frac{\boldsymbol{\mathcal{M}}}{c} + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\mathcal{P}}\right]e^{i\omega[t-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})/c]}\right|^2 \qquad [14.72]$$

Para un momento magnético puntual $\boldsymbol{\mu}(t)$ en el punto $\boldsymbol{r}(t)$, la imanación es:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\mu}(t)\delta[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t)] \qquad [14.73, a]$$

A partir de [11.149] y de la correspondencia $\boldsymbol{B} \rightarrow -\mu_0\boldsymbol{\mathcal{M}}$, $\epsilon_0\boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}$, deducimos que una partícula que tenga únicamente momento magnético en su sistema propio K' parecerá en el sistema K, en el que su velocidad es $c\boldsymbol{\beta}$, que tiene un momento magnético y un momento dipolar eléctrico:

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\mu} \qquad [14.73, b]$$

siendo $\boldsymbol{\mu}$ el momento magnético tal como se observa en K. La densidad de polarización eléctrica de [14.72] viene dada, pues, por:

$$\mathfrak{P}(\boldsymbol{x}, t)=\frac{1}{c}\,\boldsymbol{\beta}(t)\times\boldsymbol{\mu}(t)\delta[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t)] \qquad [14.73, c]$$

Cuando se sustituyen en [14.72] las ecuaciones [14.73, a] y [14.73, c] da la energía radiada por unidad de ángulo sólido y unidad de intervalo de frecuencias por un momento magnético móvil en la forma:

$$\frac{d^2I'}{d\omega\, d\Omega}=\frac{\omega^4}{16\pi^3c^5\epsilon_0}\left|\int dt\,\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\mu})]e^{i\omega(t-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)/c)}\right|^2 \qquad [14.74]$$

Observemos que hay una diferencia característica en un factor ω^2 entre la intensidad radiada por un dipolo magnético y una carga acelerada, además de la dependencia de las integrales con la frecuencia.

Las fórmulas generales desarrolladas en esta sección, en especial [14.65] y [14.67], serán aplicadas en el presente capítulo y siguientes a varios problemas en los que se presenta emisión de radiación. La fórmula del momento magnético [14.74] se aplicará al problema de la radiación emitida en la captura de electrones orbitales por los núcleos (Cap. 15).

14.6. ESPECTRO DE FRECUENCIAS DE LA RADIACION EMITIDA POR UNA PARTICULA RELATIVISTA CARGADA EN MOVIMIENTO CIRCULAR INSTANTANEO

Vimos en la sección 14.4 que la radiación emitida por una partícula extremadamente relativista sometida a aceleraciones arbitrarias es equivalente a la emitida por una partícula que instantáneamente se mueve a velocidad constante sobre una trayectoria circular adecuada. La radiación consiste en un haz cónico estrecho en la dirección del vector velocidad, y el observador la detecta como un breve impulso de radiación al tiempo que el haz luminoso barre el punto de observación.

Para hallar la distribución de energía con la frecuencia y el ángulo necesitamos calcular la integral de [14.67]. Como el impulso es de duración muy corta, es necesario conocer la velocidad $\boldsymbol{\beta}$ y la posición $\boldsymbol{r}(t)$ únicamente a lo largo de un pequeño arco de la trayectoria cuya tangente apunta en la dirección hacia el punto de observación. En la figura 14.9 se muestra un sistema de coordenadas apropiado. El tramo de trayectoria yace en el plano x-y con un radio de curvatura instantáneo ρ. Como la integral se ha de tomar a lo largo de la trayectoria, el vector unitario $\boldsymbol{n}$ puede elegirse sin pérdida de generalidad en el plano x-z, formando un ángulo θ (la latitud) con el eje x. Sólo para valores de θ muy pequeños habrá una intensidad de radiación apreciable. Se elige el origen de tiempos de modo que la partícula esté en el origen de coordenadas para $t=0$.

La parte vectorial del integrando de [14.67] puede expresarse

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})=\beta\left[-\boldsymbol{\epsilon}_{\parallel}\,\mathrm{sen}\left(\frac{vt}{\rho}\right)+\boldsymbol{\epsilon}_{\perp}\cos\left(\frac{vt}{\rho}\right)\mathrm{sen}\,\theta\right] \qquad [14.75]$$

en donde $\epsilon_{\parallel} = \epsilon_2$ es un vector unitario en la dirección de y, que corresponde a una polarización en el plano de la órbita; $\epsilon_{\perp} = \boldsymbol{n} \times \epsilon_2$ es el vector de polarización ortogonal que aproximadamente corresponde a una polarización per-

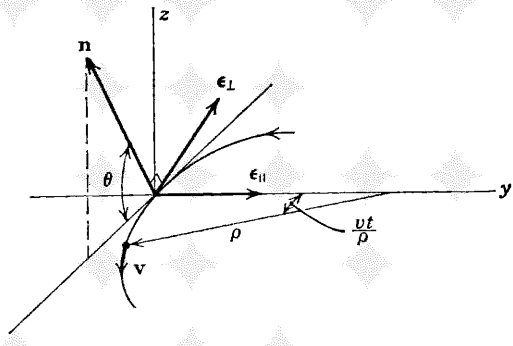


FIG. 14.9.

pendicular al plano de la órbita (para valores pequeños de θ). El argumento de la exponencial es

$$\omega\left(t - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)}{c}\right) = \omega\left[t - \frac{\rho}{c}\,\mathrm{sen}\left(\frac{vt}{\rho}\right)\cos\theta\right] \qquad [14.76]$$

Como estamos interesados en ángulos θ pequeños y en intervalos de tiempo relativamente cortos en el entorno de $t=0$, podemos desarrollar las dos funciones trigonométricas de [14.76], obteniendo

$$\omega\left(t - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)}{c}\right) \simeq \frac{\omega}{2}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)t + \frac{c^2}{3\rho^2}t^3\right] \qquad [14.77]$$

en donde β se ha hecho igual a la unidad siempre que ha sido posible. Si utilizamos las estimaciones $\rho/c\gamma$ para t y $\langle\theta^2\rangle^{\frac{1}{2}}$ [14.42] para θ, se ve fácilmente que los términos despreciados en [14.77] son del orden de γ^{-2} veces los que se tienen en cuenta.

Mediante el mismo tipo de aproximaciones que de [14.75] nos llevaron a [14.77], la distribución de energía radiada [14.67] puede expresarse:

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{16\pi^3 c\epsilon_0}\left|-\epsilon_{\parallel}A_{\parallel}(\omega) + \epsilon_{\perp}A_{\perp}(\omega)\right|^2 \qquad [14.78]$$

en donde las amplitudes son *

$$\left.\begin{aligned} A_{\parallel}(\omega) &\simeq \frac{c}{\rho}\int_{-\infty}^{\infty} t\exp\left\{i\frac{\omega}{2}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)t + \frac{c^2t^3}{3\rho^2}\right]\right\}dt \\ A_{\perp}(\omega) &\simeq \theta\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\frac{\omega}{2}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)t + \frac{c^2t^3}{3\rho^2}\right]\right\}dt \end{aligned}\right\} \qquad [14.79]$$

* El hecho de que los límites de integración en [14.79] sean $t = \pm\infty$ parece contradecir las aproximaciones que hicimos para pasar de [14.76] a [14.77]. Lo que sucede es que, para la mayoría de las frecuencias, la fase de los integrandos de [14.79] oscila muy

Si hacemos el cambio de variable $x = \left[ct \Big/ \rho \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{1/2} \right]$ e introducimos el parámetro ξ,

$$\xi = \frac{\omega \rho}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2} \qquad [14.80]$$

es posible transformar las integrales de $A_{\parallel}(\omega)$ y $A_{\perp}(\omega)$ en la forma

$$\left.\begin{aligned} A_{\parallel}(\omega) &= \frac{\rho}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[i \frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx \\ A_{\perp}(\omega) &= \frac{\rho}{c} \theta \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx \end{aligned}\right\} \qquad [14.81]$$

que se pueden identificar como integrales de Airy o, de otro modo, como funciones de Bessel modificadas

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} x \operatorname{sen}\left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi) \\ \int_0^{\infty} \cos\left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\xi) \end{aligned}\right\} \qquad [14.82]$$

Por tanto, la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia y unidad de ángulo sólido es:

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2}{12\pi^3 c \epsilon_0} \left(\frac{\omega \rho}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{(1/\gamma^2) + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \qquad [14.83]$$

El primer término del corchete corresponde a radiación polarizada en el plano de la órbita, y el segundo, a radiación polarizada perpendicularmente a dicho plano.

Vamos ahora a examinar este resultado algo complicado. Primeramente vamos a integrar a todas las frecuencias, con lo que hallamos que la distribución angular de energía es

$$\frac{dI}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} d\omega = \frac{7}{16} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \rho} \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{5/2}} \left[1 + \frac{5}{7} \frac{\theta^2}{(1/\gamma^2) + \theta^2} \right] \qquad [14.84]$$

Esta presenta el comportamiento característico que vimos en la sección 14.3. Por supuesto, la ecuación [14.84] puede obtenerse directamente integrando para todos los tiempos una ligera generalización de la fórmula [14.44] de la

---

rápidamente y hace que los integrandos sean efectivamente cero para tiempos mucho menores que los necesarios para mantener la validez de [14.77]. Por tanto, podemos sin error tomar los límites superior e inferior de las integrales infinito. Solamente para frecuencias del orden de $\omega \sim (c/\rho) \sim \omega_0$ dejará de ser válida la aproximación. Pero hemos visto en la sección 14.4 que para partículas relativistas todo el espectro de frecuencias está esencialmente a frecuencias mucho más elevadas.

potencia en un movimiento circular. Igual que en [14.83], el primer término de [14.84] corresponde a polarización paralela al plano de la órbita, y el segundo, a polarización perpendicular. Integrando respecto de todos los ángulos, vemos que se radia siete veces más energía con polarización paralela que perpendicular. La radiación debida a una carga con movimiento relativista se halla fuertemente polarizada, pero no por completo, en el plano de movimiento. Si el movimiento es no relativista, resulta evidente por [14.65] que la polarización en el plano de movimiento es completa.

Las propiedades de las funciones de Bessel modificadas, que se resumen en [3.103] y [3.104], nos dicen que la intensidad de radiación es despreciable para $\xi \gg 1$. Por [14.80] vemos que esto tiene lugar para ángulos grandes; cuanto mayor es la frecuencia, más pequeño es el valor crítico del ángulo, más allá del cual la radiación resulta despreciable. Esto demuestra que la radiación está muy confinada en el plano en que tiene lugar el movimiento, tal como nos dice [14.84]; está tanto más confinada cuanto mayor es la frecuencia respecto de c/ρ. Sin embargo, si ω se hace demasiado grande, vemos que ξ se hará grande para *todos* los ángulos. En este caso, la energía total emitida a esta frecuencia será despreciable. La frecuencia crítica ω_c más allá de la cual la radiación es despreciable para cualquier ángulo, puede definirse mediante $\xi = 1$ para $\theta = 0$. Así, tenemos

$$\omega_c = 3\gamma^3 \left(\frac{c}{\rho}\right) = 3\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \frac{c}{\rho} \qquad [14.85]$$

Vemos que esta frecuencia crítica está de acuerdo con nuestra estimación cualitativa [14.50] de la sección 14.4. Si el movimiento de la carga es verdaderamente circular, c/ρ es la frecuencia fundamental de rotación ω_0. Así, podemos definir una frecuencia armónica crítica $\omega_c = n_c\omega_0$, con número de armónico

$$n_c = 3\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \qquad [14.86]$$

Como para $\gamma \gg 1$ la radiación está contenida predominantemente en el plano de la órbita, resultará instructivo calcular la distribución angular [14.83] para $\theta = 0$. Para frecuencias muy por debajo de la crítica ($\omega \ll \omega_c$), tenemos:

$$\left.\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}\right|_{\theta=0} \simeq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}\left[\frac{\Gamma(2/3)}{\pi}\right]^2\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^{2/3} \qquad [14.87]$$

En el caso límite opuesto, $\omega \gg \omega_c$, el resultado es

$$\left.\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}\right|_{\theta=0} \simeq \frac{3}{8\pi^2\epsilon_0}\frac{e^2}{c}\gamma^2\frac{\omega}{\omega_c}e^{-2\omega/\omega_c} \qquad [14.88]$$

Estas formas límite nos dicen que, para $\theta = 0$, el espectro, muy por debajo de la frecuencia crítica, aumenta con la frecuencia más o menos proporcionalmente a $\omega^{2/3}$, alcanza un máximo en las proximidades de ω_c y luego decrece exponencialmente hasta el valor cero por encima de esta frecuencia.

La amplitud angular del espectro a una frecuencia fija se puede estimar determinando el ángulo θ_c para el cual $\xi(\theta_c) \simeq \xi(0) + 1$. En el dominio de bajas

frecuencias ($\omega \ll \omega_c$), $\xi(0)$ es muy pequeño, así que $\xi(\theta_c) \simeq 1$. Con esto tenemos

$$\theta_c \simeq \left(\frac{3c}{\omega\rho}\right)^{1/3} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{1/3} \qquad [14.89]$$

Observemos que las componentes de baja frecuencia son emitidas con ángulos mucho más amplios que el valor medio $\langle\theta^2\rangle^{\frac{1}{2}} \sim \gamma^{-1}$. En el límite de altas frecuencias ($\omega > \omega_c$), $\xi(0)$ es grande frente a la unidad. La intensidad decrece hasta cero con el ángulo, aproximadamente como

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} \simeq \left.\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}\right|_{\theta=0} \cdot e^{-3\omega\gamma^2\theta^2/\omega_c} \qquad [14.90]$$

Así, pues, el ángulo crítico, definido por el punto $1/e$, es

$$\theta_c \simeq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\omega_c}{3\omega}\right)^{1/2} \qquad [14.91]$$

lo que nos demuestra que las componentes de alta frecuencia se hallan confinadas a un ángulo mucho más pequeño que el valor medio. La figura 14.10 nos

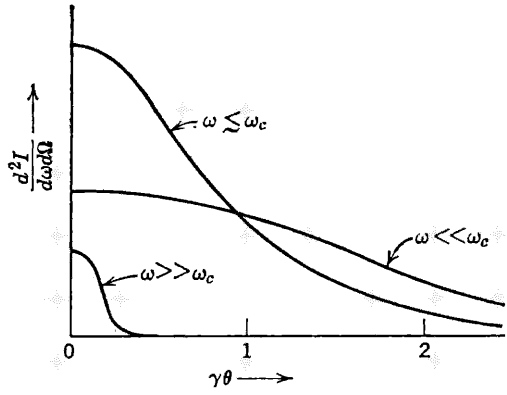


FIG. 14.10. Espectro diferencial de frecuencias en función del ángulo. Para frecuencias comparables a la frecuencia crítica ω_C, la radiación está confinada a ángulos del orden de γ^{-1}. Para frecuencias mucho menores (mayores) la separación angular es mayor (menor).

da una representación cualitativa de la distribución angular para frecuencias pequeñas frente a ω_c, del mismo orden y mucho mayores. Como unidad natural de ángulos se utiliza $\gamma\theta$.

La distribución de frecuencia de la energía total emitida, al pasar la partícula, puede hallarse integrando [14.83] para todos los ángulos,

$$\frac{dI}{d\omega} = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} \cos\theta\, d\theta \simeq 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}\, d\theta \qquad [14.92]$$

(recordemos que θ es la latitud). Podemos obtener una estimación de la inte-

gral en el dominio de bajas frecuencias utilizando el valor de la distribución angular [14.87] para $\theta=0$, y el ángulo crítico θ_c [14.89]. Así, se obtiene

$$\frac{dI}{d\omega} \sim 2\pi\theta_c \frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}\bigg|_{\theta=0} \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^{1/3} \qquad [14.93]$$

lo que nos muestra que para $\omega \ll \omega_c$ el espectro aumenta como $\omega^{1/3}$. Esto nos da un espectro muy ancho y aplanado para las frecuencias inferiores a ω_c. En

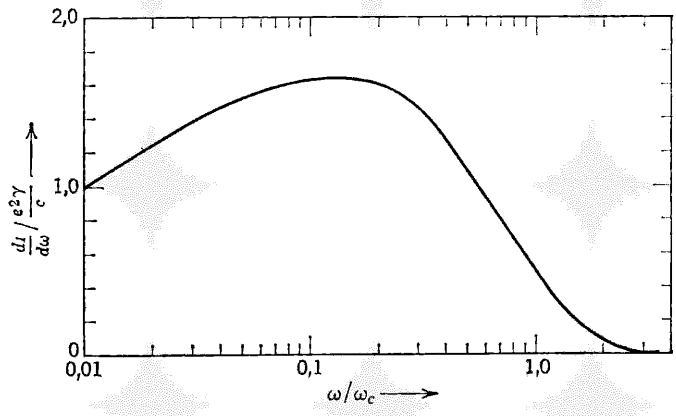


FIG. 14.11. Espectro de la radiación de sincrotón (energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia) en función de la frecuencia. La intensidad se mide tomando $\gamma e^2/c$ como unidad, mientras que la frecuencia se mide tomando ω_C como unidad.

el límite de altas frecuencias en que $\omega \gg \omega_c$, podemos integrar [14.90] respecto de todos los ángulos, con lo que obtenemos el siguiente resultado que es razonablemente exacto:

$$\frac{dI}{d\omega} \simeq \sqrt{3\pi}\,\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}\,\gamma\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2} e^{-2\omega/\omega_c} \qquad [14.94]$$

Por integración de [14.83] para todo los ángulos obtenemos la expresión *

$$\frac{dI}{d\omega} = \sqrt{3}\,\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 c}\,\gamma\,\frac{\omega}{\omega_c}\int_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x)\,dx \qquad [14.95]$$

En el límite $\omega \ll \omega_c$ se reduce esto a la forma [14.93] con un coeficiente numérico 3,25, mientras que para $\omega \gg \omega_c$ coincide con [14.94]. El comportamiento de $dI/d\omega$ como función de la frecuencia se muestra en la figura 14.11. La intensidad máxima es del orden de $e^2\gamma/4\pi\epsilon_0 c$ y la energía total es del orden de $e^2\gamma\omega_c/4\pi\epsilon_0 c = 3e^2\gamma^4/4\pi\epsilon_0\rho$. Esto se halla de acuerdo con el valor $e^2\gamma^4/3\epsilon_0\rho$

* Este resultado y la distribución diferencial [14.83] se han deducido por J. SCHWINGER, *Phys. Rev.*, **75**, 1912 (1949); por un camino algo diferente, SCHWINGER demostró más tarde que las correcciones mecanocuánticas de primer orden a los resultados clásicos implican la sustitución de $\omega \to \omega(1+\hbar\omega/E)$ en $\omega^{-1}d^2I/d\omega\, d\Omega$ o $\omega^{-1}dI/d\omega$ (*Proc. Nat. Acad. Sci.*, **40**, 132 (1954), y, por tanto, son despreciables, supuesto que $\hbar_c\omega \ll E$, o, lo que es equivalente, $\gamma \ll (\rho mc/\hbar)^{1/2}$.

para las pérdidas radiativas por revolución [14.32] en los aceleradores circulares.

La radiación representada por [14.83] y [14.95] recibe el nombre de *radiación de sincrotrón*, porque se observó por primera vez en los sincrotrones (1948). Sin embargo, los resultados teóricos son mucho más antiguos, pues fueron obtenidos por SCHOTT para el movimiento circular (1912), aunque su expresión en la forma tratable actual es debida a SCHWINGER (ob. cit.). En realidad, para el movimiento circular periódico, el espectro es discreto, pues está compuesto de frecuencias que son múltiplos de la frecuencia fundamental $\omega_0 = c/\rho$. Como la partícula cargada repite su movimiento a un ritmo de $c/2\pi\rho$ revoluciones por segundo, conviene hablar de la distribución angular de la frecuencia radiada en el n-simo múltiplo de ω_0 en lugar de la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia en cada paso de la partícula. Para obtener las expresiones de la potencia de los armónicos, simplemente multiplicamos $dI/d\omega$ [14.95], o $d^2I/d\omega\, d\Omega$ [14.83], por la frecuencia de repetición $c/2\pi\rho$ para convertir energía en potencia, y por $\omega_0 = c/\rho$ para convertir de «por unidad de intervalo de frecuencia» a «por armónico». Por consiguiente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{c}{\rho}\right)^2 \frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}\bigg|_{\omega=n\omega_0} \\ P_n &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{c}{\rho}\right)^2 \frac{dI}{d\omega}\bigg|_{\omega=n\omega_0} \end{aligned}\right\} \qquad [14.96]$$

Estos resultados se han comparado con la experiencia para varias energías de sincrotrones *. Las distribuciones angular, de polarización y de frecuencia están todas en buen acuerdo con la teoría. Debido a la amplia distribución de frecuencia indicada en la figura 14.11, que cubre las regiones visible, ultravioleta y de rayos X, la radiación de sincrotrón resulta útil para el estudio de las propiedades ópticas de los sólidos. Existen varios centros en los que puede utilizarse la luz de sincrotrón, como instalaciones asociadas a sincrotrones o anillos de almacenamiento de alta energía cuyo propósito principal es el estudio de partículas fundamentales. El artículo de GODWIN ** describe la radiación de sincrotrón desde este punto de vista.

La radiación del sincrotrón se ha observado en el campo de la astronomía en asociación con las manchas solares, la nebulosa de Cáncer y las partículas en los cinturones de radiación de Júpiter. En la nebulosa de Cáncer el espectro de radiación se extiende desde las radiofrecuencias hasta el ultravioleta extremo, y manifiesta una polarización muy acusada. De observaciones detalladas se puede deducir que electrones con energías que alcanzan los 10^{12} eV emiten radiación de sincrotrón al moverse en órbitas circulares o helicoidales en una inducción magnética del orden de 10^{-3} gauss (véase el problema 14.15). La emisión de radio de Júpiter a $\sim 10^3$ MHz procede de electrones energéticos atrapados en cinturones de Van Allen situados a distancias desde unos pocos radios (R_J) hasta 30-100 radios de la superficie de Júpiter. Los datos de un vehículo espacial (encuentro con Júpiter del Pioneer 10, el 4 de diciembre de

* F. R. ELDER, R. V. LANGMUIR y H. C. POLLOCK, *Phys. Rev.*, 74, 52 (1948); D. H. TOMBOULAIN y P. L. HARTMANN, *Phys. Rev.*, 102, 1423 (1956); G. BATHOW, E. FREYTAG y R. HAENSEL, *J. Appl. Phys.*, 37, 3449 (1966).

** R. P. GODWIN, en *Springer tracts in Modern Physics*, vol. 51, ed. G. Hohler, Springer-Verlag, Berlín (1969), págs. 1-73.

1973) que pasó a $2{,}8R_J$ mostraron un campo magnético aproximadamente dipolar con un momento dipolar de $4 \times 10^3 R_J^3$ (A m^2). Se observaron flujos apreciables de electrones con energías mayores de 3 MeV y un pequeño porcentaje con energías mayores de 50 MeV. Tomando como campo típico 1 gauss y como energía típica 5 MeV, las ecuaciones [12.42] y [14.85] demuestran que el movimiento en espiral tiene un radio del orden de 100-200 metros, $\omega_0 \sim 2 \times 10^6$ s^{-1}, y que se radian alrededor de 10^3 armónicos significativos.

14.7. DISPERSION DE THOMSON DE LA RADIACION

Si sobre una partícula libre de carga e y masa m incide una onda plana de radiación electromagnética monocromática, la partícula será acelerada y, por tanto, emitirá radiación. Esta radiación será emitida en direcciones distintas a la de la onda plana incidente, pero tendrá la misma frecuencia que la radiación incidente si el movimiento de la partícula no es relativista. El proceso total puede describirse como una dispersión de la radiación incidente.

De acuerdo con [14.20] la potencia instantánea radiada en el estado de polarización $\boldsymbol{\epsilon}$ por una partícula de carga e en movimiento no relativista es:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \dot{\boldsymbol{v}}|^2 \qquad [14.97]$$

La aceleración es debida a la onda plana incidente. Si su vector de propagación es $\boldsymbol{k}_0$, y su vector de polarización $\boldsymbol{\epsilon}_0$, el campo eléctrico puede escribirse

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\epsilon}_0 E_0 e^{i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{x} - i\omega t} \qquad [14.98]$$

Entonces, de la ecuación de fuerza para movimiento no relativista, tenemos la aceleración:

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{\epsilon}_0 \frac{e}{m} E_0 e^{i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{x} - i\omega t} \qquad [14.99]$$

Si suponemos que la carga durante un ciclo de oscilación se desplaza una fracción despreciable de longitud de onda, la media temporal de $|\dot{\boldsymbol{v}}|^2$ es $\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}^*)$. Por ello, la potencia media por unidad de ángulo sólido puede expresarse como:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2c\mu_0} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} \right)^2 |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0|^2 \qquad [14.100]$$

Puesto que el proceso se describe con mayor facilidad como una dispersión, resulta conveniente introducir una sección eficaz de dispersión definida, como en el capítulo 9, por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Energía radiada/unidad de tiempo/unidad de ángulo sólido}}{\text{Flujo de energía incidente en energía/unidad de área/unidad de tiempo}} \qquad [14.101]$$

El flujo de energía incidente es precisamente la media temporal del vector de

Poynting de la onda plana, es decir, $|E_0|^2/2c\mu_0$. Así, de [14.100] obtenemos la sección eficaz diferencial de dispersión

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2|\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0|^2 \qquad [14.102]$$

En la figura 14.12 se ha dibujado la situación geométrica de la dispersión con la elección de los vectores polarización de la onda emitida. El vector de pola-

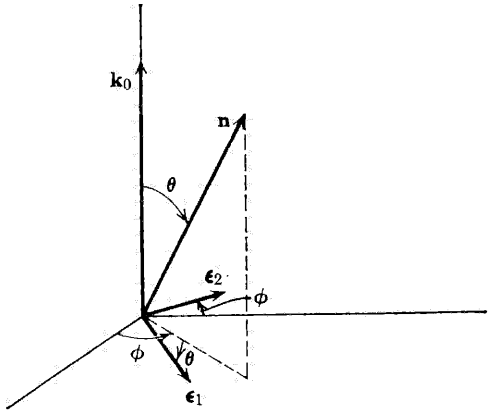


FIG. 14.12.

rización $\boldsymbol{\epsilon}_1$ yace en el plano que contiene $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{k}_0$; $\boldsymbol{\epsilon}_2$ es perpendicular a él. En función de los vectores unitarios paralelos a los ejes de coordenadas, $\boldsymbol{\epsilon}_1$ y $\boldsymbol{\epsilon}_2$ son:

$$\boldsymbol{\epsilon}_1=\cos\theta\,(\boldsymbol{e}_x\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\,\mathrm{sen}\,\phi)-\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$\boldsymbol{\epsilon}_2=-\boldsymbol{e}_x\,\mathrm{sen}\,\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\phi$$

Para una onda polarizada linealmente, cuya polarización sea paralela al eje x, la distribución angular sumada sobre las polarizaciones finales es $(\cos^2\theta\cos^2\phi+\mathrm{sen}^2\phi)$, mientras que para polarización paralela al eje y es $(\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\phi+\cos^2\phi)$. Cuando la radiación incidente no esté polarizada la sección eficaz de dispersión será, pues:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \qquad [14.103]$$

Esta es la llamada *fórmula de Thomson* para la dispersión de radiación por una carga libre, y resulta adecuada para la dispersión de rayos X por electrones o rayos gamma por protones. La distribución angular viene dada en la figura 14.13 por la curva continua. La sección eficaz total de dispersión llamada *sección eficaz de Thomson,* es

$$\sigma_T=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \qquad [14.104]$$

La sección eficaz de Thomson para los electrones es igual a $0{,}665\cdot10^{-24}$ cm^2.

La unidad de longitud $e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2 = 2{,}82 \cdot 10^{-13}$ cm recibe el nombre de *radio clásico del electrón,* porque una distribución clásica de carga, cuya carga total sea igual a la del electrón, debe tener un radio de este orden para que su autoenergía electrostática sea igual a la masa del electrón.

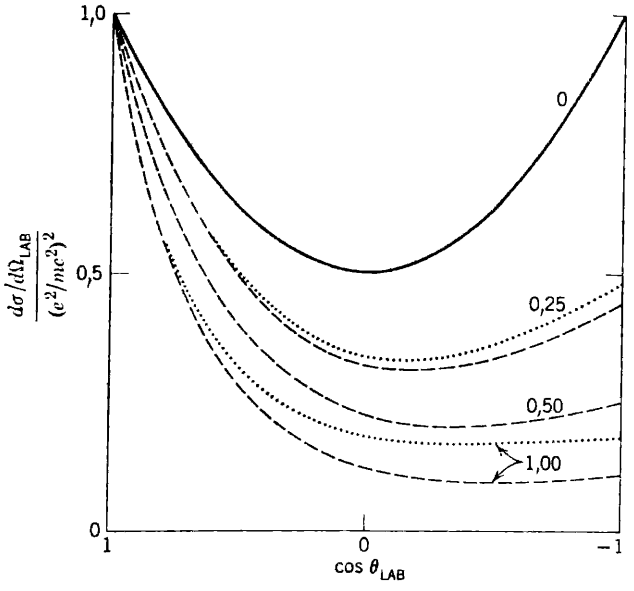


FIG. 14.13. Sección eficaz diferencial de dispersión de la radiación debida a una partícula cargada puntual que inicialmente está en reposo en el laboratorio. La curva continua es el resultado clásico de Thomson. Las curvas de trazos corresponden a los resultados mecanocuánticos para una partícula sin spin, las cifras indicadas dan los valores de $\hbar\omega/mc^2$. Cuando $\hbar\omega/mc^2 = 0{,}25$ y a 1,0, las curvas de puntos indican los resultados para partículas puntuales de spin $\frac{1}{2}$ (electrones).

La fórmula clásica de Thomson sólo es válida a bajas frecuencias, cuando el ímpetu del fotón incidente puede despreciarse. Si el ímpetu del fotón $\hbar\omega/c$ se hace comparable a, o mayor que, mc hay modificaciones. Estas pueden denominarse efectos mecanocuánticos, puesto que el concepto de fotón como partículas sin masa con ímpetu y energía es ciertamente mecanocuántico (¡Paso, Newton!), pero admitido esto, la mayoría de las modificaciones son puramente cinemáticas. El cambio más importante es el observado experimentalmente por COMPTON. La energía, o ímpetu, del fotón dispersado es menor que la energía incidente debido a que la partícula cargada retrocede durante la colisión. Aplicando la cinemática relativista de dos cuerpos al proceso, encontramos que la relación entre los números de onda saliente e incidente está dada por la fórmula de Compton:

$$\frac{k'}{k} = \frac{1}{1 + \dfrac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\theta)}$$

siendo θ el ángulo de dispersión en el laboratorio (el sistema propio del blan-

co). El cálculo mecanocuántico de la dispersión de fotones por partículas puntuales *sin spin* de carga e y masa m conduce a la sección eficaz:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \left(\frac{k'}{k}\right)^2 |\epsilon^* \cdot \epsilon_0|^2 \qquad [14.105]$$

comparable con la expresión clásica [14.102]. En la elección de contraste de radiación el elemento de matriz mecanocuántico es el mismo que la amplitud clásica. El factor $(k'/k)^2$ procede enteramente del espacio fásico. Su presencia hace que la sección eficaz disminuya respecto al resultado de THOMSON para ángulos grandes, como se indica en las curvas de trazos de la figura 14.13. También se ha dibujado en la figura por medio de las curvas de puntos los resultados mecanocuánticos para la dispersión fotón-electrón, esto es, la dispersión por una partícula puntual de spin $\frac{1}{2}$ que está descrita por la ecuación de Dirac. En general, las curvas son semejantes a las de las partículas sin spin, pero para ángulos grandes son algo mayores debido a la dispersión producida por el momento magnético del electrón *. La integral de [14.105] sobre el ángulo es elemental, pero algo complicada. Anotaremos sólo las formas límite para $\hbar\omega \ll mc^2$ y para $\hbar\omega \gg mc^2$:

$$\frac{\sigma}{\sigma_T} = \begin{cases} 1 - 2\dfrac{\hbar\omega}{mc^2} + \ldots & \hbar\omega \ll mc^2 \\ \dfrac{3}{4}\dfrac{mc^2}{\hbar\omega}, & \hbar\omega \gg mc^2 \end{cases} \qquad [14.106]$$

Para la dispersión por electrones el límite de bajas frecuencias es el mismo, pero a altas frecuencias existe un factor adicional, $[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2\hbar\omega/mc^2)]$.

Para los protones las desviaciones respecto a la fórmula de Thomson se presentan para energías del fotón por encima de unos 100 MeV. Esto está muy por debajo de la energía crítica $\hbar\omega \sim Mc^2 \sim 1$ GeV que podría esperarse en analogía con el efecto Compton para el electrón. La razón es que un protón no es una partícula puntual como el electrón sin más interacciones que las electromagnéticas, sino que es una entidad compleja que posee una distribución de carga dispersa con un radio del orden de $0{,}8 \times 10^{-13}$ cm debido a interacciones fuertes con mesones pi. La desviación respecto a la dispersión de Thomson (un aumento rápido de la sección eficaz) tiene lugar para energías del fotón del orden de la energía en reposo del mesón pi (140 MeV).

---

* La sección eficaz equivalente a [14.105] para electrones tiene en lugar de $|\epsilon^* \cdot \epsilon_0|^2$, la expresión:

$$|\epsilon^* \cdot \epsilon_0|^2 + \frac{(k-k')^2}{4kk'}$$

Se conoce con el nombre de *fórmula de Klein-Nishina* para la dispersión de Compton.

14.8. DISPERSION DE RADIACION POR CARGAS CUASI-LIBRES. DISPERSION COHERENTE E INCOHERENTE

En la dispersión de rayos X por los átomos se observa la distribución angular dada por [14.104] para ángulos grandes, al menos en los elementos ligeros. Sin embargo, en la zona frontal la dispersión por electrón aumenta rápidamente hasta valores muy grandes comparados con la sección eficaz de Thomson. La razón se halla en la superposición coherente de las amplitudes debidas a todos los electrones. Puede deducirse de [14.18] que el campo de radiación debido a un cierto número de partículas cargadas no relativistas será:

$$\boldsymbol{E}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \sum e_j \left[\frac{\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_j)}{R_j} \right]_{\text{ret}} \qquad [14.107]$$

Si usamos [14.99] como aceleración de una partícula genérica, hallamos

$$\boldsymbol{E}_a = \frac{E_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_0) \sum_j \frac{e_j^2}{m_j} \frac{\exp\left[i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{x}_j - i\omega \left(t - \frac{R_j}{c} \right) \right]}{R_j} \qquad [14.108]$$

Para el cálculo de la radiación es suficiente aproximar R_j en el exponente por la forma [14.63]. Así, pues, operando de forma análoga a como hicimos para pasar de [14.97] a [14.102], tenemos que la sección eficaz de dispersión es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_j \frac{e_j^2}{4\pi\epsilon_0 m_j c^2} e^{i\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{x}_j} \right|^2 |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0|^2 \qquad [14.109]$$

en donde

$$\boldsymbol{q} = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}_0 \qquad [14.110]$$

es la variación vectorial del número de ondas en la dispersión.
La ecuación [14.109] se aplica a partículas cargadas libres que instantáneamente ocupen las posición $\boldsymbol{x}_j$. Por ejemplo, los electrones en los átomos no son libres, pero si la frecuencia de la radiación incidente es grande frente a las frecuencias características de enlace, las partículas pueden tratarse como si fueran libres, mientras son aceleradas por un impulso de duración finita. Así [14.109] se puede aplicar a la dispersión de radiación de alta frecuencia (comparada con las frecuencias de enlace) por partículas cargadas enlazadas. Lo único que queda por hacer antes de comparar con los resultados experimentales es promediar la ecuación [14.109] respecto a las posiciones de todas las partículas en el sistema enlazado. Por consiguiente, la sección eficaz observable de dispersión es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left\langle \left| \sum_j \frac{e_j^2}{4\pi\epsilon_0 m_j c^2} e^{i\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{x}_j} \right|^2 \right\rangle |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0|^2 \qquad [14.111]$$

en donde el símbolo $\langle\,\rangle$ significa valor medio para todos los valores posibles de $\boldsymbol{x}_j$.

La sección eficaz [14.111] presenta un comportamiento muy distinto, según el valor de $|\boldsymbol{q}|$. Las coordenadas $\boldsymbol{x}_j$ son del orden de las dimensiones lineales del sistema enlazado. Si llamamos a a esta dimensión, el comportamiento de la sección eficaz será muy distinto en las dos regiones, $qa \ll 1$ y $qa \gg 1$. Si el ángulo de dispersión es θ, q vale $2k \operatorname{sen}(\theta/2)$. Así, la línea divisoria entre ambos dominios tiene lugar para ángulos tales que

$$2ka \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \sim 1 \qquad [14.112]$$

Si la frecuencia es suficientemente baja para que $ka \gg 1$, se aplicará el límite $qa \ll 1$ a todos los ángulos. Pero para frecuencias en que $ka \gg 1$, habrá una región correspondiente a ángulos menores que

$$\theta_c \sim \frac{1}{ka} \qquad [14.113]$$

en donde será válido el límite $qa \ll 1$, y otra región de ángulos mayores a la que se aplicará el límite $qa \gg 1$.

Cuando $qa \ll 1$, los argumentos de las exponenciales de [14.111] son tan pequeños que podemos hacer los factores exponenciales aproximadamente iguales a la unidad. Así, la sección eficaz diferencial se convierte en

$$\lim_{qa \to 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_j \frac{e_j^2}{4\pi\epsilon_0 m_j c^2} \right|^2 |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0|^2 = Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0|^2 \qquad [14.114]$$

en donde la última forma resulta adecuada a los electrones de un átomo de número atómico Z. Esto nos pone de manifiesto el efecto coherente de todas las partículas, dando una intensidad que corresponde al cuadrado del número de partículas por la intensidad para una sola partícula.

En el límite opuesto, $qa \gg 1$, los argumentos de las exponenciales son grandes y de valores muy diferentes. Por consiguiente, los términos cruzados resultantes del cuadrado de la suma darán cero en promedio. Solamente quedarán los términos al cuadrado, y la sección eficaz toma así la forma

$$\lim_{qa \to \infty} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_j \left(\frac{e_j^2}{4\pi\epsilon_0 m_j c^2} \right)^2 |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0|^2 = Z \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0|^2 \qquad [14.115]$$

en donde otra vez la forma final se refiere a los electrones de un átomo. Este resultado corresponde a superposición no coherente o dispersión por partículas individuales.

Si se trata de dispersión de rayos X por átomos, podemos obtener una estimación del ángulo crítico [14.113], utilizando [13.95] como radio atómico. Así, obtenemos el resultado numérico

$$\theta_c \sim \frac{Z^{1/3}}{\hbar\omega \text{ (kev)}} \qquad [14.116]$$

Para ángulos menores que θ_c, la sección eficaz aumenta rápidamente hasta un valor del orden de [14.114], mientras que para ángulos grandes viene dada por Z veces el resultado de Thomson, [14.115], o bien, si se trata de rayos X de

alta frecuencia o rayos gamma, por la fórmula de Klein-Nishina, dibujada en la figura 14.13.

14.9. RADIACION DE TRANSICION

Una partícula cargada en movimiento uniforme según una línea recta en el vacío no radia. Sin embargo, se demostró en la sección 13.5 que una partícula que se mueve a velocidad constante puede radiar si se halla en un medio material y se mueve con velocidad mayor que la velocidad de fase de la luz en dicho medio. Esta radiación, con su ángulo de emisión característico $\theta_C = \sec^{-1}(\beta\epsilon^{1/2})$, es la radiación de Cherenkov. Existe otro tipo de radiación, la radiación de transición, señalada por primera vez por GINSBURG y FRANK, en 1946, que se emite siempre que una partícula cargada pasa repentinamente de un medio a otro. Lejos de la superficie límite, en el seno del primer medio, la partícula posee unos ciertos campos característicos de su movimiento y del medio. Posteriormente, cuando ha penetrado profundamente en el segundo medio, posee unos campos apropiados a su movimiento y este medio. Aún si el movimiento es uniforme en todo el proceso, los campos iniciales y finales serán diferentes si los dos medios tienen propiedades electromagnéticas diferentes. Evidentemente, cuando la partícula se acerca y atraviesa la interfase los campos deben reorganizarse. En este proceso de reorganización parte de los campos son emitidos como radiación de transición.

Sin recurrir a cálculos complicados pueden entenderse aspectos importantes de la radiación de transición *. Considérese una partícula relativista con carga ze y velocidad $v = \beta c$ que incide normalmente a lo largo del eje z desde el vacío ($z < 0$) sobre un medio semiinfinito uniforme ($z > 0$) con índice de refracción $n(\omega)$ tal como se indica en la figura 14.14. Los campos móviles de la partícula cargada inducen en el medio una polarización $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}', t)$ variable con el tiempo. La polarización emite radiación. Los campos radiados desde puntos diferentes del espacio se combinan de forma coherente en la proximidad de la trayectoria y para una cierta profundidad en el medio, dando lugar a radiación de transición con una intensidad y distribución angular características.

La distribución angular y la *longitud de formación D* son una consecuencia directa del requisito de que haya coherencia para que la intensidad radiada sea apreciable. Los campos excitadores de la partícula incidente vienen dados por [11.152]. La dependencia en un punto dado $\boldsymbol{x}' = (z', \rho', \phi')$ de potencias inversas de $[\rho'^2 + \gamma^2(z' - vt)^2]$ implica que una componente de Fourier de frecuencia ω, *a)*, se desplaza en la dirección z con velocidad v y, por tanto, tendrá una amplitud proporcional a $e^{i\omega z'/v}$, y *b)*, tendrá una amplitud significativa fuera de la trayectoria sólo a distancias del orden de $\rho'_{\text{máx}} \simeq \gamma v/\omega$. Por otra parte, la polarización variable con el tiempo $\boldsymbol{x}'$ genera una onda cuya forma en la zona de radiación es:

$$A\frac{e^{ikr}}{r} \cdot e^{-ik(z'\cos\theta + \rho'\,\text{sen}\,\theta\cos\phi')}$$

* La necesidad de una discusión cualitativa me ha sido infundida por cuestiones numerosas de colegas próximos y lejanos y por V. F. WEISSKOPF en ocasión de un seminario en el que presentó un tratamiento análogo.

siendo A proporcional al campo de la partícula incidente, $k=n(\omega)\omega/c$ y se supone que la radiación se observa en el plano x-z y en el hemisferio hacia adelante. La superposición coherente apreciable debida a puntos diferentes

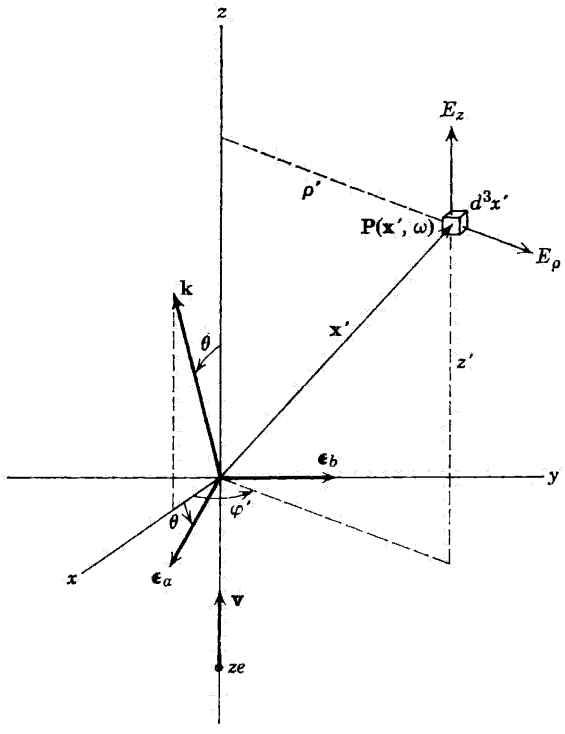


FIG. 14.14. Una partícula cargada con carga ze y velocidad v incide normalmente según el eje z sobre un medio dieléctrico uniforme semiinfinito que ocupa el semiespacio $z>0$. La radiación de transición se observa formando un ángulo θ con la dirección de movimiento de la partícula, tal como se indica mediante el vector onda $\boldsymbol{k}$ y los vectores $\boldsymbol{\epsilon}_a$ y $\boldsymbol{\epsilon}_b$ asociados.

del medio tendrá lugar supuesto que el producto de los campos excitadores de la partícula y la onda generada no cambia de fase en forma significativa en toda la región. El factor importante en la amplitud es:

$$e^{i(\omega/v)z'}e^{-i(\omega/c)n(\omega)\cos\theta z'}e^{-i(\omega/c)n(\omega)\rho'\operatorname{sen}\theta\cos\phi'}=e^{i(\omega/c)(1/\beta-n(\omega)\cos\theta)z'}e^{-i(\omega/c)n(\omega)\rho'\operatorname{sen}\theta\cos\phi'}$$

En la dirección radial la coherencia se mantendrá únicamente si la fase en que aparece ρ' es la unidad o menor en la región $0<\rho'\lesssim\rho'_{\text{máx}}$ en la que los campor excitadores resultan apreciables. Por consiguiente, la radiación no será apreciable a menos que:

$$\frac{\omega}{c}n(\omega)\frac{\gamma v}{\omega}\operatorname{sen}\theta\lesssim 1$$

o sea:

$$n(\omega)\gamma\theta\lesssim 1 \qquad [14.117]$$

para $\gamma \gg 1$. La distribución angular está, pues, confinada al cono frontal $\gamma\theta \lesssim 1$, como en todos los procesos de emisión relativista.

El factor dependiente de z' en la amplitud es:

$$e^{i(\omega/c)(1/\beta - n(\omega)\cos\theta)z'}$$

La profundidad $d(\omega)$ hasta la que se mantiene la coherencia es, pues:

$$\frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{\beta} - n(\omega)\cos\theta\right) d(\omega) \simeq 1$$

Para frecuencias por encima de la región óptica, en donde no hay radiación de Cherenkov, aproximaremos $n(\omega) \simeq 1 - (\omega_p^2/2\omega^2)$, y $\beta^{-1} \simeq 1 + 1/2\gamma^2$ para una partícula relativista, con $\cos\theta \simeq 1$, obtenemos:

$$d(\nu) \simeq \frac{2\gamma c/\omega_p}{\nu + \nu^{-1}} \qquad [14.118]$$

donde hemos introducido una frecuencia adimensional

$$\nu = \frac{\omega}{\gamma\omega_p} \qquad [14.119]$$

Definimos la *longitud de formación* D como el mayor valor de $d(\nu)$ como función de ν:

$$D = d(1) = \frac{\gamma c}{\omega_p} \qquad [14.120]$$

Para sustancias con densidades del orden de la unidad la frecuencia de plasma es $\omega_p \simeq 3 \times 10^{16}$ s^{-1}, que corresponde a una energía $\hbar\omega_p \simeq 20$ eV. Por tanto, $c/\omega_p \simeq 10^{-6}$ cm e incluso para $\gamma \geqslant 10^3$ la longitud de formación D es sólo de unas décimas de micrón. En el aire en condiciones normales de presión y temperatura hay un factor adicional de 30 debido a la menor densidad.

El volumen de coherencia adyacente a la trayectoria de la partícula y a la superficie del que procede la radiación de transición de frecuencia ω es evidentemente:

$$V(\omega) \sim \pi\rho_{\text{máx}}^2(\omega)\, d(\omega) \sim 2\pi\gamma \left(\frac{c}{\omega_p}\right)^3 \frac{1}{\nu(1+\nu^2)}$$

Este volumen disminuye de tamaño rápidamente cuando $\nu > 1$. Por consiguiente, podemos esperar que en ausencia de factores de compensación el espectro de la radiación de transición se extenderá hasta $\nu \simeq 1$, pero no apreciablemente más allá.

Hemos aclarado algo el mecanismo de la radiación de transición y sus características principales. Se halla confinada a ángulos pequeños en la dirección frontal ($\gamma\theta \lesssim 1$). Se produce por radiación coherente de la polarización variable con el tiempo en un pequeño volumen adyacente a la trayectoria de la partícula y a profundidades en el medio hasta la longitud de formación D. Su espectro se extiende hasta frecuencias del orden de $\omega \sim \gamma\omega_p$. Es posible continuar estos argumentos cualitativos y obtener una estimación de la energía total radiada, pero este ejercicio empieza a tener la apariencia de virtuosismo

basado en la percepción. En lugar de ello, vamos a pasar a un cálculo real del fenómeno.

El cálculo exacto de la radiación de transición resulta complicado. Al final del capítulo se dan algunas referencias. Nosotros nos contentaremos con un cálculo aproximado que es adecuado para la mayoría de las aplicaciones y resulta físicamente transparente. Está basado en la observación de que para frecuencias por encima de la región de resonancia óptica el índice de refracción no es muy diferente de la unidad. A tales frecuencias los campos de la partícula incidente en el medio no difieren significativamente de los correspondientes al vacío. Esto quiere decir que la componente de Fourier de la polarización inducida $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}', \omega)$ puede calcularse aproximadamente por la expresión:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}', \omega) \simeq [\epsilon(\omega) - \epsilon_0]\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{x}', \omega) \qquad [14.121]$$

en la que $\boldsymbol{E}_i$ es la transformada de Fourier del campo eléctrico de la partícula incidente en el vacío. Sin embargo, la *propagación* de la onda radiada por la polarización debe describirse apropiadamente con el número de ondas $k = \omega n(\omega)/c$ correspondiente al medio. Esto es debido a que las diferencias de fase son importantes como ya se ha visto en la discusión cualitativa.

El campo de radiación dipolar de la polarización $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}', \omega)\, d^3x'$ en el elemento de volumen d^3x' situado en $\boldsymbol{x}'$ es, según [9.18]:

$$d\boldsymbol{E}_{\text{rad}} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 R}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{P}) \times \boldsymbol{k}\, d^3x'$$

en donde $\boldsymbol{k}$ es el vector de onda en la dirección de observación y $R \simeq r - \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{x}'$. Sustituyendo [14.121] e integrando al semiespacio $z' > 0$, el campo total radiado a la frecuencia ω es:

$$\boldsymbol{E}_{\text{rad}} = \frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{\epsilon(\omega) - \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}\right] k^2 \int_{z'>0} (\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}_i) \times \hat{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'}\, d^3x'$$

Con la aproximación

$$\epsilon(\omega) \simeq \epsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \qquad [14.122]$$

el campo radiado para $\omega \gg \omega_p$ resulta ser:

$$\boldsymbol{E}_{\text{rad}} \simeq \frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{-\omega_p^2}{4\pi c^2}\right) \int_{z'>0} (\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}_i) \times \hat{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'}\, d^3x' \qquad [14.123]$$

Esto significa, según [14.52] y [14.60], que la energía radiada tiene el espectro diferencial en ángulo y frecuencia

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{1}{8\pi^2 c\mu_0}\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^4 \left| \int_{z>0} [\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{x}, \omega)] \times \hat{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'}\, d^3x' \right|^2 \qquad [14.124]$$

Nótese que los campos excitadores $\boldsymbol{E}_i$ están definidos por la transformada de Fourier de los campos de la sección 11.10, ya utilizada en la sección 13.2. En nuestra aproximación no es necesario utilizar los campos más elaborados de

la sección 13.4. Con la notación de la figura 14.14 los campos incidentes son:

$$E_\rho(x,\omega)=\frac{1}{\sqrt{8\pi^3\epsilon_0^2}}\frac{ze\omega}{\gamma v^2}e^{i\omega z/v}K_1\left(\frac{\omega\rho}{\gamma v}\right)$$
$$E_z(x,\omega)=-\frac{i}{\sqrt{8\pi^3\epsilon_0^2}}\frac{ze\omega}{\gamma^2 v^2}e^{i\omega z/v}K_0\left(\frac{\omega\rho}{\gamma v}\right) \qquad [14.125]$$

La integral de [14.124] puede calcularse como sigue. Primero explotamos el hecho de que la dependencia con z de $\boldsymbol{E}_i$ tiene lugar solamente a través del factor $e^{i\omega z/v}$ y escribimos:

$$\boldsymbol{F}\equiv\int_{z>0}[\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}_i(x,\omega)]\times\hat{\boldsymbol{k}}e^{-ik\cdot x}\,d^3x$$
$$=\int\int dx\,dy\,[\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}_i]_{z=0}\times\hat{\boldsymbol{k}}e^{-ik\,\mathrm{sen}\,\theta x}\int_0^\infty dz\,e^{i(\omega/v-k\cos\theta)z}$$
$$=\frac{i}{\left(\frac{\omega}{v}-k\cos\theta\right)}(1-e^{i(\omega/v-k\cos\theta)Z})\int dx\int dy[\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}_i]_{z=0}\times\hat{\boldsymbol{k}}e^{-ik\,\mathrm{sen}\,\theta x}$$

El límite superior Z en la integración sobre z es un truco formal para demostrar que las contribuciones debidas a valores de z diferentes se suman constructivamente y hacen que crezca la amplitud hasta $Z\gtrsim D$. Más allá de la profundidad D, el rápido giro de la fase impide cualquier refuerzo adicional. Para medios efectivamente semiinfinitos (láminas de espesor grande comparado con D) despreciamos por razones físicas * la exponencial oscilante en Z y obtenemos, para una *sola interfase*:

$$\boldsymbol{F}=\frac{i}{\left(\frac{\omega}{v}-k\cos\theta\right)}\int\int dx\,dy\,e^{-ik\,\mathrm{sen}\,\theta x}[\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}_i]_{z=0}\times\hat{\boldsymbol{k}}$$

El campo eléctrico transversal a $\hat{\boldsymbol{k}}$ puede expresarse en función de las componentes E_ρ y E_z y los vectores polarización $\boldsymbol{\epsilon}_a$ y $\boldsymbol{\epsilon}_b$, que se han dibujado en la figura 14.14, en la forma:

$$[\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}_i]\times\hat{\boldsymbol{k}}=(E_\rho\cos\theta\cos\phi-E_z\,\mathrm{sen}\,\theta)\boldsymbol{\epsilon}_a+E_\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\boldsymbol{\epsilon}_b$$

siendo θ el ángulo polar de $\hat{\boldsymbol{k}}$ y se ha prescindido de la prima en el ángulo acimutal de integración. La componente paralela a $\boldsymbol{\epsilon}_b$ da cero al integrar puesto que es impar en y. Por consiguiente, sustituyendo [14.125] tenemos:

$$\boldsymbol{F}=\frac{i\boldsymbol{\epsilon}_a}{\left(\frac{\omega}{v}-k\cos\theta\right)}\int\int dx\,dy\,e^{-ik\,\mathrm{sen}\,\theta x}\left[\cos\theta\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}E_\rho-\mathrm{sen}\,\theta E_z\right]_{z=0}$$

* Para láminas que no sean gruesas comparadas con D, o cuando se emplea un paquete de hojas, es necesario un tratamiento menos ligero. Véanse los problemas 14.18 y 14.19.

$$= \frac{i\epsilon_a}{\left(\frac{\omega}{v} - k\cos\theta\right)} \frac{1}{\sqrt{8\pi^3\epsilon_0^2}} \frac{ze\omega}{\gamma v^2} \int\int dx\, dy\, e^{-ik\,\mathrm{sen}\,\theta x}$$

$$\left[\cos\theta \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} K_1\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right) + i\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\gamma} K_0\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]$$

El primer término puede transformarse integrando por partes la variable x, utilizando la expresión:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} K_1\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right) = -\frac{\gamma v}{\omega}\frac{\partial}{\partial x} K_0\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

de modo que

$$\boldsymbol{F} = \epsilon_a \frac{1}{\sqrt{8\pi^3\epsilon_0^2}} \frac{ze\,\mathrm{sen}\,\theta}{v\left(\frac{\omega}{v} - k\cos\theta\right)} \left(k\cos\theta - \frac{\omega}{v\gamma^2}\right) \int\int dx\, dy\, e^{-ik\,\mathrm{sen}\,\theta x} K_0\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right]$$

La integral restante puede calcularse a partir de la transformada del coseno:

$$\int_0^\infty K_0(\beta\sqrt{z^2+t^2})\cos(\alpha z)\, dz = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \exp\left(-|t|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) \quad [14.126]$$

El resultado para $\boldsymbol{F}$ es:

$$\boldsymbol{F} = \epsilon_a \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon_0^2}} \frac{ze\,\mathrm{sen}\,\theta\left(k\cos\theta - \frac{\omega}{v\gamma^2}\right)}{v\left(\frac{\omega}{v} - k\cos\theta\right)\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2} + k^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)} \quad [14.127]$$

En la aproximación de que el movimiento es relativista ($\gamma \gg 1$), los ángulos son pequeños ($\theta \ll 1$) y las frecuencias son altas ($\omega \gg \omega_p$), esta expresión se convierte en:

$$\boldsymbol{F} \simeq \epsilon_a \sqrt{\frac{2}{\pi\epsilon_0^2}} \frac{ze}{c}\left(\frac{c}{\omega_p}\right)^2 \frac{\gamma}{\nu^2} \frac{\sqrt{\eta}}{\left(1 + \frac{1}{\nu^2} + \eta\right)(1+\eta)} \quad [14.128]$$

siendo ν la variable frecuencia adimensional [14.119] y $\eta = (\gamma\theta)^2$ una variable angular apropiada. Poniendo $d\Omega = d\phi\, d(\cos\theta) \simeq d\phi\, d\eta/2\gamma^2$ la distribución de energía en ν y η es:

$$\frac{d^2I}{d\nu\, d\eta} = \frac{\pi}{\gamma^2}\cdot\gamma\omega_p \frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}$$

$$\simeq \frac{z^2e^2\gamma\omega_p}{4\pi^2\epsilon_0 c}\cdot\left[\frac{\eta}{\nu^4\left(1 + \frac{1}{\nu^2} + \eta\right)^2(1+\eta)^2}\right] \quad [14.129]$$

En la figura 14.15 se han dibujado las distribuciones angulares para valores fijos de ν. Para bajas frecuencias el espectro tiene un máximo en $\eta \simeq 1$ y después disminuye de modo relativamente lento, como η^{-1}, hasta que se alcanza el valor $\eta = \nu^{-2}$. A partir de él disminuye como η^{-3}. Cuando $\nu \gtrsim 1$, el espectro

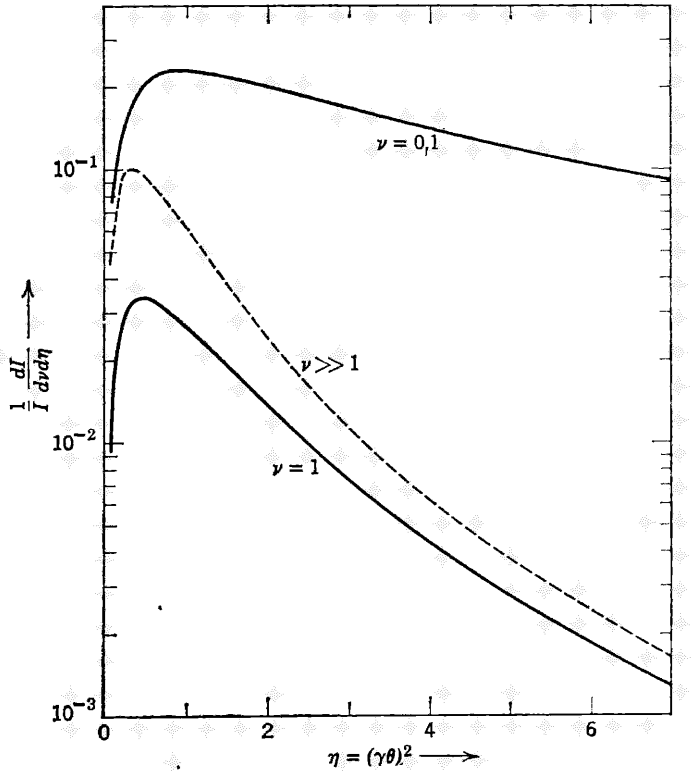


FIG. 14.15. Distribuciones angulares de la radiación de transición para $\nu = 0{,}1$, $\nu = 1$ y $\nu \gg 1$. Las curvas continuas son las distribuciones angulares normalizadas, esto es, la relación entre [14.129] y [14.132]. La curva de trazos es esta relación en el límite $\nu \to \infty$ multiplicada por ν^4.

tiene su pico en $\eta \gtrsim \frac{1}{3}$ y cae como η^{-3} cuando $\eta \gg 1$. Para $\eta = 0$ el denominador de [14.129] es $(1+\nu^2)^2$ mostrando que para $\nu \gg 1$ la intensidad para cualquier ángulo es despreciable [compárese con el volumen de coherencia $V(\omega)$ anterior].

El espectro de energía integrado respecto a la variable angular η es:

$$\frac{dI}{d\nu} = \frac{z^2e^2\gamma\omega_p}{4\pi^2\epsilon_0 c}\left[(1+2\nu^2)\ln\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)-2\right] \qquad [14.130]$$

Cuyos límites para ν grande y ν pequeño son:

$$\frac{dI}{d\nu} \simeq \frac{z^2e^2\gamma\omega_p}{4\pi^2\epsilon_0 c}\begin{cases} 2\ln(1/e\nu), & \nu \ll 1 \\ \dfrac{1}{6\nu^4}, & \nu \gg 1 \end{cases} \qquad [14.131]$$

El espectro energético se ha dibujado en forma log-log en la figura 14.16. A bajas frecuencias el espectro diverge logarítmicamente; en ellas nuestro tratamiento aproximado falla en cualquier caso, pero presenta una integral finita. La energía total emitida por cada interfase en radiación de transición es:

$$I=\int_0^\infty \frac{dI}{d\nu}\,d\nu=\frac{z^2e^2\gamma\omega_p}{12\pi\epsilon_0 c}=\frac{z^2}{3(137)}\gamma\hbar\omega_p \qquad [14.132]$$

Según la figura 14.16 podemos estimar que alrededor de la mitad de la energía es emitida en el intervalo $0{,}1\leqslant\nu\leqslant 1$. En lenguaje cuántico, decimos que una

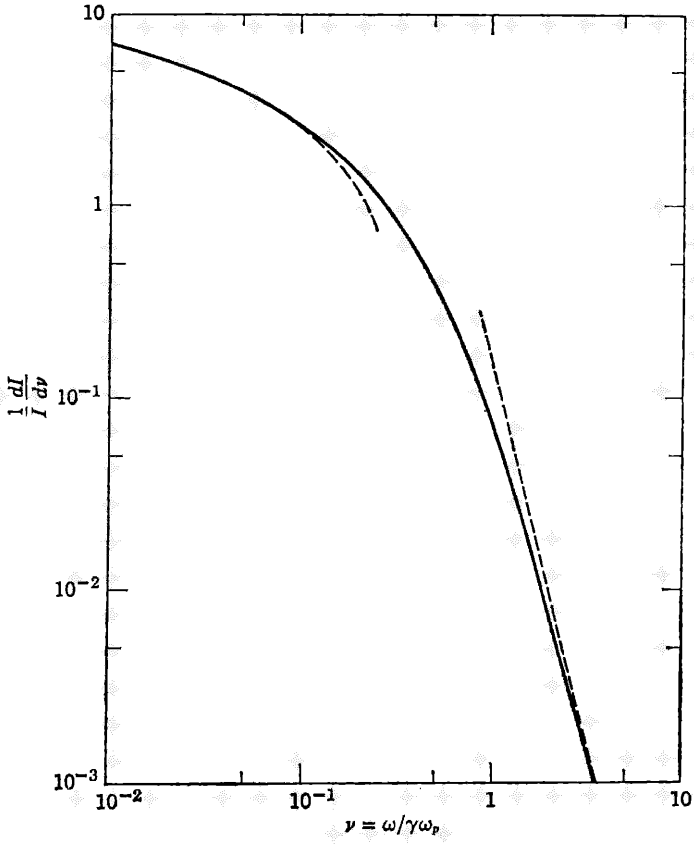


FIG. 14.16. Distribución en frecuencia normalizada $\left(\frac{1}{I}\right)\left(\frac{dI}{d\nu}\right)$ de la radiación de transición como función de $\nu=\omega/\gamma\omega_p$. Las curvas de trazos son las dos expresiones aproximadas [14.131].

fracción apreciable de la energía aparece en forma de fotones comparativamente energéticos. Por ejemplo, con $\gamma=10^3$ y $\hbar\omega_p=20$ eV, estos cuantos se encuentran en la región de rayos X blandos de 2 a 20 keV.

La presencia del factor de γ en [14.132] hace que la radiación de transición sea atractiva como un mecanismo para la identificación de partículas, y quizás incluso para la medida de sus energías, en la región de energías muy elevadas

en la que no se dispone de otros medios. La presencia del factor numérico $1/(3 \times 137)$ significa que la probabilidad de emisión de fotones energéticos por tránsito en una interfase es muy pequeña. Es necesario utilizar un paquete de muchas hojas con separaciones entre ellas. Las hojas pueden ser bastante delgadas, puesto que sólo necesitan ser gruesas en comparación con la longitud de formación D [14.120]. En tal caso, una partícula al atravesar cada hoja emitirá *doble* radiación de transición del valor dado por [14.132] (véase el problema 14.18). Un dispositivo típico puede contener 200 hojas de Mylar de espesor $(1 \text{ a } 5) \times 10^{-3}$ cm, con separaciones desde 2×10^{-2} cm hasta 0,4 cm. La superposición coherente de los campos debidos a las diferentes interfases, dos por cada hoja, produce una modulación de las distribuciones angular y de energía (véase el problema 14.19). La construcción de un instrumento útil resulta difícil por problemas de tolerancias, de absorción de los rayos X blandos en el paquete, y de su detección en forma segura en presencia de fondo. Se ha realizado un esfuerzo considerable en investigación y desarrollo, iniciado en la U.R.S.S., y que aún continúa *.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

La radiación por cargas aceleradas se trata al menos en todos los tratados de electrodinámica, aunque la profundidad varía mucho de unos a otros. Los aspectos relativistas se tratan más o menos detalladamente en

IWANENKO y SOKOLOW, secciones 39-43.
LANDAU y LIFSHITZ, *Teoría clásica de los campos*, caps. 8 y 9.
PANOFSKY y PHILLIPS, caps. 18 y 19.
SOMMERFELD, *Electrodynamics*, secciones 29 y 30.

Cálculos extensos de la radiación emitida por partículas relativistas, anticipando muchos resultados vueltos a obtener en el periodo 1940-50, se presentan en la interesante monografía de

SCHOTT.

La radiación de sincrotrón tiene aplicaciones en la física del estado sólido, de plasmas y en astrofísica. Una descripción detallada del sincrotrón como fuente de luz se encuentra en

GODWIN (obra citada).

Las aplicaciones a la física de plasmas se discuten en

BEKEFI,

en tanto que los problemas astrofísicos se tratan con detalle en

A. G. PACHOLCZYK, *Radio Astrophysics*, Freeman, San Francisco (1970),

con numerosas referencias a la bibliografía de investigación al final de cada capítulo.

---

* Algunas referencias recientes al trabajo experimental sobre la radiación de transición y los identificadores de partículas son: L. C. YUAN y otros, *Phys. Letters*, **31B**, 603 (1970); A. I. ALIKHANIAN y otros, *Phys. Rev. Letters*, **30**, 109 (1973); F. HARRIS y otros, *Nucl. Inst. and Meth.*, **107**, 413 (1973); M. L. CHERRY, D. MULLER y T. A. PRICE, *Nucl. Inst. and Meth.*, **115**, 141 (1974).

La dispersión de radiación por partículas cargadas se presenta con claridad en

LANDAU y LIFSHITZ, *Classical theory of fields*, secciones 9.11 a 9.13, y *Electrodynamics of continuous media*, caps. 14 y 15.

La radiación de transición ha sido revisada con extensa bibliografía por

I. M. FRANK, *Usp. Fiz. Nauk.*, **87**, 189 (1965) [trad. *Sov. Phys. Uspekhi*, **8**, 729 (1966)],
F. G. BASS y V. M. YAKOVENKO, *Usp. Fiz. Nauk.*, **86**, 189 (1965) [trad. *Sov. Phys. Uspekhi*, **8**, 420 (1965)],
M. L. TER-MIKAELIAN, *High-Energy Electromagnetic Processes in Condensed Media*, Wiley-Interscience, Nueva York (1972).

Cálculos teóricos detallados aparecen en

G. M. GARIBYAN, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **33**, 1403 (1957) [trad. *Sov. Phys. JEPT*, **6**, 1079 (1958)],
G. M. GARIBYAN, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **37**, 527 (1959) [trad. *Sov. Phys. JEPT*, **10**, 372 (1958)],
J. DOOHER, *Phys. Rev.*, **D3**, 2652 (1971).

Este último trabajo escrito trata claramente de la radiación de transición por monopolos magnéticos, pero se transcribe con facilidad. El cálculo de la radiación de transición al atravesar los granos de polvo interestelar las partículas energéticas, realizado con la misma aproximación que la empleada en la sección 14.9, se encuentra en

L. DURAND, *Astrophys. J.*, **182**, 417 (1973).

PROBLEMAS

14.1. Verifíquese, calculando explícitamente, que las expresiones de Liénard-Wiechert correspondientes a *todas* las componentes de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ de una partícula que se mueve a velocidad constante están de acuerdo con las obtenidas en el texto mediante una transformación de Lorentz. Utilícese el método general del final de la sección 14.1.

14.2. Utilizando los campos de Liénard-Wiechert, discútase la potencia media temporal radiada por unidad de ángulo sólido por una partícula en movimiento no relativista de carga e, que se mueve:

a) a lo largo del eje z siendo su posición instantánea $z(t)=a\cos\omega_0 t$,
b) en un círculo de radio R situado en el plano x-y con velocidad angular constante ω_0.

En cada caso represéntese la distribución angular de la radiación y determínese la potencia total radiada.

14.3. Una partícula *no relativista* de carga ze, masa m y energía cinética E efectúa una colisión *frontal* con un campo central de fuerza fijo de tipo finito. La interacción es repulsiva y viene descrita por un potencial $V(r)$, que se hace mayor que E a distancias próximas.

a) Demuéstrese que la energía total radiada viene dada por

$$\Delta W=\frac{4}{3}\,\frac{z^2e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\left|\frac{dV}{dr}\right|^2\frac{dr}{\sqrt{V(r_{\min})-V(r)}}$$

en donde $r_{\min}$ es la distancia de mayor aproximación en la colisión.

b) Si la interacción es un potencial de Coulomb $V(r)=zZe^2/4\pi\epsilon_0 r$, demuéstrese que la energía total radiada es

$$\Delta W=\frac{8}{45}\frac{zmv_0^5}{Zc^3}$$

en donde v_0 es la velocidad de la carga en el infinito.

14.4. Una partícula de masa m, carga q, se mueve en un plano perpendicular a una inducción magnética uniforme y estática B.

a) Calcúlese la energía total radiada por unidad de tiempo, expresada mediante las constantes ya definidas, y la razón γ de la energía total de la partícula a su energía en reposo.

b) Si en el instante $t=0$ la partícula tiene una energía total $E_0=\gamma_0 mc^2$, demuéstrese que en el instante t tendrá una energía $E=\gamma mc^2<E_0$, en donde

$$t\simeq\frac{6\pi\epsilon_0 m^3c^3}{q^4B^2}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_0}\right)$$

siempre que $\gamma\gg 1$.

c) Si la partícula es inicialmente no relativista y tiene una energía *cinética* $\mathcal{E}_0$ en el instante $t=0$, ¿cuál es la energía cinética en el instante t?

d) Si la partícula se encuentra atrapada en el campo magnético dipolar de la Tierra describiendo espiras adelante y atrás a lo largo de una línea de fuerza, ¿radia más energía cuando está más cerca del ecuador o cuando está más cerca de los polos? ¿Por qué? De ser posible, dense respuestas cuantitativas.

14.5. Al igual que en el problema 14.2, *a)*, una carga e se mueve armónicamente a lo largo del eje z, $z(t')=a\cos(\omega_0 t')$.

a) Demuéstrese que la potencia instantánea radiada por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{e^2c\beta^4}{16\pi^2a^2\epsilon_0}\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2(\omega t')}{(1+\beta\cos\theta\operatorname{sen}\omega_0 t')^5}$$

en donde $\beta=\dot{a}\omega_0/c$.

b) Calculando el valor medio respecto del tiempo, demuéstrese que la potencia media temporal radiada por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{e^2c\beta^4}{128\pi^2a^2\epsilon_0}\left[\frac{4+\beta^2\cos^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^{7/2}}\right]\operatorname{sen}^2\theta$$

c) Represéntese de forma aproximada la distribución angular para movimiento no relativista y relativista.

14.6. Utilizando la fórmula de sumación de Poisson o por otros procedimientos, demuéstrese de forma explícita que si el movimiento de una partícula radiante se repite con periodicidad T, el espectro continuo de frecuencias se convierte en un espectro discreto que contiene frecuncias que son múltiplos enteros de la fundamental. Demuéstrese que una expresión de la potencia radiada por unidad de ángulo sólido en cada múltiplo m de la frecuencia fundamental $\omega_0=2\pi/T$ es

$$\frac{dP_m}{d\Omega}=\frac{e^2\omega_0^4m^2}{32\pi^4\epsilon_0c^3}\left|\int^{2\pi/\omega_0}v(t)\times n\exp\left[im\omega_0\left(t-\frac{n\cdot x(t)}{c}\right)\right]dt\right|^2$$

14.7. *a)* Demuéstrese que en el caso de movimiento armónico simple de una carga que se trató en el problema 14.5 la potencia media radiada por unidad de án-

gulo sólido en el armónico m es

$$\frac{dP_m}{d\Omega}=\frac{e^2c\beta^2}{8\pi^2a^2\epsilon_0}m^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta J_m^2(m\beta\cos\theta)$$

b) Demuéstrese que en el límite no relativista la potencia total radiada tiene lugar toda ella en el fundamental y tiene por valor

$$P\simeq\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0c^3}\,\omega_0^4\overline{a^2}$$

en donde $\overline{a^2}$ es la amplitud cuadrática media de oscilación.

14.8. Una partícula de carga e se mueve en una trayectoria circular de radio R situada en el plano x-y con velocidad angular constante ω_0.

a) Demuéstrese que la expresión exacta para la distribución angular de la frecuencia radiada en el múltiplo m de ω_0 es

$$\frac{dP_m}{d\Omega}=\frac{e^2\omega_0^4R^2}{8\pi^2c^3\epsilon_0}m^2\left[\left(\frac{dJ_m(m\beta\,\mathrm{sen}\,\theta)}{d(m\beta\,\mathrm{sen}\,\theta)}\right)^2+\frac{\mathrm{cotg}^2\,\theta}{\beta^2}J_m^2(m\beta\,\mathrm{sen}\,\theta)\right]$$

en donde $\beta=\omega_0R/c$ y $J_m(x)$ es la función de Bessel de orden m.

b) Supóngase movimiento no relativista y obténgase un resultado aproximado para $dP_m/d\Omega$. Demuéstrese que en este caso límite se obtienen los resultados del problema 14.2, *b)*.

c) Supóngase que el movimiento es extremadamente relativista y obténganse los resultados hallados en el texto para una partícula relativista en movimiento circular instantáneo. (Puede ser un ayuda el consultar la obra de WATSON, págs. 79 y 249.)

14.9. Una partícula de carga e y masa m se mueve relativísticamente en una trayectoria helicoidal en un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B}$. El ángulo de paso de la hélice es α ($\alpha=0$ correspondería al movimiento circular).

a) Demuéstrese mediante argumentos similares a los de la sección 14.4 que un observador lejos de la hélice detectaría radiación con una frecuencia fundamental

$$\omega=\frac{\omega_B}{\cos^2\alpha}$$

y que el espectro se extendería hasta frecuencias del orden de

$$\omega_c=\gamma^3\omega_B\cos\alpha$$

siendo $\omega_B=eB/\gamma m$. (Téngase cuidado al determinar el radio de curvatura ρ de la trayectoria helicoidal.)

b) Demuéstrese, con los resultados de la parte *a)* y de la sección 14.6, que la potencia radiada por unidad de ángulo sólido y por unidad de intervalo de frecuencia angular es

$$\frac{d^2P}{d\omega\,d\Omega}\simeq\frac{e^2\gamma^2}{24\pi^4\epsilon_0c}\,\frac{\omega_B}{\cos^2\alpha}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2(1+\gamma^2\psi^2)^2\left[K_{2/3}^2(\xi)+\frac{\gamma^2\psi^2}{1+\gamma^2\psi^2}K_{1/3}^2(\xi)\right]$$

en la que ω_B y ω_c se han definido anteriormente, $\xi=(\omega/3\omega_c)(1+\gamma^2\psi^2)^{3/2}$ y ψ es el ángulo de la dirección de observación respecto al vector velocidad de la partícula, como en la figura 14.9.

14.10. El principio de correspondencia de Bohr establece que en el caso límite de números cuánticos grandes, la potencia radiada clásica, en la frecuencia fundamental, es igual al producto del cuanto de energía ($\hbar\omega_0$) por el recíproco del tiempo de vida media de la transición del número cuántico n al $(n-1)$.

a) Utilizando aproximaciones no relativistas, demuéstrese que en un átomo hidrogenoide, la probabilidad de transición (recíproco de la vida media) del paso de una órbita circular de número cuántico principal n a $(n-1)$ viene dada de forma clásica por

$$\frac{1}{\tau}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)^4\frac{mc^2}{\hbar}\frac{1}{n^5}$$

b) En el caso del hidrógeno compárese el valor clásico obtenido de *a)* con los resultados mecanocuánticos correctos para las transiciones $2p\rightarrow 1s$ $(1{,}6\cdot10^{-9}$ s), $4f\rightarrow 3d$ $(7{,}3\cdot10^{-8}$ s), $6h\rightarrow 5g$ $(6{,}1\cdot10^{-7}$ s).

14.11. El movimiento periódico de cargas da lugar a un espectro de frecuencias discreto en múltiplos de la frecuencia fundamental del movimiento. Puede presentarse la radiación apreciable en los múltiplos de la frecuencia fundamental a causa de los efectos relativistas (problemas 14.7 y 14.8) incluso aunque las componentes de la velocidad sean *verdaderamente* sinusoidales, o puede presentarse si las componentes de la velocidad no son sinusoidales, pero sí periódicas. Un ejemplo de este último movimiento es un electrón que experimenta un movimiento elíptico no relativista en un átomo de hidrógeno.

Podemos especificar la órbita por las ecuaciones paramétricas

$$x=a(\cos u-\epsilon)$$

$$y=a\sqrt{1-\epsilon^2}\,\operatorname{sen} u$$

en donde

$$\omega_0 t=u-\epsilon\,\operatorname{sen} u$$

a es el semieje mayor, ϵ es la excentricidad, ω_0 es la frecuencia orbital, y u es el ángulo relacionado con el ángulo polar θ mediante $\tan(u/2)=\sqrt{(1-\epsilon)/(1+\epsilon)}\tan(\theta/2)$. En función de la energía de enlace B y del momento angular L, las distintas constantes son

$$a=\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 B},\qquad \epsilon=\sqrt{1-\frac{32\pi^2\epsilon_0^2BL^2}{me^4}},\qquad \omega_0^2=\frac{128\pi^2\epsilon_0^2B^3}{me^4}$$

a) Demuéstrese que la potencia radiada en el múltiplo k de ω_0 es

$$P_k=\frac{e^2}{3\pi c^3\epsilon_0}(k\omega_0)^4a^2\left\{\frac{1}{k^2}\left[[J_k'(k\epsilon)]^2+\left(\frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2}\right)J_k^2(k\epsilon)\right]\right\}$$

en donde $J_k(x)$ es una función de Bessel de orden k.

b) Compruébese que para órbitas circulares el resultado general de *a)* está de acuerdo con el apartado *a)* del problema 14.10.

14.12. En lugar de una sola carga e moviéndose con velocidad constante ω_0 en una trayectoria circular de radio R, como en el problema 14.8, se tiene un conjunto de N cargas que se mueven en la misma circunferencia manteniendo fijas sus posiciones relativas.

a) Demuéstrese que la potencia radiada en el múltiplo m de ω_0 es

$$\frac{dP_m(N)}{d\Omega}=\frac{dP_m(1)}{d\Omega}F_m(N)$$

en donde $dP_m(1)/d\Omega$ es el resultado del apartado *a)* del problema 14.8, y

$$F_m(N)=\left|\sum_{j=1}^{N} e^{im\theta_j}\right|^2$$

siendo θ_j la posición angular de la carga j en el instante $t=t_0$.

b) Demuéstrese que, si las cargas están uniformemente espaciadas a lo largo de la circunferencia, la energía se radia solamente en los múltiplos de $N\omega_0$, pero con una intensidad N^2 veces la de una sola carga. Dése una explicación cualitativa de estos hechos.

c) Sin realizar cálculos detallados demuéstrese que, en el caso de movimiento no relativista, la dependencia de la potencia total radiada con N es predominantemente como β^{2N}, de modo que en el límite $N\to\infty$ no se emite radiación.

d) Mediante argumentos análogos a los de *c)*, demuéstrese que, para partículas relativistas, la potencia radiada varía con N primordialmente como $\exp(-2N/3\gamma^3)$ cuando $N\gg\gamma^3$, de modo que, nuevamente cuando $N\to\infty$, no se emite radiación.

e) ¿Qué aplicación tienen los resultados *c)* y *d)* a las propiedades de la radiación por una corriente estacionaria en una espira?

14.13. Como idealización de corrientes estacionarias fluyendo por conductor, considérese el sistema de N cargas q idénticas moviéndose con velocidad *(módulo)* constante v (pero sujeta a aceleraciones) en una trayectoria cerrada arbitraria. Las sucesivas cargas están separadas por un pequeño intervalo constante Δ.

Partiendo de los campos de Liénard-Wiechert para cada partícula y sin hacer hipótesis referentes a la velocidad v respecto de la de la luz, demuéstrese que, en el caso límite $N\to\infty$, $q\to 0$ y $\Delta\to 0$, pero $Nq=$constante y $q/\Delta=$constante, no se emite radiación por el sistema y los campos eléctrico y magnético del mismo son los valores estáticos usuales.

(Obsérvese que en el caso de un circuito real los iones positivos estacionarios en los conductores producen un campo eléctrico que contrarresta exactamente el debido a las cargas en movimiento.)

14.14. Supongamos que el espectro instantáneo de potencia radiada por un electrón en un sincrotrón viene dado por

$$P(\omega,t)\simeq\frac{1}{2\pi^2\epsilon_0}\frac{e^2}{\rho}\gamma(t)\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/3}e^{-2\omega/\omega_c}$$

en donde $\omega_c=3\omega_0\gamma^3(t)$.

a) Si los electrones aumentan su energía de forma lineal aproximadamente durante un ciclo de operación, demuéstrese que el espectro de potencia, calculado su valor medio sobre un ciclo, es

$$\langle P(\omega,t)\rangle\simeq\frac{2^{2/3}}{12\pi^2\epsilon_0}\frac{e^2}{\rho}\gamma_{\max}x^{2/3}\int_x^\infty\frac{e^{-y}}{y^{4/3}}\,dy$$

en donde $x=2\omega/\omega_{c\,\max}$.

b) Determínense las formas límite del espectro cuando $x\ll 1$ y $x\gg 1$.

c) Mediante tablas de la integral (es una función gamma incompleta) o por integración gráfica para $x=0{,}1$, $0{,}5$, $1{,}0$, $1{,}5$, determínese el espectro numéricamente, represéntese en función de $\log[\omega/\omega_{c\,\max}]$, y compárese con las curvas dadas por ELDER, LANGMUIR y POLLOCK, *Phys. Rev.*, **74**, 52 (1948) (Fig. 1).

14.15. *a)* Con el esquema de aproximaciones de la sección 14.6, demuéstrese que, en el caso de una partícula relativista moviéndose en una trayectoria de radio

instantáneo ρ, los espectros angular y de frecuencia de las radiaciones con sentido helicoidal a la izquierda y a la derecha son

$$\frac{d^2I_{\pm}}{d\omega\, d\Omega}=\frac{e^2}{24\pi^3 c\epsilon_0}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^2\left|K_{2/3}(\xi)\pm\frac{\theta}{\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^{1/2}}K_{1/3}(\xi)\right|^2$$

b) Mediante las fórmulas de la sección 14.6 y *a)*, discútase la polarización de la radiación total emitida en función de la frecuencia y del ángulo. En particular, determínese el estado de polarización para: 1) frecuencias altas ($\omega > \omega_c$) y todos los ángulos; 2) frecuencias intermedias y bajas ($\omega < \omega_c$) y ángulos grandes; 3) frecuencias intermedias y bajas y ángulos muy pequeños.

c) Para la comparación con la experiencia, véase el artículo de P. Joos, *Phys. Rev. Letters*, 4, 558 (1960).

14.16. Considérese la radiación de sincrotrón procedente de la nebulosa de Cáncer, en que se mueven electrones con energías superiores a 10^{12} eV en un campo magnético del orden de 10^{-4} gauss.

a) En el caso $E=10^{12}$ eV, $B=10^{-4}$ gauss, calcúlese el radio de la órbita ρ, la frecuencia fundamental $\omega_0=c/\rho$ y la frecuencia crítica ω_c. ¿Cuál es la energía $\hbar\omega_c$ en keV?

b) Demuéstrese que el espectro de potencia de la radiación de sincrotrón para un electrón relativista de energía E en un campo magnético constante puede expresarse así:

$$P(E,\omega)=\text{const}\left(\frac{\omega}{E^2}\right)^{1/3} f\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

en donde $f(x)$ es una función de corte que tiene el valor unidad para $x=0$ y se anula rápidamente para $x\gg 1$ [por ejemplo, $f\simeq\exp(-2\omega/\omega_c)$, como en el problema 14.14], y $\omega_c=(eB/m)(E/mc^2)^2\cos\theta$, siendo θ el ángulo de paso de la trayectoria helicoidal [problema 14.9, *a)*].

c) Si los electrones están distribuidos energéticamente según el espectro $N(E)dE\sim E^{-n}\,dE$, demuéstrese que la radiación de sincrotrón tiene el espectro de potencia

$$\langle P(\omega)\rangle\, d\omega\sim\omega^{-\alpha}\, d\omega$$

en donde $\alpha=(n-1)/2$.

d) Las observaciones en el espectro continuo en radiofrecuencias y frecuencias ópticas, procedente de la nebulosa de Cáncer, demuestran que en el intervalo de frecuencia $\omega\sim 10^8$ s^{-1} a $\omega\sim 6\cdot 10^{15}$ s^{-1}, la constante $\alpha\simeq 0{,}35$. A frecuencias mayores de 10^{18} s^{-1} el espectro de radiación cae bruscamente con $\alpha\gtrsim 1{,}5$. Determínese el índice n del espectro de energía del electrón, así como un corte superior para dicho espectro. ¿Es este corte compatible con las cifras del apartado *a)*?

e) La semivida de una partícula que emite radiación de sincrotrón se define como el tiempo que tarda en perder la mitad de su energía inicial. Partiendo del resultado del problema 14.4, *b)* hállese una fórmula para la semivida de un electrón en años cuando B está dado en miligauss y E en GeV. ¿Cuál es la semivida utilizando las cifras de la parte *a)*? ¿Cómo se compara esto con el tiempo de vida conocido de la nebulosa de Cáncer? ¿Deben estar reponiéndose continuamente los electrones energéticos? ¿De qué origen?

14.17. Una partícula relativista de carga ze se mueve a lo largo del eje z con una velocidad constante βc. El semiespacio $z\leqslant 0$ está ocupado por un medio eléctrico isótropo y uniforme cuya frecuencia de plasma es ω_1, y el espacio $z>0$ con un medio similar cuya frecuencia de plasma es ω_2. Discútase la emisión de

radiación de transición cuando una partícula atraviesa la interfase, utilizando la aproximación de la sección 14.9.

a) Demuéstrese que la intensidad de la radiación por unidad de intervalo de frecuencia angular y por unidad de ángulo sólido está dada, aproximadamente, por:

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} \simeq \frac{z^2e^2\theta^2}{4\pi^3\epsilon_0 c}\left|\frac{1}{\dfrac{1}{\gamma^2}+\dfrac{\omega_1^2}{\omega^2}+\theta^2}-\frac{1}{\dfrac{1}{\gamma^2}+\dfrac{\omega_2^2}{\omega^2}+\theta^2}\right|^2$$

siendo θ el ángulo de emisión relativo a la velocidad de la partícula y $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$.

b) Demuéstrese que la energía total radiada es:

$$I \simeq \frac{z^2e^2}{12\pi\epsilon_0 c}\cdot\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{(\omega_1+\omega_2)^2}\cdot\gamma$$

14.18. Considérese la radiación de transición emitida por una partícula relativista que atraviesa una hoja dieléctrica de espesor a situada perpendicularmente a la trayectoria. Suponiendo que $|[n(\omega)-1]/[n(\omega)+1]|$ es muy pequeño, de modo que pueden ignorarse las reflexiones, demuéstrese que el espectro diferencial angular y en frecuencia está dado por el resultado correspondiente a una sola interfase [14.129] multiplicado por el factor:

$$\mathcal{F}=4\,\mathrm{sen}^2\,\Theta$$

siendo

$$\Theta=\nu\left(1+\frac{1}{\nu^2}+\eta\right)\frac{a}{4D}$$

En ésta, $D=\gamma c/\omega_p$ es la longitud de formación, $\nu=\omega/\gamma\omega_p$ y $\eta=(\gamma\theta)^2$. Supuesto que $a\gg D$, el factor $\mathcal{F}$ oscila de forma extremadamente rápida en ángulo o frecuencia, dando un valor medio de $\langle\mathcal{F}\rangle=2$. Para tales láminas la distribución de intensidad suavizada es precisamente el doble de la correspondiente a una sola interfase.

14.19. Una partícula relativista emite radiación de transición al atravesar normalmente un conjunto de N láminas dieléctricas dispuestas uniformemente, cada una de espesor a y separadas por aire (prácticamente el vacío) una distancia b. Supóngase que las reflexiones múltiples pueden despreciarse para el conjunto total. Esto requiere que:

$$\left|\frac{n(\omega)-1}{n(\omega)+1}\right| \simeq \frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \ll \frac{1}{N}$$

a) Demuéstrese que si la constante dieléctrica del medio varía en la dirección z en la forma $\epsilon(\omega, z)=\epsilon_0[1-(\omega_p^2/\omega^2)\rho(z)]$ el espectro diferencial de radiación de transición viene dado aproximadamente por el resultado [14.129] para una interfase única multiplicado por:

$$\mathcal{F}=\left|\mu\int dz\,\rho(z)\,e^{i\omega z/v}\exp\left(-i\cos\theta\int^z k(z')\,dz'\right)\right|^2$$

siendo $\rho(0)=1$ por convenio, $k(z)=(\omega/c)\sqrt{\epsilon(\omega, z)/\epsilon_0}$ y $\mu=\omega/v-k(0)\cos\theta$.

b) Demuéstrese que para el paquete de N hojas

$$\mathcal{F}=4\,\mathrm{sen}^2\,\Theta\,\frac{\mathrm{sen}^2\,[N(\Theta+\Psi)]}{\mathrm{sen}^2\,[\Theta+\Psi]}$$

en donde Θ se ha definido en el problema 14.18 y $\Psi=\nu(1+\eta)\,(b/4D)$. Compárese con G. M. GARIBYAN, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **60**, 39 (1970) [trad. *Sov. Phys. JETP*, **33**, 23 (1971)].

RADIACION DE FRENADO, METODO DE LOS CUANTOS VIRTUALES, PROCESOS RADIATIVOS BETA

En el capítulo 14 se discutió la radiación por cargas aceleradas de forma general, y se dedujeron fórmulas para las distribuciones angular y en frecuencia, además de tratar ejemplos de radiación por partículas cargadas, tanto relativistas como no relativistas, en campos externos. Dedicamos el presente capítulo a problemas de emisión de radiación electromagnética por partículas cargadas en procesos atómicos y nucleares.

Las partículas que atraviesan la materia sufren dispersión y pierden energía debido a las colisiones, como se describió con detalle en el capítulo 13. En estas colisiones las partículas están sometidas a aceleraciones; por tanto, emiten radiación electromagnética. La radiación emitida durante las colisiones atómicas se denomina *radiación de frenado* (bremsstrahlung *) debido a que se observó por vez primera cuando electrones de alta energía eran detenidos por un blanco metálico grueso. Para partículas no relativistas la pérdida de energía por radiación es despreciable comparada con la pérdida de energía por colisión, pero para partículas ultrarrelativistas la radiación puede ser el modo dominante de pérdida de energía.

Nuestra discusión empieza por considerar el espectro de radiación a frecuencias muy bajas en las que puede deducirse una expresión general, válida tanto clásicamente como mecanocuánticamente. Antes de tratar el fenómeno específico de la radiación de frenado en colisiones de Coulomb se consideran la distribución angular, la polarización y la intensidad de radiación integrada emitida en colisiones de tipo general. Cuando resulta apropiado, se incorporan las modificaciones mecanocuánticas tratando correctamente la cinemática (incluyendo la energía y el ímpetu del fotón). De este modo se incluyen todos los efectos cuánticos importantes, con lo que algunas veces se llega al resultado correcto mecanocuántico. Se discuten con detalle los efectos relativistas, que pueden producir cambios significativos en los resultados.

Otro proceso en que se emite radiación es la creación o aniquilamiento de partículas cargadas. Son procesos cuyo origen es puramente mecanocuántico. No se puede intentar una explicación clásica de este fenómeno básico. Pero dado que éste tiene lugar, podemos preguntarnos legítimamente acerca del espectro e intensidad de la radiación electromagnética que lo acompaña. Por ejemplo, la creación repentina de un electrón rápido en la desintegración

* Hemos preferido la traducción del término «bremsstrahlung» por radiación de frenado, aun cuando la palabra alemana acostumbra a usarse incluso en los textos ingleses. *(N. del T.)*

nuclear beta, puede considerarse para nuestros propósitos como la aceleración violenta de una partícula cargada inicialmente en reposo hasta una cierta velocidad final en un intervalo de tiempo muy corto, o alternativamente, como si en dicho intervalo corto apareciese una carga sobre la partícula en movimiento. Discutiremos la desintegración nuclear beta y la captura de un electrón orbital en estos términos en las secciones 15.6 y 15.7.

En algunos procesos radiativos, como la radiación de frenado, es posible dar cuenta de los efectos mecanocuánticos importantes simplemente tratando apropiadamente la conservación de la energía y el ímpetu al determinar las transferencias de ímpetu máxima y mínima. En otros procesos, como la desintegración beta radiativa, los efectos cuánticos son más serios. Ocurren modificaciones en el espacio fásico que no tienen base clásica alguna. La radiación se emite por procesos que son oscuros y no se relacionan fácilmente con la aceleración de una carga. Generalmente, nuestros resultados están limitados a la región de fotones «blandos», esto es, fotones cuyas energías son pequeñas comparadas con la energía total disponible. En el extremo superior del espectro en frecuencia sólo puede esperarse que nuestras expresiones semiclásicas tengan una validez cualitativa.

15.1. RADIACION EMITIDA DURANTE LAS COLISIONES

Cuando una partícula cargada efectúa una colisión, experimenta aceleración y emite radiación. Si la otra partícula asociada en la colisión es también cargada, ambas emitirán radiación y, por tanto, debemos efectuar una superposición coherente de los campos. Como la amplitud de los campos de radiación depende (en la aproximación no relativista) del producto carga-aceleración, la partícula más ligera radiará más, supuesto que las cargas no sean demasiado diferentes. En muchas de las aplicaciones la masa de una de las partículas que chocan es mucho mayor que la masa de la otra. Entonces, para la emisión de radiación es suficiente tratar la colisión como la interacción de la más ligera de las dos partículas con un campo de fuerzas fijo. Consideraremos únicamente este caso, y dejaremos otros más complicados para los problemas al final del capítulo.

a) *Límite de bajas frecuencias*

Según [14.65] y [14.66] la radiación emitida por una partícula de carga ze durante la colisión puede expresarse como:

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{z^2e^2}{16\pi^3\epsilon_0 c}\left|\int \frac{d}{dt}\left[\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right] e^{i\omega(t-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)/c)}\, dt\right|^2 \qquad [15.1]$$

Supongamos que la colisión tiene una duración τ durante la cual la aceleración que hay es significativa y que la colisión cambia la velocidad de la partícula desde un valor inicial $c\boldsymbol{\beta}$ a un valor final $c\boldsymbol{\beta}'$. El espectro de radiación para frecuencias finitas dependerá de los detalles de la colisión, pero su forma límite a bajas frecuencias depende únicamente de las velocidades inicial y final. En el límite $\omega \to 0$ el factor exponencial de [15.1] es igual a la unidad. Entonces el integrando es una diferencial exacta. El espectro de radiación con

polarización ϵ es, pues:

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}=\frac{z^2e^2}{16\pi^3\epsilon_0 c}\left|\epsilon^*\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\beta}'}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}'}-\frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right)\right|^2 \qquad [15.2]$$

El resultado [15.2] es muy general y es válido tanto clásica como mecanocuánticamente. Para establecer la relación con la forma mecanocuántica, convertiremos primero [15.2] en un espectro de fotones. La energía de un fotón de frecuencia ω es $\hbar\omega$. Dividiendo [15.2] por $\hbar^2\omega$ obtenemos, por tanto, el espectro diferencial en *número de fotones «blandos»*, por unidad de intervalo de *energía* y por unidad de ángulo sólido, con polarización ϵ:

$$\lim_{\hbar\omega\to 0}\frac{d^2N}{d(\hbar\omega)\, d\Omega_\gamma}=\frac{z^2\alpha}{4\pi^2\hbar\omega}\left|\epsilon^*\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\beta}'}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}'}-\frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right)\right|^2 \qquad [15.3]$$

siendo $\alpha=e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c=1/137$ la constante de estructura fina y e es la carga del protón. El subíndice γ en el elemento de ángulo sólido sirve para recordar que es el ángulo sólido en el que sale el fotón. El espectro [15.3] ha de interpretarse como sigue. Supóngase que la colisión es provocada por un potencial externo u otra interacción. Llamemos $d\sigma/d\Omega_p$, en la que p corresponde a partícula, a la sección eficaz de dispersión que produce un cambio de velocidad de $c\boldsymbol{\beta}$ a $c\boldsymbol{\beta}'$. Entonces, la sección eficaz de dispersión y al mismo tiempo de producción de un fotón blando de energía $\hbar\omega$, por unidad de intervalo de energía y por unidad de ángulo sólido, es:

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_p\, d(\hbar\omega)\, d\Omega_\gamma}=\left[\lim_{\hbar\omega\to 0}\frac{d^2N}{d(\hbar\omega)\, d\Omega_\gamma}\right]\cdot\frac{d\sigma}{d\Omega_p} \qquad [15.4]$$

Puede hacerse que la expresión [15.3] aparezca en forma más covariante relativísticamente introduciendo el 4-vector energía-ímpetu del fotón, $k_\mu=(\hbar/c)(\omega, \omega\boldsymbol{n})$, y de la partícula, $p_\mu=Mc(\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta})$. También resulta ventajoso hacer uso del espacio fásico invariante de Lorentz d^3k/k_0 para escribir una expresión manifiestamente invariante *,

$$\frac{d^3N}{(d^3k/k_0)}\equiv\frac{c^2}{\hbar\omega}\frac{d^2N}{d(\hbar\omega)\, d\Omega_\gamma}=\frac{c^2}{\hbar(\hbar\omega)^2}\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega_\gamma} \qquad [15.5]$$

Entonces deducimos, de [15.3]:

$$\lim_{\hbar\omega\to 0}\frac{d^3N}{(d^3k/k_0)}=\frac{z^2\alpha}{4\pi^2}\left|\frac{\epsilon^*\cdot p'}{k\cdot p'}-\frac{\epsilon^*\cdot p}{k\cdot p}\right|^2 \qquad [15.6]$$

en la que los diferentes productos escalares son productos escalares entre 4-vectores [en el contraste de radiación $\epsilon^\mu=(0, \epsilon)$]. El que [15.6] se obtiene de un cálculo mecanocuántico puede hacerse plausible considerando los diagramas de la figura 15.1. El diagrama superior indica el proceso de dispersión sin emisión de radiación. Los tres diagramas inferiores incluyen dispersión y tam-

* El hecho de que ω^{-2} multiplicado por $d^2I/d\omega\, d\Omega$ sea un invariante de Lorentz no está restringido al límite $\omega\to 0$. Hallaremos útil este resultado en algunas de las discusiones posteriores.

bién emisión del fotón. Sus contribuciones se suman en forma coherente. Los dos diagramas de la izquierda tiene el fotón emitido por las líneas externas,

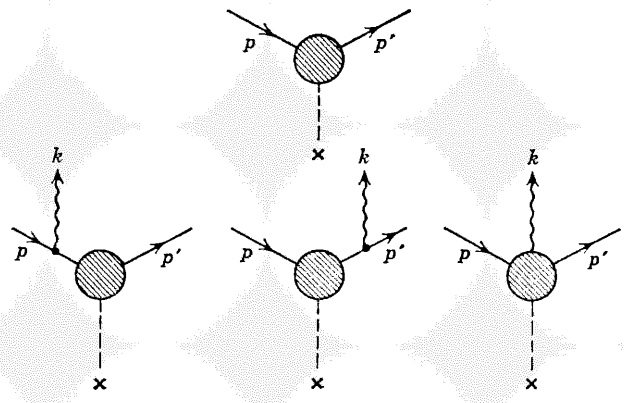


FIG. 15.1. Diagramas mecanocuánticos que describen la dispersión de una partícula sin emisión de fotón (arriba) y con la emisión de un fotón (abajo).

esto es, antes o después de la colisión. Ambos implican propagadores para la partícula entre el vértice de dispersión y el vértice de fotón de la forma:

$$\frac{1}{(p \pm \hbar k)^2 - M^2c^2} = \frac{1}{\pm 2\hbar pk}$$

En el límite $\omega \to 0$ estos propagadores hacen que las contribuciones de estos dos diagramas sean singulares y dan lugar al $(\hbar\omega)^{-1}$ de [15.3]. Por otra parte, el diagrama de la derecha tiene el fotón emitido desde el interior del vértice de dispersión. Su contribución es finita cuando $\omega \to 0$ y por ello es despreciable en comparación con los dos primeros. El cálculo explícito conduce a [15.4] con [15.6] en el límite en que en la cinemática la energía y el ímpetu del fotón pueden despreciarse. La emisión de fotones blandos ocurre sólo desde las líneas externas en cualquier proceso y está dada por el resultado clásico.

b) *Polarización y espectro integrado a todos los ángulos*

Resultan de interés alguna de las formas límite de [15.2]. Si la partícula se mueve *no relativísticamente* antes y después de la colisión, entonces los factores del denominador pueden tomarse iguales a la unidad. La intensidad radiada se convierte en:

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{d^2I_{NR}}{d\omega\, d\Omega} = \frac{z^2e^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \Delta\boldsymbol{\beta}|^2 \qquad [15.7]$$

siendo $\Delta\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\beta}$ el cambio de velocidad en la colisión. Este es justamente un diagrama de radiación dipolar y, cuando se suma para todas las polarizaciones y se integra para todos los ángulos, da la energía total radiada en cada colisión no relativista por unidad de intervalo de frecuencia:

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{dI_{NR}}{d\omega} = \frac{z^2e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c} \cdot |\Delta\boldsymbol{\beta}|^2 \qquad [15.8]$$

Cuando el movimiento es *relativista,* con un cambio de velocidad $\Delta\boldsymbol{\beta}$ pequeño, [15.2] puede aproximarse hasta el menor orden en $\Delta\boldsymbol{\beta}$ en la forma:

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}\simeq\frac{z^2e^2}{16\pi^3\epsilon_0 c}\left|\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\left(\frac{\Delta\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{\beta}\times\Delta\boldsymbol{\beta})}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2}\right)\right|^2 \qquad [15.9]$$

en la que $c\boldsymbol{\beta}$ es la velocidad inicial (o media).

Consideremos ahora la formas explícitas de la distribución angular de radiación emitida con un estado definido de polarización. En los problemas de colisión es usual que se conozca la dirección de la partícula incidente y la dirección de la radiación, pero la dirección de la partícula desviada y, por consiguiente, la de $\Delta\boldsymbol{\beta}$, no se conozca. Como consecuencia, resulta natural tomar el plano que contiene la dirección del haz incidente y la dirección de la radiación como referencia con respecto al que se especifica, el estado de polarización de la radiación.

Por simplicidad consideramos una desviación de pequeño ángulo de modo que $\Delta\boldsymbol{\beta}$ sea aproximadamente perpendicular a la dirección incidente. La figura 15.2 muestra las relaciones vectoriales. Sin pérdida de generalidad, se elige $\boldsymbol{n}$, la dirección de observación, en el plano x-z, formando un ángulo θ con el haz incidente. El cambio de velocidad $\Delta\boldsymbol{\beta}$ yace en el plano x-y, formando un ángulo ϕ con el eje x. Como la dirección de la partícula dispersada no se observa, habremos de tomar la media sobre ϕ. Los vectores unitarios $\boldsymbol{\epsilon}_{\parallel}$ y $\boldsymbol{\epsilon}_{\perp}$ son los vectores polarización paralelos y perpendiculares, respectivamente, al plano que contiene a $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{n}$.

De [15.9] haciendo operaciones se puede pasar a las expresiones (promediadas sobre ϕ):

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0}\frac{d^2I_{\parallel}}{d\omega\, d\Omega}&=\frac{z^2e^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}|\Delta\boldsymbol{\beta}|^2\frac{(\beta-\cos\theta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^4}\\ \lim_{\omega\to 0}\frac{d^2I_{\perp}}{d\omega\, d\Omega}&=\frac{z^2e^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}|\Delta\boldsymbol{\beta}|^2\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4}\end{aligned}\right\} \qquad [15.10]$$

para los dos estados de polarización en el límite de bajas frecuencias. Estas distribuciones angulares son válidas para cualquier tipo de colisiones de ángulo de desviación pequeño. La polarización $P(\theta)$, definida como $(d^2I_{\perp}-d^2I_{\parallel})/(d^2I_{\perp}+d^2I_{\parallel})$, se anula para $\theta=0$, tiene el valor máximo $+1$ en $\cos\theta=\beta$ y disminuye monótonamente para ángulos mayores. Cuando $\gamma\gg 1$, tiene la forma $P(\theta)\simeq 2\gamma^2\theta^2/(1+\gamma^4\theta^4)$. Experimentalmente se observa este comportamiento de forma cualitativa *, pero las desviaciones del límite $\omega\to 0$ son significativas aún para $\omega/\omega_{\text{máx}}=0{,}1$.

La suma de los dos términos de [15.10] da la distribución angular de la radiación blanda emitida en una colisión arbitraria de ángulo pequeño ($\Delta\boldsymbol{\beta}$ pequeño en módulo y perpendicular a la dirección de incidencia). Cuando el movimiento es relativista la distribución tiene un pico muy acusado en la dirección hacia adelante en la forma que ya es familiar, con un ángulo medio de emisión del orden de $\gamma^{-1}=Mc^2/E$. Explícitamente, en el límite $\gamma\gg 1$, te-

* Dan datos recientes sobre la radiación de frenado de electrones W. LICHTENBERG, A. PRZYBYLSKY y M. SCHEER, *Phys. Rev., A* **11**, 480 (1975).

nemos:

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}\simeq\frac{z^2e^2\gamma^4|\Delta\boldsymbol{\beta}|^2}{4\pi^3\epsilon_0 c}\frac{(1+\gamma^4\theta^4)}{(1+\gamma^2\theta^2)^4} \qquad [15.11]$$

La intensidad total por unidad de intervalo de frecuencia para una velocidad

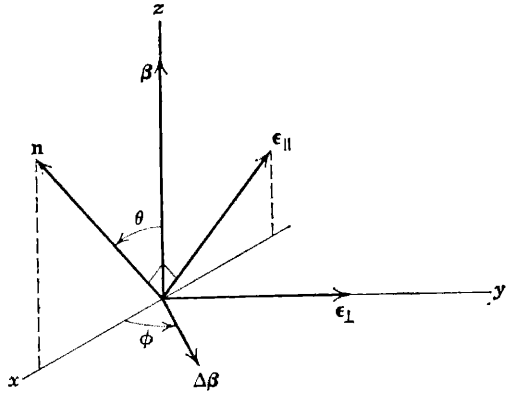


FIG. 15.2.

arbitraria se encuentra mediante una integración elemental a partir de [15.10], y es:

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{dI}{d\omega}=\frac{z^2e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c}\gamma^2|\Delta\boldsymbol{\beta}|^2$$

Cuando el movimiento no es relativista esta expresión se reduce a la [15.8]. Como el ímpetu de la partícula es $\boldsymbol{p}=\gamma Mc\boldsymbol{\beta}$, este resultado puede escribirse en la forma:

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{dI}{d\omega}=\frac{z^2e^2}{6\pi^2\epsilon_0 M^2c^3}Q^2 \qquad [15.12]$$

siendo $Q=|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}|$ la magnitud de la transferencia de ímpetu en la colisión.

Las ecuaciones [15.10] y [15.12] son válidas, tanto relativística como no relativísticamente, supuesto que el cambio de velocidad no sea demasiado grande. Para movimiento relativista el criterio es:

$$|\Delta\boldsymbol{\beta}|<\frac{2}{\gamma},\quad \text{o}\quad Q<2Mc \qquad [15.13]$$

Esto puede verse en [15.2]. Si las dos velocidades $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\beta}'$ forman entre ellas un ángulo $|\Delta\boldsymbol{\beta}|/\beta$ mayor que $2/\gamma$, los dos términos en la amplitud no interferirán. Cuando la dirección de emisión $\boldsymbol{n}$ es tal que uno de ellos es grande, el otro es despreciable. La distribución angular será la correspondiente a dos haces luminosos, uno centrado según $\boldsymbol{\beta}$ y el otro según $\boldsymbol{\beta}'$, cada uno de ellos dado por el valor absoluto del cuadrado del término correspondiente. La in-

tensidad radiada integrada a todos los ángulos es entonces aproximadamente:

$$\lim_{\substack{\omega\to 0\\ Q>2Mc}} \frac{dI}{d\omega} \simeq \frac{z^2e^2}{\pi^3\epsilon_0 c} \ln\gamma \qquad [15.14]$$

Cuando $Q > 2Mc$ la intensidad radiada de fotones blandos es independiente de Q^2, en contraste con el aumento lineal en Q^2 que presenta [15.12] para transferencias de ímpetu menores. Cuando el movimiento no es relativista las transferencias de ímpetu son siempre menores que el límite de [15.13]. Por consiguiente, la intensidad está dada por [15.12] para cualquier transferencia de ímpetu.

c) *Comportamiento cualitativo a frecuencias finitas*

Hasta aquí nos hemos concentrado en el límite de [15.1] a frecuencias muy bajas. Es hora de considerar el comportamiento cualitativo del espectro a frecuencias no nulas. El factor de fase de [15.1] controla el comportamiento a estas frecuencias. Tiene lugar radiación apreciable únicamente cuando la fase cambia relativamente poco durante la colisión. Si se escribe la coordenada $\boldsymbol{r}(t)$ de la partícula en la forma

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \int_0^t c\boldsymbol{\beta}(t')\,dt'$$

entonces, salvo una constante, la fase del integrando de [15.1] es:

$$\Phi(t) = \omega\left(t - \boldsymbol{n}\cdot\int_0^t \boldsymbol{\beta}(t')\,dt'\right)$$

Si imaginamos que la colisión ocurre durante un tiempo τ y que $\boldsymbol{\beta}$ cambia de modo relativamente suave desde su valor inicial a su valor final, el criterio para que haya radiación apreciable es:

$$\omega\tau(1 - \boldsymbol{n}\cdot\langle\boldsymbol{\beta}\rangle) < 1 \qquad [15.15]$$

siendo $\langle\boldsymbol{\beta}\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \boldsymbol{\beta}(t)\,dt$ el valor medio de $\boldsymbol{\beta}$ durante la colisión. Esto se reduce, para colisiones no-relativistas a

$$\omega\tau < 1$$

A bajas frecuencias la intensidad radiada está dada por [15.7], pero para $\omega\tau > 1$ el factor de fase oscilante hará que la integral sea mucho más pequeña que cuando $\omega = 0$. Así, pues, la intensidad caerá rápidamente a cero cuando $\omega > 1/\tau$. Cuando el movimiento es relativista la situación es más complicada. Cuando $|\Delta\boldsymbol{\beta}|$ es pequeño, pero $\gamma \gg 1$, el criterio [15.15] es aproximadamente

$$\frac{\omega\tau}{2\gamma^2}(1 + \gamma^2\theta^2) < 1 \qquad [15.16]$$

Ahora se presenta dependencia angular. Para $\omega\tau < 1$, hay radiación significativa en todos los ángulos de interés. Para $\omega\tau$ comprendido en el intervalo,

$1 < \omega\tau < \gamma^2$, hay radiación apreciable sólo más allá de ángulos del orden de $\theta_{máx}$, siendo $\theta^2_{máx} = 1/\omega\tau$. Cuando $\omega\tau > \gamma^2$ la condición [15.16] no se satisface para ningún ángulo. Por tanto, el espectro de radiación en colisiones relativistas viene dado aproximadamente por [15.11] y [15.12] supuesto que $\omega\tau \ll \gamma^2$, pero se presentan modificaciones en la distribución angular a medida que $\omega\tau$ se aproxima a γ^2 y la intensidad decrece rápidamente para todos los ángulos cuando $\omega \gtrsim \gamma^2/\tau$.

15.2. RADIACION DE FRENADO EN COLISIONES DE COULOMB

La situación más corriente en la que se emite una radiación de tipo continuo es la colisión de una partícula rápida con un átomo. Debido a su mayor carga el núcleo es más efectivo para producir desviaciones de la partícula incidente que los electrones. En consecuencia, ignoraremos los efectos de los electrones de momento y consideraremos la radiación emitida en la colisión de una partícula de carga ze, masa M y velocidad inicial $c\beta$ con el campo coulombiano de una carga puntual fija Ze.

La dispersión elástica de una partícula cargada por un campo estático de Coulomb está dada por la fórmula de Rutherford (véase la sección 13.6):

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega'} = \left(\frac{zZe^2}{2\pi\epsilon_0 pv}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2 \operatorname{sen} \theta'/2)^4} \qquad [15.17]$$

en la que θ' es el ángulo de dispersión de la partícula. Esta sección eficaz es correcta desde el punto de vista relativista para todos los ángulos y es cierta mecanocuánticamente para la dispersión de pequeños ángulos para cualquier partícula. Resulta conveniente expresar [15.17] como una sección eficaz de dispersión por unidad de intervalo de transferencia de ímpetu Q. Para dispersión elástica,

$$Q^2 = 4p^2 \operatorname{sen}^2 \theta'/2 = 2p^2(1 - \cos\theta') \qquad [15.18]$$

Con $d\Omega' = d\phi'\, d\cos\theta' = -Q\, d\phi'\, d\Omega/p^2$, la integración al acimut de [15.17] da

$$\frac{d\sigma_s}{dQ} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0^2}\left(\frac{zZe^2}{\beta c}\right)^2 \cdot \frac{1}{Q^3} \qquad [15.19]$$

En una colisión de Coulomb con transferencia de ímpetu Q la partícula incidente es acelerada y emite radiación. De la sección anterior sabemos que la distribución angular viene dada por [15.10], al menos para desviaciones pequeñas, y la intensidad integrada por [15.12]. Como las distribuciones angulares ya se han discutido, vamos a enfocar nuestra atención sobre el espectro en frecuencia, integrado a todos los ángulos. En analogía con [15.4] definimos la *sección eficaz diferencial de radiación*:

$$\frac{d^2\chi}{d\omega\, d\Omega} = \frac{dI(\omega, Q)}{d\omega} \cdot \frac{d\sigma_s}{dQ}(Q) \qquad [15.20]$$

en la que $dI(\omega, Q)/d\omega$ es la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia en una colisión con transferencia de ímpetu Q. La sección eficaz dife-

rencial de radiación tiene dimensiones (área × energía/frecuencia × ímpetu). La sección eficaz para la emisión de fotones por unidad de intervalo de energía se obtiene dividiendo por $\hbar^2\omega$.

El espectro de radiación de baja frecuencia está dado por [15.12], supuesto que Q no sea demasiado grande. Introduciendo en [15.20] tanto [15.12] como [15.19], obtenemos:

$$\frac{d^2\chi}{d\omega\, d\Omega} = \frac{Ze^2}{12\pi^3\epsilon_0^3 c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{1}{Q} \qquad [15.21]$$

Este resultado es válido a frecuencias y transferencias de ímpetu lo bastante bajas de modo que se satisfagan los criterios de la sección anterior. La sección eficaz de radiación integrada a todas las transferencias de ímpetu es

$$\frac{d\chi}{d\omega} \simeq \frac{Z^2e^2}{12\pi^3\epsilon_0^3 c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \cdot\frac{1}{\beta^2}\int_{Q_{\text{mín}}}^{Q_{\text{máx}}} \frac{dQ}{Q}$$

o sea:

$$\frac{d\chi}{d\omega} \simeq \frac{Z^2e^2}{12\pi^3\epsilon_0^3 c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \cdot\frac{1}{\beta^2}\ln\left(\frac{Q_{\text{máx}}}{Q_{\text{mín}}}\right) \qquad [15.22]$$

Al sumar sobre las transferencias de ímpetu hemos incorporado todas las limitaciones sobre el margen de validez de [15.21] mediante los valores de Q máximo y mínimo. La ecuación [15.21] describe aproximadamente a una frecuencia dada la sección eficaz diferencial de radiación sólo para un margen de Q limitado. Fuera de este margen la sección eficaz se hace menor que la estimada por [15.21] debido a que uno u otro de los factores en [15.20] es mucho menor que [15.12] o [15.19] (o cero). Esto limita de modo efectivo el margen de valores de Q y conduce a [15.22]. La determinación de los valores de $Q_{\text{máx}}$ y $Q_{\text{mín}}$ para diferentes circunstancias físicas es nuestra próxima tarea.

a) *Radiación de frenado clásica*

En nuestra discusión sobre la pérdida de energía en el capítulo 13 vimos que eran aplicables las consideraciones clásicas supuesto que:

$$\eta = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0\hbar v} > 1$$

Para partículas de carga modesta esto significa $\beta \ll 1$. En este límite no relativista la transferencia de ímpetu máxima no está limitada por el fallo de [15.12]. El único límite es cinemático. Según [15.18], vemos que:

$$Q_{\text{máx}} = 2p = 2Mv \qquad [15.23]$$

El límite inferior de Q se determina clásicamente mediante la relación entre la frecuencia y el tiempo de colisión que debe satisfacerse para que haya radiación significativa. Según las secciones 11.10 y 13.1 tenemos:

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{v}{b}; \qquad Q \simeq \frac{zZe^2}{2\pi\epsilon_0 bv}$$

así que la condición $\omega < 1/\tau$ puede escribirse en función de Q en la forma:

$$Q > Q_{\text{mín}}^{(c)} = \frac{zZe^2\omega}{2\pi\epsilon_0 v^2} \qquad [15.24]$$

La sección eficaz de radiación *clásica* es, pues:

$$\frac{d\chi_c}{d\omega} \simeq \frac{Z^2e^2}{12\pi^3\epsilon_0^3 c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \ln\left(\frac{4\pi\epsilon_0\lambda M v^3}{zZe^2\omega}\right) \qquad [15.25]$$

siendo λ un número del orden de la unidad que tiene en cuenta nuestro desconocimiento sobre cómo cae exactamente a cero la intensidad en las proximidades de $\omega\tau = 1$. Esta sección eficaz sólo es significativa supuesto que el argumento del logaritmo sea mayor que la unidad. Por tanto, hay un límite superior $\omega_{\text{máx}}^{(c)}$ en el espectro en frecuencia. Expresado en términos de energía del fotón es:

$$\hbar\omega_{\text{máx}}^{(c)} = \frac{2\lambda}{\eta}\left(\frac{Mv^2}{2}\right) \qquad [15.26]$$

Como η es grande comparada con la unidad en este caso clásico, encontramos que el intervalo de energías de los fotones está limitado a cuantos muy blandos cuyas energías son todas muy pequeñas comparadas con la energía cinética de la partícula incidente. El espectro clásico se presenta en la figura 15.3 para $\eta = 10$ y $\tau = 2$ (valor escogido para que las secciones eficaces clásica y mecanocuántica concuerden a $\eta = 1$ y $\omega = 0$).

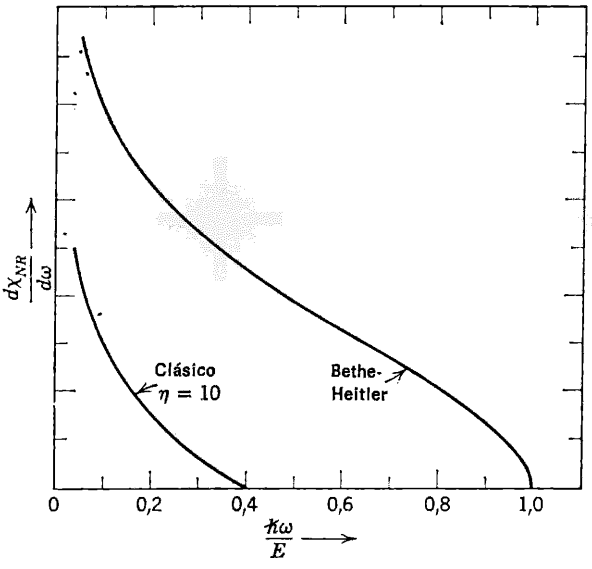


FIG. 15.3. Sección eficaz de radiación (energía × área/unidad de frecuencia) para las colisiones coulombianas en función de la frecuencia medida en unidades de la frecuencia máxima ($E/\hbar$). El espectro clásico está confinado a las frecuencias muy bajas. La curva designada por «Bethe-Heitler» es el resultado de la aproximación mecanocuántica de Born, esto es, [15.29] con $\lambda' = 1$.

b) *Radiación de frenado no relativista*

En el límite clásico no se consideraban la energía y el ímpetu del fotón. Tal postura se justificó *a posteriori* debido a que [15.26] demuestra que el espectro está confinado a fotones de muy baja energía. Pero para partículas rápidas con $\eta < 1$, aunque aún no relativistas, es necesario considerar la conservación de la energía y el ímpetu incluyendo el fotón. Para la dispersión por un centro de fuerzas fijo (o masivo), los requisitos de conservación son:

$$\begin{aligned} E &= E' + \hbar\omega \\ Q^2 &= (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{k})^2 \simeq (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')^2 \end{aligned} \qquad [15.27]$$

siendo $E = p^2/2M$ y $E' = p'^2/2M$, las energías *cinéticas* de la partícula antes y después de la colisión, $\hbar\omega$ y $\boldsymbol{k} = \hbar\omega\boldsymbol{n}/c$ son, respectivamente, la energía y el ímpetu del fotón, y Q el ímpetu transferido al centro de dispersión, como antes. El lector puede verificar que, supuesto que las partículas son no relativistas, está justificado el despreciar el ímpetu del fotón $\boldsymbol{k}$ en la segunda expresión de Q^2 independientemente de las direcciones de los ímpetus.

La máxima transferencia de ímpetu efectiva para la radiación es de nuevo la permitida por la cinemática. Análogamente, el Q mínimo efectivo está determinado por la cinemática y no por el tiempo de colisión *. De la segunda ecuación de las [15.27] obtenemos:

$$\frac{Q_{\text{máx}}}{Q_{\text{mín}}} = \frac{p + p'}{p - p'} = \frac{(\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega})^2}{\hbar\omega} \qquad [15.28]$$

La segunda forma se obtiene utilizando la conservación de la energía. La sección eficaz de radiación [15.22] es, pues:

$$\frac{d\chi_{NR}}{d\omega} \simeq \frac{Z^2e^2}{12\pi^3\epsilon_0^3 c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \ln\left[\frac{\lambda'(\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega})^2}{\hbar\omega}\right] \qquad [15.29]$$

en la que, de nuevo, λ' es un número que puede esperarse sea del orden de la unidad. En realidad, con $\lambda' = 1$ [15.29] es exactamente el resultado mecanocuántico en la aproximación de Born, calculada por primera vez por BETHE y HEITLER (1934). La forma de la sección eficaz de radiación en función de la frecuencia se ha dibujado en la figura 15.3.

El hecho de que hayamos obtenido la sección eficaz mecanocuántica correcta en la aproximación de Born por argumentos semiclásicos en los cuales los aspectos cuánticos se incluyeron sólo en la cinemática puede interpretarse a la luz de las consideraciones de la sección 15.1, especialmente la figura 15.1. En la aproximación de Born el vértice de dispersión, dibujado allí como una mancha para indicar que suceden cosas complicadas, se reduce a un vértice puntual como los vértices fotón-partícula. El tercer diagrama de la parte in-

* Para fotones blandos $Q_{\text{mín}} = p - p'$ puede tomarse aproximadamente $Q_{\text{mín}} \simeq 2\hbar\omega/v$, mientras que la expresión clásica [15.24] es $Q^{(c)}_{\text{mín}} = 2\eta\hbar\omega/v$. Cuando $\eta < 1$, el $Q_{\text{mín}}$ mecanocuántico es mayor que el clásico y, por tanto, gobierna el corte inferior de Q. Para fotones más energéticos ($p - p'$) aún es mayor. En colisiones relativistas $Q^{(c)}_{\text{mín}}$ es igual a su valor no relativista multiplicado por γ^{-3} y, por consiguiente, es mucho menor que [15.33].

ferior está ausente. Sólo radian las líneas externas; la amplitud está dada por [15.6]; la cinemática exacta y el espacio de fase conspiran para dar [15.29].

La sección eficaz de radiación $d\chi/d\omega$ depende de las propiedades de las partículas que intervienen en la colisión en la forma Z^2z^4/M^2, indicando que la emisión de radiación es más importante para electrones en materiales de número atómico elevado. La energía perdida en radiación por una partícula que atraviese un espesor unidad de materia que contenga N cargas fijas Ze (núcleos atómicos) por unidad de volumen es:

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dx} = N \int_0^{\omega_{\text{máx}}} \frac{d\chi(\omega)}{d\omega}\, d\omega$$

Utilizando [15.29] para $d\chi/d\omega$ y cambiando a la variable de integración $x = (\hbar\omega/E)$ podemos escribir la pérdida de energía radiativa en la forma:

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dx} = \frac{NZ}{12\pi^3\epsilon_0^3}\left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)\frac{z^4e^4}{Mc^2}\int_0^1 \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right)dx \qquad [15.30]$$

La integral sin dimensiones tiene el valor unidad. Por comparación, podemos escribir la relación entre la pérdida de energía radiativa y la pérdida de energía por colisión, [13.13] o [13.44], en la forma:

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dE_{\text{col}}} \simeq \frac{4}{3\pi} z^2 \frac{Z}{137}\frac{m}{M}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{1}{\ln B_q} \qquad [15.31]$$

Para partículas no relativistas ($v \ll c$) la pérdida radiativa es completamente despreciable comparada con la pérdida por colisión. Siempre que hay emisión de radiación, como una etapa adicional además del proceso básico (en este caso la desviación de la partícula en el campo coulombiano del núcleo), interviene en forma característica la constante de estructura fina ($e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137$). El factor m/M aparece debido a que la pérdida radiativa implica la aceleración de la partícula incidente, en tanto que la pérdida por colisión implica la aceleración de un electrón.

c) *Radiación de frenado relativista*

Los límites obtenidos a partir de la conservación de la energía deben ser modificados para partículas relativistas. Los cambios son de dos clases. El primero es que el valor máximo efectivo de Q ya no está determinado por la cinemática. Se demostró en la sección 15.1 que [15.2] sólo es válida cuando $Q < 2Mc$. Para valores mayores de Q la intensidad radiada es constante respecto a Q y está dada por [15.14]. A causa del comportamiento de [15.19] como Q^{-3}, esto significa que en [15.22] $Q_{\text{máx}}$ es

$$Q_{\text{máx}} \simeq 2Mc \qquad [15.32]$$

La segunda modificación es que el *ímpetu* del fotón no puede ignorarse ya al determinar la transferencia mínima de ímpetu mediante [15.27]. El mínimo se presenta claramente cuando los tres ímpetus son paralelos

$$Q_{\text{mín}} = p - p' - k$$

Cuando la partícula se mueve relativísticamente tanto inicial como finalmente (aun cuando el fotón pueda extraer una energía apreciable) podemos aproximar $cp \simeq E - M^2c^4/2E$, $cp' \simeq E' - M^2c^4/2E'$, siendo ahora E y E' energías totales. Entonces obtenemos:

$$Q_{\text{mín}} \simeq \frac{M^2c^3\hbar\omega}{2EE'} \qquad [15.33]$$

Con [15.32] y [15.33], la sección eficaz de radiación se convierte en:

$$\frac{d\chi_R}{d\omega} \simeq \frac{Z^2e^2}{12\pi^3\epsilon_0^3 c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \ln\left(\frac{\lambda'' EE'}{Mc^2\hbar\omega}\right) \qquad [15.34]$$

con el acostumbrado λ'' del orden de la unidad. Este resultado es el mismo que el obtenido mecanocuánticamente en el límite relativista, supuesto que la energía del fotón satisface $\hbar\omega \ll E$. En el límite $E, E' \gg Mc^2$, la fórmula cuántica es:

$$\left(\frac{d\chi_R}{d\omega}\right)_{\text{Born}} \simeq \frac{Z^2e^2}{12\pi^3\epsilon_0^3 c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E} + \frac{3\hbar^2\omega^2}{4E^2}\right)\left[\ln\left(\frac{2EE'}{Mc^2\hbar\omega}\right) - \frac{1}{2}\right] \qquad [15.35]$$

Notemos de paso que $Q_{\text{máx}} \simeq 2Mc$, el pequeño cambio de velocidad yace siempre en el plano perpendicular a la dirección de incidencia en una colisión relativista. La distribución angular de la radiación está, pues, dada por [15.11]. La sección eficaz de radiación *doblemente diferencial* de la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia y por unidad de ángulo sólido cuando $\hbar\omega \ll E$, es entonces

$$\frac{d^2\chi_R}{d\omega\, d\Omega_\gamma} \simeq \left[\frac{3}{2\pi}\gamma^2 \frac{(1+\gamma^4\theta^4)}{(1+\gamma^2\theta^2)^4}\right]\frac{d\chi_R}{d\omega} \qquad [15.36]$$

siendo θ el ángulo de emisión del fotón y $d\chi_R/d\omega$ está dada por [15.34]. La pequeñez de $Q_{\text{máx}}/p$ justifica el empleo de la fórmula de Rutherford [15.19] sin correcciones mecanocuánticas por el spin.

d) *Radiación de frenado relativista por una transformación de Lorentz*

Resulta instructivo considerar el cálculo de la radiación de frenado relativista desde un punto de vista algo diferente. Supóngase que en lugar de utilizar el sistema laboratorio en el que el centro de fuerzas se halla en reposo, consideremos el proceso como teniendo lugar en el sistema K' en el que la partícula inicial está en reposo. El proceso de emisión tal como aparece en los dos sistemas se ha esquematizado en la figura 15.4. Una desviación de ángulo pequeño en el laboratorio corresponde a movimiento no relativista durante toda la colisión en el sistema K'. La intensidad diferencial radiada en K', está dada, pues, por la suma de los dos términos de [15.10] con $\beta = 0$:

$$\frac{d^2I'}{d\omega'\, d\Omega'} = \frac{z^2e^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}|\Delta\boldsymbol{\beta}'|^2(1+\cos^2\theta')$$

Se utilizan primas para indicar magnitudes calculadas en el sistema K'. El

cambio de velocidad puede escribirse para el movimiento no relativista en la forma $\Delta\beta' = \Delta p'/Mc$, siendo $\Delta p'$ el cambio de ímpetu en K'. Cuando la desviación es pequeña en el laboratorio, $\Delta p'$ es perpendicular a la dirección de

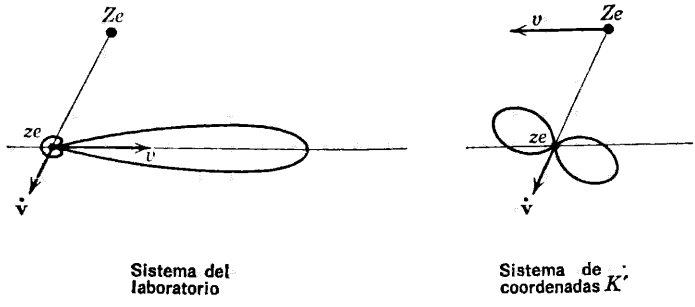


FIG. 15.4. Radiación emitida durante las colisiones relativistas vistas desde el laboratorio (núcleo en reposo) y desde el sistema K' (partícula incidente esencialmente en reposo).

movimiento y, por tanto, es la misma en el laboratorio que en K'. Su magnitud es la transferencia de ímpetu Q. El espectro de energía radiada puede escribirse, por consiguiente, en la forma:

$$\frac{d^2I'}{d\omega'\,d\Omega'} = \frac{z^2e^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}\left(\frac{Q}{Mc}\right)^2(1+\cos^2\theta')$$

La sección eficaz de radiación, triplemente diferencial, para la emisión de radiación por unidad de intervalo de frecuencia y por unidad de ángulo sólido y por unidad de intervalo de transferencia de ímpetu es, en analogía con [15.20],

$$\frac{d^3\chi'}{d\omega'\,d\Omega'\,dQ} = \frac{z^2e^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}\left(\frac{Q}{Mc}\right)^2\cdot\frac{d\sigma_s}{dQ}\cdot(1+\cos^2\theta') \qquad [15.37]$$

Esta es la sección eficaz en el sistema K'. No aparecen primas sobre $d\sigma_s/dQ$, o sobre Q^2 debido a que, en la extensión en que $\boldsymbol{Q}$ sea transversal, estas magnitudes son invariantes frente a las transformaciones de Lorentz *.

La emisión de radiación en el sistema K' aparece como radiación dipolar simple en [15.37]. Para obtener la sección eficaz en el laboratorio debemos hacer una transformación de Lorentz. En la sección 15.1 vimos que [15.5] es una magnitud invariante de Lorentz. Con lo que acaba de decirse sobre $d\sigma_s/dQ$, resulta claro que la ecuación que relaciona las secciones eficaces diferenciales en los dos sistemas es:

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{d^3\chi}{d\omega\,d\Omega\,dQ} = \frac{1}{\omega'^2}\frac{d^3\chi'}{d\omega'\,d\Omega'\,dQ} \qquad [15.38]$$

* En realidad podemos utilizar la transferencia de 4-vector ímpetu, manifiestamente invariante, cuyo cuadrado viene dado por $Q^2 = -(p_1-p_2)^2 = (\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^2-(E_1-E_2)^2/c^2$. Para una dispersión elástica por un centro de energías masivo, $E_1 = E_2$, y para ángulos pequeños y energías muy elevadas, el término de diferencia de energía puede despreciarse incluso para colisiones inelásticas.

Así, la sección eficaz triplemente diferencial en el laboratorio es:

$$\frac{d^3\chi}{d\omega\, d\Omega\, dQ} = \frac{z^2e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c}\left(\frac{Q}{Mc}\right)^2 \cdot \frac{d\sigma_s}{dQ} \cdot \left[\frac{3}{16\pi}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 (1+\cos^2\theta')\right] \quad [15.39]$$

Las magnitudes en el corchete deben, naturalmente, expresarse en términos de las magnitudes del laboratorio (sin primas). Las fórmulas del desplazamiento Doppler relativista son:

$$\omega = \gamma\omega'(1+\beta\cos\theta')$$

y

$$\omega' = \gamma\omega\,(1-\beta\cos\theta)$$

Combinando las dos ecuaciones obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega'} &= \frac{1}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} \simeq \frac{2\gamma}{1+\gamma^2\theta^2} \\ \text{y} \qquad & \\ \cos\theta' &= \frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta} \simeq \frac{1-\gamma^2\theta^2}{1+\gamma^2\theta^2} \end{aligned}\right\} \quad [15.40]$$

Las aproximaciones de la parte derecha son las apropiadas para ángulos pequeños en torno a la dirección incidente en el laboratorio. Con estas formas aproximadas, la magnitud en el corchete de [15.39] se convierte en:

$$\left[\frac{3}{16\pi}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 (1+\cos^2\theta')\right] \simeq \left[\frac{3\gamma^2}{2\pi}\frac{(1+\gamma^4\theta^4)}{(1+\gamma^2\theta^2)^4}\right]$$

que es exactamente la expresión normalizada en [15.36]. (El empleo de las formas exactas a partir de [15.40] conduce a la suma de los dos términos en [15.10].) Con la sección eficaz de Rutherford [15.39], o alguna otra sección eficaz de colisión para $d\sigma_s/dQ$, que resulte apropiada, obtenemos de [15.39] los resultados de la radiación de frenado relativista como antes.

Las fórmulas del desplazamiento Doppler ilustran un punto importante. Los fotones de energía $\hbar\omega'$ *en* K', emitidos prácticamente para cualquier ángulo en este sistema, aparecen en el laboratorio dentro del cono frontal y con energías del orden de $\hbar\omega \sim \gamma\hbar\omega'$. Por consiguiente, en el margen de energías $Mc^2 \ll \hbar\omega \ll \gamma Mc^2$ en el laboratorio aparecen fotones energéticos que proceden de cuantos blandos con $\hbar\omega' \ll Mc^2$ en el sistema en reposo de la partícula incidente.

15.3. EFECTOS DE APANTALLAMIENTO; PERDIDA DE ENERGIA RADIATIVA RELATIVISTA

En el tratamiento de la radiación de frenado hemos ignorado hasta ahora los efectos de los electrones. Esto puede hacerse con seguridad, pues como contribuyentes directos a la aceleración de la partícula incidente su contribución por átomo es del orden de Z^{-1} veces la del núcleo. Sin embargo, tienen

un efecto indirecto a través de su apantallamiento de la carga nuclear. La energía potencial de la partícula incidente en el campo del átomo puede aproximarse por la expresión [13.94]. La dispersión resulta modificada respecto a la fórmula de Rutherford para ángulos pequeños. En lugar de [15.17] la sección eficaz de dispersión es [13.96] estando $\theta_{\text{mín}}$ dado por [13.98] y [13.99]. En términos de la transferencia de ímpetu [15.19] se reemplaza por:

$$\frac{d\sigma_s}{dQ}=\frac{1}{2\pi\epsilon_0^2}\left(\frac{zZe^2}{\beta c}\right)^2\cdot\frac{Q}{(Q^2+Q_s^2)^2} \qquad [15.41]$$

siendo

$$Q_s=p\theta_{\text{mín}}^{(q)}=\frac{\hbar}{a}\simeq\frac{Z^{1/3}}{192}mc \qquad [15.42]$$

la transferencia de ímpetu asociada con el radio de apantallamiento a. Nótese que m es la masa del electrón.

El cálculo de la radiación de frenado se hace como al principio de la sección 15.2, pero reemplazando en [15.22]

$$\int_{Q_{\text{mín}}}^{Q_{\text{máx}}}\frac{dQ}{Q}\rightarrow\int_{Q_{\text{mín}}}^{Q_{\text{máx}}}\frac{Q^3\,dQ}{(Q^2+Q_s^2)^2}$$

Haciendo la hipótesis de que $Q_{\text{máx}}$ es muy grande comparado tanto con $Q_{\text{mín}}$ como con Q_s, encontramos que el logaritmo de [15.22] queda sustituido por

$$\ln\left(\frac{Q_{\text{máx}}}{Q_{\text{mín}}}\right)\rightarrow\ln\left(\frac{Q_{\text{máx}}}{\sqrt{Q_{\text{mín}}^2+Q_s^2}}\right)-\frac{Q_s^2}{2(Q_{\text{mín}}^2+Q_s^2)} \qquad [15.43]$$

Para $Q_{\text{mín}}\gg Q_s$ los efectos de apantallamiento carecen de importancia y los resultados de la sección anterior no resultan afectados. Pero cuando $Q_{\text{mín}}\lesssim Q_s$ se presentan modificaciones importantes.

Según [15.23], [15.28] y [15.32] vemos que $Q_{\text{máx}}$ puede escribirse en todos los casos:

$$Q_{\text{máx}}\simeq 2Mv \qquad [15.44]$$

mientras que de [15.28] y [15.35] encontramos los valores para $Q_{\text{mín}}$

$$\left.\begin{aligned}Q_{\text{mín}}^{(NR)}&=p-p'\simeq\frac{2\hbar\omega}{v}\\ Q_{\text{mín}}^{(R)}&\simeq\frac{\hbar\omega}{2\gamma\gamma' c}\simeq\frac{\hbar\omega}{2\gamma^2 c}\end{aligned}\right\} \qquad [15.45]$$

Las formas aproximadas de la derecha son aplicables para fotones blandos. (Nótese que, salvo factores de dos en los logaritmos, para fotones blandos puede utilizarse la fórmula universal para $Q_{\text{mín}}$, $Q_{\text{mín}}\simeq\hbar\omega/\gamma^2 v$.) Como en ambas expresiones $Q_{\text{mín}}$ es proporcional a ω para fotones blandos, queda claro que *siempre habrá una frecuencia por debajo de la cual son importantes los efectos de apantallamiento.* Cuando para Q_s se toma [15.42], la relación entre

$Q_{\text{mín}}$ y Q_s para radiación de frenado no relativista es

$$\frac{Q_{\text{mín}}^{(NR)}}{Q_s} \simeq \frac{384}{Z^{1/3}} \cdot \frac{\hbar\omega}{mvc} = \frac{192M\beta}{mZ^{1/3}} \cdot \frac{\hbar\omega}{(\hbar\omega)_{\text{máx}}}$$

donde $(\hbar\omega)_{\text{máx}} = Mv^2/2$. Excepto para velocidades extremadamente lentas la frecuencia a la cual es $Q_{\text{mín}}^{(NR)} \lesssim Q_s$ es una fracción muy pequeña de la máxima. Por ejemplo, con electrones de 100 keV sobre un blanco de oro ($Z=79$), sólo para $\omega/\omega_{\text{máx}} < 0{,}04$ resulta importante el apantallamiento. Para partículas más pesadas que los electrones el factor M/m hace el apantallamiento totalmente insignificante en la radiación de frenado no relativista.

Sin embargo, para la radiación de frenado relativista los efectos de apantallamiento pueden ser importantes. Ahora la relación entre $Q_{\text{mín}}$ y Q_s es:

$$\frac{Q_{\text{mín}}^{(R)}}{Q_s} \simeq \frac{96\hbar\omega}{\gamma\gamma' mc^2 Z^{1/3}} = \frac{96M}{\gamma' mZ^{1/3}} \cdot \frac{\hbar\omega}{(\hbar\omega)_{\text{máx}}}$$

siendo $(\hbar\omega)_{\text{máx}} = \gamma Mc^2$. La presencia del factor γ' en el denominador implica que para energías suficientemente altas $Q_{\text{mín}}^{(R)}$ puede ser menor que Q_s para prácticamente todo el margen de frecuencias [si $\omega/\omega_{\text{máx}} = x$, se tiene $\gamma' = (1-x)\gamma$]. Entonces se dice que el *apantallamiento es completo*. Las energías incidentes para apantallamiento completo se definen como $E \gg E_s$, siendo la energía crítica E_s

$$E_s = \left(\frac{192M}{mZ^{1/3}}\right) Mc^2 \qquad [15.46]$$

Para energías grandes comparadas con E_s, $Q_{\text{mín}}$ puede despreciarse comparada con Q_s a todas las frecuencias, en [15.43], excepto en el extremo mismo del espectro. La sección eficaz de radiación en el caso límite de apantallamiento completo es, pues, un valor constante:

$$\frac{d\chi}{d\omega} \simeq \frac{Z^2e^2}{12\pi^3\epsilon_0{}^3c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \ln\left(\frac{233M}{mZ^{1/3}}\right) \qquad [15.47]$$

El coeficiente numérico en el logaritmo está sujeto a cierta incertidumbre, como es natural. BETHE y HEITLER encontraron un resultado con 183 en lugar de 233 en el logaritmo y con el polinomio $(1 - \hbar\omega/E + 3\hbar^2\omega^2/4E^2)$ de [15.35] como factor.

Para los electrones, $E_s \simeq 42$ MeV en el aluminio ($Z=13$) y 23 MeV en el plomo ($Z=82$). Los valores correspondientes para los mesones μ son 2×10^6 MeV y 10^6 MeV. A causa del factor M/m, el apantallamiento solamente es importante para los electrones. Cuando $E > E_s$, la sección eficaz de radiación viene dada por el valor constante [15.47] a todas las frecuencias. La figura 15.5 nos muestra la sección eficaz de radiación [15.47] en el caso límite de apantallamiento completo, así como el resultado correspondiente de Bethe-Heitler. En un tratamiento cuántico adecuado interviene el factor polinómico de variación lenta que pasa del valor unidad para $\omega=0$ al valor 0,75 para $\omega=\omega_{\text{máx}}$. Para los electrones de la radiación cósmica y procedentes de aceleradores de alta energía, la radiación de frenado corresponde al caso límite de apantallamiento completo. Así, el espectro del fotón manifiesta un comportamiento típico $(\hbar\omega^{-1})$.

En la sección 15.2, *b)* se consideró la pérdida de energía radiativa en el límite no relativista y se encontró que era despreciable en comparación con la

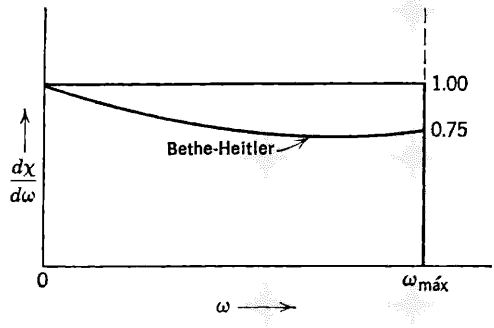


FIG. 15.5. Sección eficaz de radiación en el límite de apantallamiento completo. El valor constante es el resultado semiclásico. La curva marcada «Bethe-Heitler» es la aproximación mecanocuántica de Born.

pérdida de energía por colisión. Para partículas ultrarrelativistas, especialmente para los electrones, este resultado no es ya cierto. La pérdida de energía radiativa en el límite $\gamma \gg 1$ viene dada aproximadamente por:

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dx} \simeq N \frac{Z^2e^2}{12\pi^3\epsilon_0{}^3c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \int^{\gamma Mc^2/\hbar} \ln\left(\frac{Q_{\text{máx}}}{\sqrt{Q_{\text{mín}}^2 + Q_s^2}}\right) d\omega$$

Si el apantallamiento es despreciable ($\omega_s \gg \omega_{\text{máx}}$) tenemos el resultado aproximado

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dx} \simeq \frac{1}{12\pi^3\epsilon_0{}^3} N \frac{Z^2e^2}{\hbar c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \ln(\lambda\gamma)\gamma Mc^2$$

Para energías mayores en que tiene lugar apantallamiento completo, éste se modifica a

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dx} \simeq \left[\frac{1}{12\pi^3\epsilon_0{}^3} N \frac{Z^2e^2}{\hbar c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \ln\left(\frac{233M}{Z^{1/3}m}\right)\right] \gamma Mc^2 \qquad [15.48]$$

lo que nos demuestra que entonces la pérdida radiativa es proporcional a la energía de la partícula.

Ahora, comparando las pérdidas radiativas con las pérdidas por colisión tenemos:

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dE_{\text{col}}} \simeq \frac{4}{3\pi}\left(\frac{Zz^2}{137}\right)\frac{m}{M}\frac{\ln\left(\frac{233M}{Z^{1/3}m}\right)}{\ln B_{\dot{q}}}\gamma$$

El valor de γ para el cual esta razón vale la unidad depende de la partícula y de Z. Para los electrones en el aire es $\gamma \sim 200$ y en plomo $\gamma \sim 20$. A energías mayores la pérdida radiativa es mayor que la pérdida por colisión, y en partículas ultrarrelativistas es el mecanismo de pérdida dominante.

Para las energías en las que la pérdida radiativa es dominante resulta válida la expresión [15.48] del apantallamiento completo. Conviene entonces introducir una unidad de longitud X_0, llamada *longitud de radiación,* que es la distancia recorrida por la partícula mientras su energía decrece hasta e^{-1} veces su valor inicial. Basándonos en el principio de conservación de la energía podemos reescribir [15.48] en la forma

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0}$$

con la solución

$$E(x) = E_0 e^{-x/X_0}$$

donde la longitud de radiación X_0 es

$$X_0 = \left[\frac{1}{12\pi^3\epsilon_0^3} N \frac{Z^2e^2}{\hbar c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \ln\left(\frac{233M}{Z^{1/3}m}\right)\right]^{-1} \qquad [15.49]$$

Algunos valores representativos de X_0 para electrones son 32 g/cm² (270 metros) en aire en condiciones normales de presión y temperatura, 19 g/cm² (7,2 cm) en aluminio, y 4,4 g/cm² (0,39 cm) en plomo *. Al estudiar el paso a través de la materia de rayos cósmicos o partículas artificiales de gran energía, la longitud de radiación X_0 resulta una unidad de uso conveniente, ya que no sólo está gobernada por ella la pérdida de energía radiativa, sino también la producción de pares negatón-positón por los fotones radiados, y de este modo el desarrollo completo del chaparrón electrónico en cascada.

15.4. METODO DE LOS CUANTOS VIRTUALES DE WEIZSACKER-WILLIAMS

La emisión de radiación de frenado y otros procesos en los que interviene la interacción electromagnética de partículas relativistas se pueden considerar de otra forma que nos ayuda a ver físicamente dichos procesos. Este punto de vista recibe el nombre de *método de los cuantos virtuales.* Aprovecha la analogía entre los campos de una partícula cargada que se mueve rápidamente y los campos de un impulso de radiación (véase la sección 11.10), y relaciona los efectos de la colisión de la partícula cargada con un cierto sistema con los correspondientes efectos producidos por la interacción de radiación (los cuantos virtuales) con el mismo sistema. El método fue desarrollado independientemente por C. F. WEIZSACKER y E. J. WILLIAMS, en 1934. Diez años antes, ENRICO FERMI había empleado esencialmente la misma idea para relacionar la pérdida de energía por ionización con la absorción de rayos X por los átomos. (Véase el problema 15.7.)

En cualquier colisión definimos una «partícula incidente» y un «sistema blanco». Los campos perturbadores de la partícula incidente se reemplazan por un impulso de radiación equivalente, que es analizado por medio de un espectro en frecuencia de cuantos virtuales. Entonces, se calculan los efectos

* Estos valores numéricos difieren en un 20-30 por 100 de los dados por ROSSI, página 55, porque él utiliza un coeficiente más exacto, 4 en lugar de 16/3, y $Z(Z+1)$ en lugar de Z^2 en la expresión [15.49].

de los cuantos (bien dispersión o bien absorción) sobre el sistema blanco. De este modo se correlaciona la interacción de partículas cargadas con la interacción de fotones. La tabla incluye unas pocas correspondencias y especifica la partícula incidente y el sistema blanco. En la radiación de frenado el blanco es la más ligera de las partículas que intervienen en la colisión, ya que su poder de dispersión para la radiación es mayor. Al considerar la emisión de radiación de frenado en colisiones electrón-electrón, por razones de simetría, es necesario considerar la suma de dos contribuciones en las que cada electrón sucesivamente desempeña el papel de blanco, inicialmente en reposo en cierto sistema de referencia.

Correspondencias entre interacciones de partículas cargadas e interacciones de fotones

Proceso de partículas	Partícula incidente	Sistema blanco	Proceso radiativo	$b_{mín}$
Radiación de frenado en colisión electrón (partícula ligera)-núcleo.	Núcleo	Electrón (partícula ligera)	Dispersión de fotones virtuales del campo coulombiano nuclear por el electrón (partícula ligera).	$\hbar/2Mv$
Ionización de átomos por colisión (en colisiones distantes).	Partícula incidente	Atomo	Fotoemisión de electrones atómicos por cuantos virtuales.	a
Desintegración de los núcleos por emisión de electrón	Electrón	Núcleo	Fotodesintegración de núcleos por cuantos virtuales.	El mayor entre $\hbar/\gamma mv$ y R
Producción de piones en colisiones electrón-núcleo.	Electrón	Núcleo	Fotoproducción de piones por interacción de cuantos virtuales con núcleos.	

La principal suposición en el método de los cuantos virtuales consiste en que los efectos de los distintos componentes en frecuencia de la radiación equivalente se suman de forma no coherente. Esto será cierto siempre que el efecto perturbador de los campos sea pequeño, lo cual está relacionado con nuestra hipótesis de la sección 15.2, *d)* de que el movimiento de la partícula en el sistema K' era no relativista durante toda la colisión.

En la discusión del método de Weizsacker-Williams resulta conveniente emplear la notación de parámetros de impacto en lugar de la de transferencias de ímpetu con el fin de utilizar los resultados de las transformadas de Fourier de los campos obtenidas en capítulos previos. La conexión entre los dos métodos se establece mediante la relación del principio de incertidumbre

$$b \sim \frac{\hbar}{Q}$$

Con la expresión [15.44] para $Q_{máx}$ en la radiación de frenado, vemos que el parámetro de impacto mínimo efectivo para producir radiación es

$$b_{mín} \simeq \frac{\hbar}{Q_{máx}} \simeq \frac{\hbar}{2Mv} \qquad [15.50]$$

tal como se ha recogido en la tabla anterior. Los parámetros de impacto máximos correspondientes a los valores de $Q_{\text{mín}}$ de [15.45] no necesitan ser detallados. El espectro de cuantos virtuales incorpora automáticamente el corte equivalente a $Q_{\text{mín}}$.

A partir de los campos de la sección 11.10 podemos calcular el espectro de la radiación equivalente para una partícula de carga q y velocidad $v \simeq c$, que pasa por un blanco S con un parámetro de impacto b:

$$E_2(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

$$B_3(t) = \beta E_2(t)$$

$$E_1(t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

Cuando $\beta \simeq 1$ los campos $E_2(t)$ y $B_3(t)$ son completamente equivalentes a un impulso de radiación polarizada plana P_1 que incide sobre S en la dirección x_1, tal como se indica en la figura 15.6. No hay campo magnético que acompañe

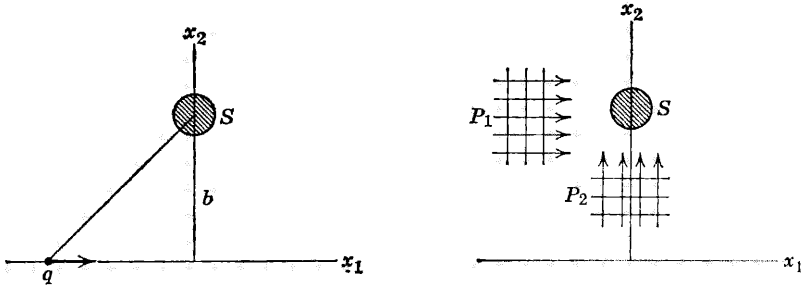


FIG. 15.6. Partícula relativista cargada pasando el sistema de colisión S y los impulsos de radiación equivalentes.

a $E_1(t)$ para formar, así, un verdadero impulso de radiación P_2 que incida según la dirección x_2, como se ha dibujado. Sin embargo, si el movimiento de las partículas cargadas en S es no relativista en dicho sistema de coordenadas, podemos añadir el campo magnético necesario para crear el impulso P_2 sin afectar al problema físico debido a que las partículas en S responden sólo a las fuerzas eléctricas. Aun si las partículas en S son influidas por fuerzas magnéticas, el campo magnético adicional que supone el reemplazar $E_1(t)$ por el impulso de radiación P_2 no es importante, puesto que en cualquier caso veremos que el impulso P_2 es de importancia mínima.

De la discusión de la sección 14.5, y en especial de las ecuaciones [14.51], [14.52] y [14.60], resulta evidente que el impulso equivalente P_1 tiene un espectro de frecuencia (energía por unidad de área y por unidad de intervalo de frecuencia) $dI_1(\omega, b)/d\omega$ dado por:

$$\frac{dI_1}{d\omega}(\omega, b) = \frac{2}{c\mu_0} |E_2(\omega)|^2 \qquad [15.51, a]$$

en donde $E_2(\omega)$ es la transformada de Fourier [14.54] de $E_2(t)$. Análogamente,

el impulso P_2 tiene un espectro de frecuencias

$$\frac{dI_2}{d\omega}(\omega, b) = \frac{2}{c\mu_0}|E_1(\omega)|^2 \qquad [15.51, b]$$

En el capítulo 13 hemos calculado ya las integrales de Fourier que vienen dadas por [13.29] y [13.30]. Los dos espectros en frecuencia son:

$$\left.\begin{matrix}\frac{dI_1}{d\omega}(\omega, b)\\ \frac{dI_2}{d\omega}(\omega, b)\end{matrix}\right\} = \frac{1}{4\pi^3\epsilon_0}\frac{q^2}{c}\left(\frac{c}{v}\right)^2\frac{1}{b^2}\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\\ \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 K_0^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\end{matrix}\right. \qquad [15.52]$$

Observemos que la intensidad del impulso P_2 contiene el factor γ^{-2} y, por tanto, es de pequeña importancia para partículas ultrarrelativistas. En la figura 15.7 aparecen cualitativamente las formas de estos espectros. Se comprende fácilmente el comportamiento si recordamos que los campos del impulso P_1 en

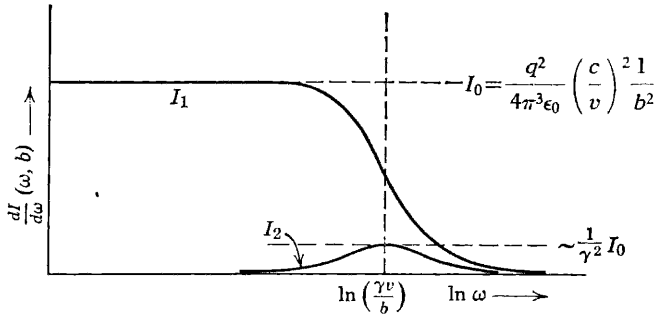


FIG. 15.7. Espectro de frecuencias de los dos impulsos de radiación equivalentes.

función del tiempo presentan forma de campana con una anchura $\Delta t \sim b/\gamma v$. Así, el espectro de frecuencias contendrá todas las frecuencias hasta un máximo del orden de $\omega_{máx} \sim 1/\Delta t$. Por otro lado, los campos del impulso P_2 son análogos a un ciclo sinusoidal de ondas de frecuencia $\omega \sim \gamma v/b$. Por tanto, su espectro contendrá solamente un estrecho intervalo de frecuencias alrededor de $\gamma v/b$.

En los problemas de colisiones deberemos sumar el espectro de frecuencias [15.52] sobre los distintos parámetros de impacto posibles. Esto nos da la energía, por unidad de intervalo de frecuencias, presente en el campo de radiación equivalente. Como siempre en esta clase de problemas, deberemos especificar un parámetro de impacto mínimo $b_{mín}$. El método de los cuantos virtuales sólo será útil si se puede elegir $b_{mín}$ de forma que para los parámetros de impacto mayores que $b_{mín}$ los efectos de los campos de la partícula incidente puedan representarse de forma adecuada por los efectos de los impulsos de radiación equivalentes, mientras que para los parámetros de impacto pequeños puedan despreciarse los efectos de los campos debidos a la par-

tícula o bien puedan tomarse en cuenta por otros procedimientos. Dejando de lado de momento cómo escoger el valor apropiado de $b_{\text{mín}}$ en general (para la radiación de frenado es válida [15.50]), podemos expresar el espectro de frecuencias integrado para todos los valores posibles de los parámetros de impacto,

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega) = 2\pi \int_{b_{\text{mín}}}^{\infty} \left[\frac{dI_1}{d\omega}(\omega, b) + \frac{dI_2}{d\omega}(\omega, b) \right] b\, db \qquad [15.53]$$

en donde hemos combinado las contribuciones de los impulsos P_1 y P_2. Esta integral ya fue calculada en la sección 13.3, ecuación [13.35]. El resultado es

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega) = \frac{1}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[xK_0(x)K_1(x) - \frac{v^2}{2c^2} x^2(K_1^2(x) - K_0^2(x)) \right] \qquad [15.54]$$

en donde

$$x = \frac{\omega b_{\text{mín}}}{\gamma v} \qquad [15.55]$$

Para frecuencias bajas ($\omega \ll \gamma v/b_{\text{mín}}$) la energía por unidad de intervalo de frecuencias se reduce a

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega) \simeq \frac{1}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[\ln\left(\frac{1{,}123\gamma v}{\omega b_{\text{mín}}} \right) - \frac{v^2}{2c^2} \right] \qquad [15.56]$$

mientras que para altas frecuencias ($\omega \gg \gamma v/b_{\text{mín}}$) el espectro decrece en forma exponencial según

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega) \simeq \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) e^{-(2\omega b_{\text{mín}}/\gamma v)} \qquad [15.57]$$

La figura 15.8 muestra una representación exacta de $I(\omega)$ [15.54] cuando $v \simeq c$, así como de la aproximación de baja frecuencia [15.56]. Vemos que el espectro de energía consiste predominantemente en cuantos de baja frecuencia con una cola que se extiende hasta frecuencias del orden de $2\gamma v/b_{\text{mín}}$.

El espectro del número de cuantos virtuales $N(\hbar\omega)$ se obtiene utilizando la relación

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega)\, d\omega = \hbar\omega N(\hbar\omega)\, d(\hbar\omega) \qquad [15.58]$$

Así, pues, el número de cuantos virtuales por unidad de intervalo de energía en el límite de bajas frecuencias es

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{1}{2\pi^2\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{\hbar c}\right) \left(\frac{c}{v}\right)^2 \frac{1}{\hbar\omega} \left[\ln\left(\frac{1{,}123\gamma v}{\omega b_{\text{mín}}} \right) - \frac{v^2}{2c^2} \right] \qquad [15.59]$$

Deberemos ahora considerar la elección del parámetro de impacto mínimo $b_{\text{mín}}$. En la radiación de frenado, $b_{\text{mín}} = \hbar/2Mv$, en donde M es la masa de la partícula más ligera, como ya se ha discutido. Para la ionización de átomos

por colisión, $b_{\text{mín}} \simeq a$, el radio atómico, ya que los parámetros de impacto más pequeños se tratan como colisiones entre la partícula incidente y electrones libres. En la desintegración de los núcleos por electrones, o en la producción de mesones por colisión de electrones con los núcleos, $b_{\text{mín}} = \hbar/\gamma Mv$ o $b_{\text{mín}} = R$, radio nuclear, según cuál de los dos sea el mayor. Los valores están resumidos en la tabla de la pág. 732.

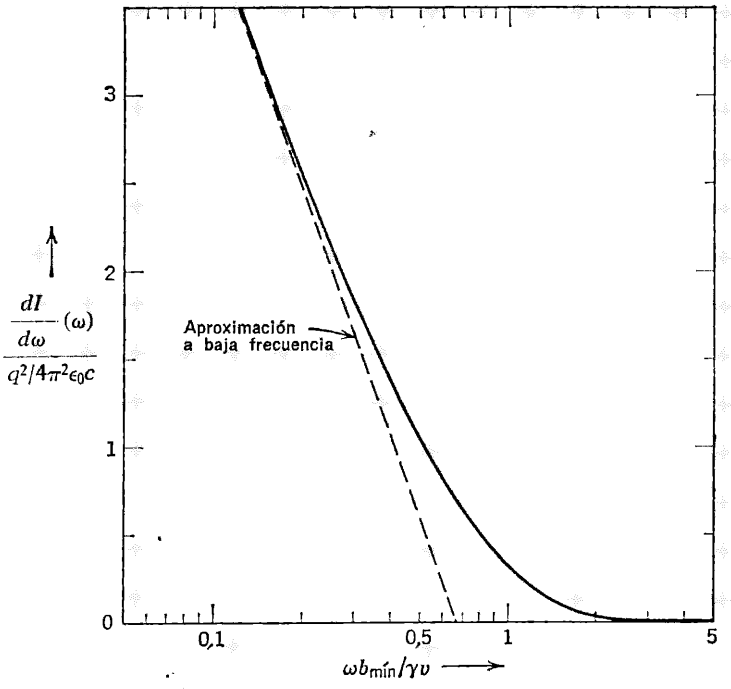


FIG. 15.8. Espectro de frecuencia de los cuantos virtuales, para una partícula relativista, con energía por unidad de frecuencia $dI(\omega)/d\omega$ medida tomando $q^2/4\pi^2\epsilon_0 c$ como unidad, la frecuencia se mide tomando $\gamma v/b_{\text{mín}}$ como unidad. El número de cuantos virtuales por unidad de intervalo de energía se obtiene dividiendo por $\hbar^2\omega$.

15.5. RADIACION DE FRENADO COMO DISPERSION DE CUANTOS VIRTUALES

La emisión de radiación de frenado en la colisión entre una partícula relativista incidente de carga ze y masa M y un núcleo atómico de carga Ze se puede considerar como la dispersión de cuantos virtuales en el campo coulombiano del núcleo, por la partícula incidente en el sistema de coordenadas K' respecto del cual se halla ésta en reposo. El espectro de cuantos virtuales $dI(\omega)/d\omega$ viene dado por [15.54] con $q = Ze$. El parámetro de impacto mínimo es $\hbar/2Mv$, de forma que el espectro de frecuencias se extiende hasta $\omega' \sim \gamma Mc^2/\hbar$.

Los cuantos virtuales son dispersados por la partícula incidente (el sistema blanco en K') de acuerdo con la sección eficaz de Thomson [14.105] a frecuencias bajas. Así, pues, en el sistema K' y para frecuencias bajas comparadas

con $Mc^2/\hbar$, la sección eficaz diferencial de radiación es, aproximadamente:

$$\frac{d\chi'}{d\omega'\,d\Omega'} \simeq \left(\frac{z^2e^2}{4\pi\epsilon_0 Mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta') \cdot \frac{dI'}{d\omega'}$$

Como el espectro de cuantos virtuales se extiende hasta $\gamma Mc^2/\hbar$, podemos utilizar la aproximación [15.56] para expresar $dI'(\omega')/d\omega'$ en la región $\omega' \ll Mc^2/\hbar$. Con esto, la sección eficaz de radiación en K' se convierte en

$$\frac{d\chi'}{d\omega'\,d\Omega'} \simeq \frac{Z^2e^2}{64\pi^4\epsilon_0^3 c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2(1+\cos^2\theta') \cdot \ln\left(\frac{\lambda\gamma Mc^2}{\hbar\omega'}\right) \qquad [15.60]$$

La sección eficaz en el laboratorio puede obtenerse de la misma manera que en la sección 15.2, *d)*. Utilizando [15.38] y las fórmulas Doppler [15.40] hallamos:

$$\frac{d\chi}{d\omega\,d\Omega} \simeq \frac{Z^2e^2}{12\pi^3\epsilon_0^3 c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \ln\left(\frac{2\lambda\gamma^2 Mc^2}{\hbar\omega(1+\gamma^2\theta^2)}\right) \cdot \left[\frac{3\gamma^2(1+\gamma^4\theta^4)}{2\pi(1+\gamma^2\theta^2)^4}\right] \qquad [15.61]$$

Esencialmente ésta es la misma sección eficaz que [15.36]. Después de integrar a todos los ángulos de emisión conduce a una expresión igual al límite de fotones blandos de [15.34].

Las ecuaciones [15.60] y [15.61] están basadas en la sección eficaz de dispersión de Thomson y, por tanto, están restringidas a $\omega' < Mc^2/\hbar$ en el sistema en reposo K'. Naturalmente, ya se ha hecho observar en la sección 15.2, *d)* que tales fotones blandos se transforman en fotones energéticos en el laboratorio. Pero el espectro de cuantos virtuales contiene frecuencias hasta $\omega' \simeq \gamma Mc^2/\hbar$. Para tales frecuencias la dispersión de radiación no está dada por la sección eficaz de Thomson, sino más bien por [14.105] para partículas blanco sin spin, o por la fórmula de Klein-Nishina para partículas de spin 1/2. La distribución angular de dispersión de tales fotones resulta alterada respecto a la forma dipolar de la ecuación [15.60], tal como se indica en la figura 14.13. Es más importante el hecho de que la sección eficaz total de la dispersión disminuye rápidamente para frecuencias mayores que $Mc^2/\hbar$, como puede verse de [14.106]. Esto demuestra que en el sistema K' los cuantos de radiación de frenado se limitan a un margen de frecuencias $0 < \omega' \lesssim Mc^2/\hbar$, aun cuando el espectro de cuantos virtuales del campo de Coulomb nuclear se extienda a frecuencias mucho mayores. La restricción del espectro en K' es un requisito físico del principio de conservación de la energía, ya que en el sistema del laboratorio, en donde $\omega = \gamma\omega'$, el espectro de frecuencias viene limitado por $0 < \omega < (\gamma Mc^2/\hbar)$. Mediante un tratamiento detallado en que se utilice la distribución angular de dispersión correspondiente a la fórmula de Klein-Nishina, se obtiene una sección eficaz de radiación de frenado que está completamente de acuerdo con las fórmulas de Bethe-Heitler (WEIZSÄCKER, 1934).

Los efectos de apantallamiento en el espectro de radiación de frenado pueden discutirse mediante el método de WEIZSÄCKER-WILLIAMS. El espectro de cuantos virtuales para un potencial coulombiano apantallado se modifica respecto a [15.56]. El argumento del logaritmo se cambia por una constante, como se discutió en la sección 15.3.

Dejaremos para los problemas del final del capítulo otras aplicaciones del método de los cuantos virtuales, tales como son la ionización de átomo por colisión y la desintegración de núcleos por electrones.

15.6. RADIACION EMITIDA DURANTE LA DESINTEGRACION BETA

En el proceso de desintegración beta, un núcleo inestable de número atómico Z se transforma de forma espontánea en otro núcleo de número atómico $(Z \pm 1)$, al tiempo que emite un electrón $(\mp e)$ y un neutrino. Este proceso se expresa simbólicamente así:

$$Z \rightarrow (Z \pm 1) + e^{\mp} + \nu \qquad [15.62]$$

La energía liberada en el proceso es compartida casi completamente por el electrón y el neutrino, mientras que el núcleo, debido a que su masa es muy grande, capta una cantidad de energía completamente despreciable. Incluso sin un conocimiento de por qué o cómo tiene lugar la desintegración beta, podemos anticipar que la creación repentina de una partícula cargada que se mueve rápidamente, vendrá acompañada de emisión de radiación. Como ya se dijo en la introducción, podemos imaginar que el electrón se halla inicialmente en reposo y que es acelerado violentamente durante un intervalo de tiempo muy corto hasta su velocidad final, o bien imaginar que su carga aparece repentinamente sobre él en el mismo intervalo de tiempo corto. El núcleo pesado recibe una aceleración despreciable y, por tanto, no contribuye a la radiación.

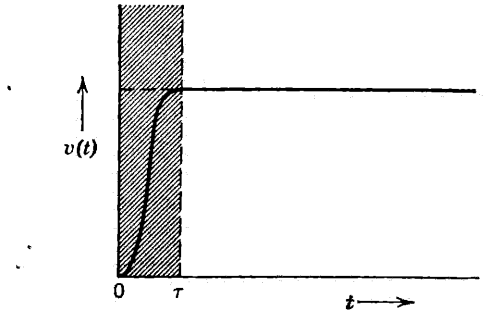


FIG. 15.9.

Para nuestro cálculo podemos suponer que en el instante $t=0$ se crea un electrón en el origen con velocidad constante $v=c\beta$. Entonces, de acuerdo con [15.1] o [15.2], la distribución de la intensidad de la radiación emitida en función de la frecuencia y del ángulo viene dada por

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} \left| \frac{\epsilon^* \cdot \beta}{1 - n \cdot \beta} \right|^2 \qquad [15.63]$$

Este es el límite de bajas frecuencias del espectro de energía. La intensidad disminuirá respecto a este valor a frecuencias que violen la condición [15.15]. Aunque es difícil precisar acerca del valor de $\langle \beta \rangle$ que aparece en ella, si se imagina que el proceso de formación implica una curva velocidad-tiempo, tal como la que se ha dibujado en la figura 15.9, el valor de $\langle \beta \rangle$ no debería ser mayor de 1/2. En este caso el criterio [15.15] es equivalente a $\omega\tau < 1$. El tiempo de formación τ puede estimarse que es, según el principio de indetermi-

nación,

$$\tau \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \sim \frac{\hbar}{E} \qquad [15.64]$$

puesto que en el acto de la desintegración beta se crea bruscamente un electrón de energía total E. Esta estimación para τ implica que las frecuencias para que haya radiación apreciable están limitadas a $\omega < E/\hbar$. Este es, precisamente, el límite impuesto por la conservación de la energía. Se ve de [15.63] que la radiación está polarizada linealmente en el plano que contiene el vector velocidad del electrón y la dirección de observación. La distribución diferencial en coordenadas esféricas es

$$\frac{d^2I(\omega)}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 c\epsilon_0} \beta^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{(1-\beta \cos \theta)^2} \qquad [15.65]$$

mientras que la intensidad total por unidad de intervalo de frecuencia es

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega) = \frac{e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c} \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right] \qquad [15.66]$$

Para $\beta \ll 1$, [15.66] se reduce a $dI/d\omega \simeq e^2\beta^2/6\pi^2\epsilon_0 c$, lo cual demuestra que para las partículas beta de baja energía la intensidad radiada es despreciable.

La distribución de intensidad [15.66] es un espectro típico de radiación de frenado en que el número de fotones por unidad de intervalo de energía es

$$N(\hbar\omega) = \frac{e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right) \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right] \qquad [15.67]$$

A veces recibe el nombre de «radiación de frenado interna» para distinguirla de la radiación de frenado emitida por la misma partícula beta en su paso a través de la materia.

La energía total radiada es aproximadamente

$$E_{\text{rad}} = \int_0^{\omega_{\text{máx}}} \frac{dI}{d\omega}(\omega)\, d\omega \simeq \frac{e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right] E \qquad [15.68]$$

En las partículas beta muy rápidas, la razón entre la energía que se va como radiación y la energía de la partícula es

$$\frac{E_{\text{rad}}}{E} \simeq \frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \left[\ln \left(\frac{2E}{mc^2} \right) - 1 \right] \qquad [15.69]$$

Nos demuestra esto que la energía radiada constituye una fracción muy pequeña de la energía total liberada en la desintegración beta, incluso tratándose de los procesos beta más energéticos ($E_{\text{máx}} \sim 30mc^2$). No obstante, la radiación puede observarse, y constituye una información muy útil para los físicos nucleares.

En el proceso beta real la energía se distribuye entre el electrón y el neutrino, de forma que el electrón presenta todo un espectro de energías hasta

cierto máximo. Así, pues, debemos promediar el espectro de radiación [15.66] sobre la distribución energética de las partículas beta. Además, mediante un tratamiento mecanocuántico se obtienen modificaciones en las proximidades del extremo superior del espectro de fotones. Estos detalles son importantes a la hora de comparar cuantitativamente con la experiencia. No obstante, los orígenes de la radiación y su descripción semicuantitativa vienen dados de forma adecuada por nuestro cálculo clásico.

15.7. RADIACION EMITIDA EN LA CAPTURA DE UN ELECTRON ORBITAL. DESAPARICION DE LA CARGA Y DEL MOMENTO MAGNETICO

La creación repentina de un electrón rápido en la emisión beta da lugar a radiación. En la captura de un electrón orbital la desaparición repentina de un electrón da lugar también a lo mismo. La captura de un electrón orbital es el proceso por el cual un núcleo inestable de número atómico Z captura un electrón orbital, transformándose en otro núcleo de número atómico $(Z-1)$, con la emisión simultánea de un neutrino que se lleva el exceso de energía. Simbólicamente puede expresarse el proceso

$$Z + e^- \rightarrow (Z-1) + \nu \qquad [15.70]$$

Como cuando no hay radiación la energía de desintegración se la lleva un neutrino virtualmente indetectable, el espectro de fotones que acompaña a la captura de un electrón orbital resulta de gran importancia para proporcionar información sobre la energía liberada.

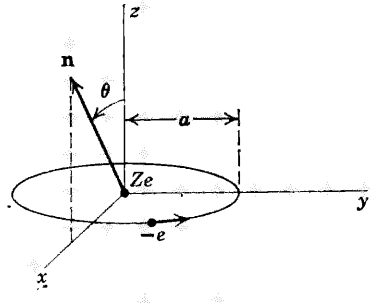


FIG. 15.10.

Como modelo simplificado consideraremos un electrón que se mueve en una órbita atómica circular de radio a con velocidad angular constante ω_0. La órbita está situada en el plano x-y (Fig. 15.10), con el núcleo en el centro. La dirección de observación $\boldsymbol{n}$ viene definida por el ángulo polar θ y está situada en el plano x-z. La velocidad del electrón es

$$\boldsymbol{v}(t) = -\boldsymbol{\epsilon}_1 \omega_0 a \operatorname{sen}(\omega_0 t + \alpha) + \boldsymbol{\epsilon}_2 \omega_0 a \cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad [15.71]$$

en donde α es un ángulo de fase arbitrario. Si el electrón desaparece en el

instante $t=0$, el espectro de frecuencia de la radiación emitida [14.67] es aproximadamente *

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{16\pi^3c^3\epsilon_0}\left|\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}(t)]e^{i\omega t}\,dt\right|^2 \qquad [15.72]$$

en donde se ha supuesto que $(\omega a/c)\ll 1$ (aproximación dipolar) y hemos hecho el factor de retardo igual a la unidad. La integral [15.72] puede expresarse así

$$\int_{-\infty}^{0}dt=-\omega_0 a(\boldsymbol{\epsilon}_\perp I_1+\boldsymbol{\epsilon}_{\|}\cos\theta I_2) \qquad [15.73]$$

en donde

$$\left.\begin{aligned} I_1&=\int_{-\infty}^{0}\cos(\omega_0 t+\alpha)e^{i\omega t}\,dt\\ I_2&=\int_{-\infty}^{0}\operatorname{sen}(\omega_0 t+\alpha)e^{i\omega t}\,dt\end{aligned}\right\} \qquad [15.74]$$

y $\boldsymbol{\epsilon}_\perp$, $\boldsymbol{\epsilon}_{\|}$ son los vectores de polarización unitarios perpendicular y paralelo al plano determinado por $\boldsymbol{n}$ y el eje z. Las integraciones son elementales y así se llega a la distribución en intensidad

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{16\pi^2c^3\epsilon_0}\frac{\omega_0^2a^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\times$$
$$\times[(\omega^2\cos^2\alpha+\omega_0^2\operatorname{sen}^2\alpha)+\cos^2\theta(\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha+\omega_0^2\cos^2\alpha)] \qquad [15.75]$$

Como el electrón puede ser capturado desde cualquier posición en la órbita, hemos de promediar respecto al ángulo de fase α. Entonces la distribución de intensidad es:

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega}=\frac{e^2}{16\pi^3\epsilon_0c}\left(\frac{\omega_0a}{c}\right)^2\frac{\omega^2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \qquad [15.76]$$

La energía total radiada por unidad de intervalo de frecuencia es

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega}=\frac{1}{6\pi^2\epsilon_0}\frac{e^2}{c}\left(\frac{\omega_0a}{c}\right)^2\left[\frac{\omega^2(\omega_0^2+\omega^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\right] \qquad [15.77]$$

mientras que el número de fotones por unidad de intervalo de energía es

$$N(\hbar\omega)=\frac{1}{6\pi^2\epsilon_0}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{\omega_0a}{c}\right)^2\left[\frac{\omega^2(\omega_0^2+\omega^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\right]\frac{1}{\hbar\omega} \qquad [15.78]$$

Cuando $\omega\gg\omega_0$, la magnitud en el corchete se aproxima a la unidad, con lo que

* Para actuar conforme a la advertencia realizada después de la ecuación [14.67] deberíamos multiplicar la velocidad [15.71] por un factor tal como $(1-e^{t/\tau})(\theta-t)$ a fin de llevar la velocidad continuamente hasta cero en un tiempo corto τ alrededor de $t=0$. El lector puede verificar que en el límite $\omega_0\tau\ll 1$ y $\omega\tau\ll 1$, salen los resultados dados a continuación.

el espectro resulta ser un espectro típico de radiación de frenado. Pero cuando $\omega \simeq \omega_0$, la intensidad se hace muy grande (infinita según nuestra aproximación). El comportamiento del espectro de fotones se presenta en la figura 15.11. La singularidad que aparece para $\omega = \omega_0$ puede parecer alarmante, pero en realidad es completamente natural y esperada. Si el electrón hubiera de mantenerse siempre en órbita, el espectro de radiación sería una línea nítida en $\omega = \omega_0$. La terminación repentina del movimiento periódico ocasiona un ensanchamiento del espectro en las vecindades de la frecuencia característica.

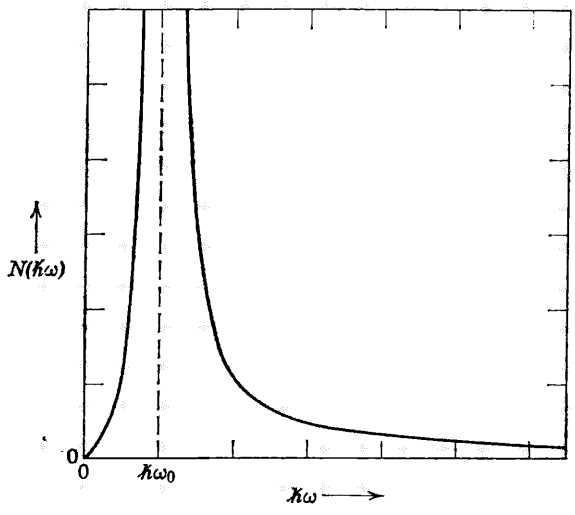


FIG. 15.11. Espectro de los factores emitidos en la captura de un electrón orbital a causa de la desaparición de la carga del electrón.

Mecanocuánticamente, la radiación se produce cuando un electrón $l=1$ (fundamentalmente de la órbita $2p$) efectúa una transición radiativa virtual a un estado $l=0$, desde el cual puede ser absorbido por el núcleo. Así, la frecuencia ω_0 debe identificarse con la frecuencia de la radiación X $2p \rightarrow 1s$, característica $\hbar\omega_0 \simeq (3Z^2e^2/32\pi\epsilon_0 a_0)$. Análogamente, el radio de la órbita es en realidad un momento dipolar de transición. Mediante la estimación $a \simeq a_0/Z$, en que a_0 es el radio de Bohr, el espectro de fotones [15.78] es

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{3}{32\pi} Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)^3 \frac{1}{\hbar\omega} \left[\frac{\omega^2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\right] \qquad [15.79]$$

Las características esenciales de este espectro son su pico acusado para la energía del rayo X y su dependencia con el número atómico proporcionalmente a Z^2.

Hasta ahora hemos considerado la radiación que acompaña a la desaparición de la carga de un electrón orbital en el proceso de captura electrónica. Pero un electrón, además de carga, posee momento magnético. La desaparición del momento magnético también da lugar a radiación, pero el carácter de su espectro es completamente distinto. La distribución en intensidad, en ángulo y en frecuencia para un momento magnético puntual en movimiento viene

dado por [14.74]. El momento magnético del electrón puede ser considerado como un vector constante en el espacio hasta su desaparición en el instante $t=0$. Así, en la aproximación dipolar y con $\beta \ll 1$ la distribución en intensidad apropiada es:

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^4}{16\pi^3 c^3} \left| \int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\mu} e^{i\omega t}\, dt \right|^2 \qquad [15.80]$$

Lo que nos da

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^2}{16\pi^3 c^3} \mu^2 \operatorname{sen}^2 \Theta \qquad [15.81]$$

en donde Θ es el ángulo entre $\boldsymbol{\mu}$ y la dirección de observación $\boldsymbol{n}$.

En un sentido semiclásico se puede imaginar que el momento magnético del electrón tiene un módulo $\mu = \sqrt{3}\,(e\hbar/2m)$, pero que es observada solamente su proyección $\mu_z = \pm(e\hbar/2m)$ sobre un eje arbitrario. Puede pensarse que el momento sigue un movimiento de precesión alrededor del eje bajo un ángulo $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{2}$, de forma que, al calcular el valor medio, solamente nos queda el momento a lo largo del eje. Fácilmente se demuestra que al calcular el valor medio sobre esta precesión, $\operatorname{sen}^2\Theta$ en [15.81] se convierte en su valor medio 2/3, independientemente de la dirección de observación. Así, el espectro angular y de frecuencia se transforma en

$$\frac{d^2I}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2}{32\pi^3 \epsilon_0 c} \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^2 \qquad [15.82]$$

La energía total radiada por unidad de intervalo de frecuencia es

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^2 \qquad [15.83]$$

mientras que el número correspondiente de fotones por unidad de intervalo de energía es

$$N(\hbar\omega) = \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} \frac{\hbar\omega}{(mc^2)^2} \qquad [15.84]$$

En su dependencia con la frecuencia estos espectros son muy diferentes de un espectro de radiación de frenado. Aumentan al aumentar la frecuencia, aparentemente sin límite. Naturalmente, ya hemos sido prevenidos de que nuestros resultados clásicos solamente son válidos en el caso límite de frecuencias bajas. Podemos imaginarnos que también es válido en este caso cierto tipo de argumento basado en el principio de incertidumbre, como se utilizó en la sección 15.6 para la desintegración beta radiativa, y que por lo menos está garantizado el principio de conservación de la energía. En realidad, aparecen modificaciones porque siempre se emite un neutrino en el proceso de captura electrónica. Puede demostrarse que la probabilidad de emisión de un neutrino depende del cuadrado de su energía E_ν. Cuando no se emite ningún fotón, el neutrino posee toda la energía liberada $E_\nu = E_0$. Pero cuando le acompaña un fotón de energía $\hbar\omega$, la energía del neutrino se reduce a $E'_\nu = E_0 - \hbar\omega$.

Así, la probabilidad de emisión del neutrino se reduce en un factor

$$\left(\frac{E_\nu'}{E_\nu}\right)^2 = \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E_0}\right)^2 \qquad [15.85]$$

Esto significa que nuestros espectros clásicos [15.83] y [15.84] se deben corregir multiplicando por [15.85] para tomar en cuenta la cinemática de la emisión del neutrino. El espectro de fotones clásico modificado es

$$N(\hbar\omega) = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon_0\hbar c}\frac{\hbar\omega}{(mc^2)^2}\left(1 - \frac{\hbar\omega}{E_0}\right)^2 \qquad [15.86]$$

Esencialmente, éste es el resultado mecanocuántico correcto. En la figura 15.12 se establece una comparación entre la distribución corregida [15.86] y la clási-

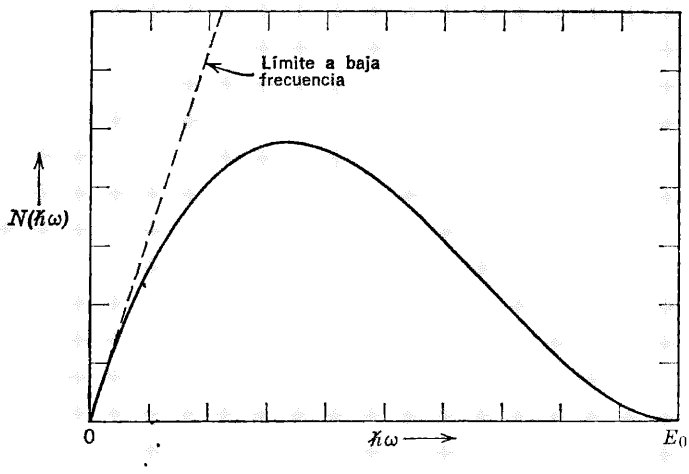


FIG. 15.12. Espectro de los fotones en la captura de un electrón orbital a causa de la desaparición del momento magnético del electrón.

ca [15.84]. Evidentemente, la probabilidad de emisión de un neutrino es crucial en la obtención del comportamiento adecuado del espectro energético de fotones. En los espectros ordinarios de radiación de frenado, tales factores de corrección resultan menos importantes a causa de que la parte principal de la radiación se emite por fotones de energías mucho más pequeñas que el valor máximo permitido.

La radiación total emitida en la captura de un electrón orbital es la suma de las contribuciones debidas a la desaparición de la carga eléctrica y del momento magnético. A causa de los distintos comportamientos de [15.79] y [15.86], vemos que en el límite superior del espectro predomina la contribución debida al momento magnético, a menos que la energía liberada sea muy pequeña, con lo que el límite inferior del espectro viene regido por el término debido a la carga eléctrica, en especial para valores altos de Z. En la figura 15.13 se presenta un espectro combinado típico para $Z \sim 20$-30. Las observaciones con cierto número de núcleos confirman los aspectos generales de este espectro y permiten determinar la energía liberada E_0.

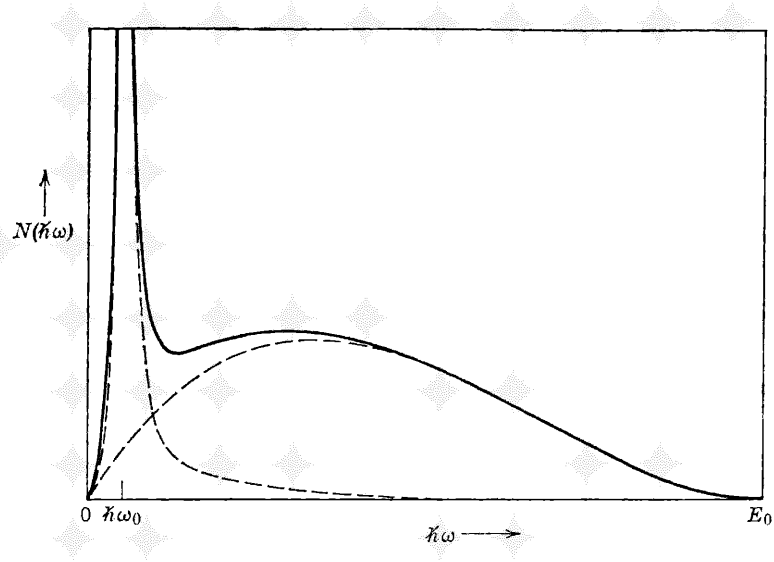


FIG. 15.13. Espectro de fotones típico para la captura radiativa de un electrón orbital en la cual se libera una energía E_0. Se presentan las contribuciones debidas tanto a la desaparición de la carga como al momento magnético del electrón.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

La radiación de frenado clásica es discutida brevemente por:

LANDAU y LIFSHITZ, *Teoría clásica de campos*, sección 9.4,
PANOFSKY y PHILLIPS, sección 19.6.

Un tratamiento semiclásico, análogo al nuestro, pero utilizando en todo él parámetros de impacto, y mucho más breve, aparece en

ROSSI, sección 2.12.

La radiación de frenado sólo puede describirse exactamente mediante un tratamiento propiamente mecanocuántico. La referencia típica es

HEITLER.

El método de los cuantos virtuales (método de Weizsäcker-Williams) solamente tiene una referencia adecuada, el artículo clásico de

WILLIAMS.

Discusiones breves aparecen en

HEITLER, apéndice 6.
PANOFSKY y PHILLIPS, sección 18.5.

El trabajo de FERMI que precede en diez años al tratamiento de WEIZSÄCKER-WILLIAMS es

E. FERMI, *Zeit. Physik*, **29**, 315 (1924).

Las limitaciones del tratamiento de Fermi de la pérdida de energía fueron aclaradas mediante el empleo de la mecánica cuántica por

E. J. WILLIAMS, *Proc. Roy. Soc.*, **A139**, 163 (1933).

Entre los tratamientos mecanocuánticos de los procesos beta radiativos, en algunos casos comparados con la experiencia, se encuentran los de

C. S. W. CHANG y D. L. FALKOFF, *Phys. Rev.*, **76**, 365 (1949).
P. C. MARTIN y J. R. GLAUBER, *Phys. Rev.*, **109**, 1307 (1958).
SIEGBAHN, cap. XX (III), por C. S. WU.

Un tema importante no mencionado aquí es la producción de haces de radiación de frenado coherente mediante electrones de alta energía en cristales. En condiciones apropiadas pueden producirse haces de fotones muy polarizados y casi monocromáticos.
Da una revisión de la teoría y la parte experimental

G. DIAMBRINI PALAZZI, *Rev. Mod. Phys.*, **40**, 611 (1968).

PROBLEMAS

15.1. Una partícula no relativista de carga e y masa m choca con una esfera lisa fija de radio R. Suponiendo que la colisión es elástica, demuéstrese que en la aproximación dipolar (despreciando los efectos de retardo), la sección eficaz diferencial clásica para la emisión de fotones por unidad de ángulo sólido y unidad de intervalo de energía es

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, d(\hbar\omega)} = \frac{R^2}{12\pi}\,\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\left(\frac{v}{c}\right)^2\frac{1}{\hbar\omega}\,(2+3\,\mathrm{sen}^2\,\theta)$$

en donde θ se mide respecto de la dirección de incidencia. Represéntese la distribución angular. Intégrese respecto de todos los ángulos para obtener la sección eficaz total de radiación de frenado. Cualitativamente, ¿qué factor (o factores) gobiernan el límite superior del espectro de frecuencia?

15.2. Trátese el problema anterior sin la hipótesis de movimiento no relativista, utilizando [15.2] y suponiendo que el choque elástico es de duración despreciable. Demuéstrese que la sección eficaz para la emisión de fotones es, ahora,

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, d(\hbar\omega)} = \frac{R^2}{4\pi}\,\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\,\frac{\beta^2}{\hbar\omega}\left[\frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}+\frac{1}{\beta^3}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-\frac{2}{\beta^2}\right]$$

15.3. Un grupo de partículas cargadas con cargas q_j y posiciones $\boldsymbol{r}_j(t)$ sufren interacciones y son aceleradas sólo durante un tiempo $-\tau/2 < t < \tau/2$, durante el cual sus velocidades cambian de $c\boldsymbol{\beta}_j$ a $c\boldsymbol{\beta}'_j$.

a) Demuéstrese que para $\omega\tau \ll 1$ la intensidad de radiación emitida con polarización $\boldsymbol{\epsilon}$ por unidad de ángulo sólido y unidad de intervalo de frecuencia es:

$$\frac{d^2I}{d\Omega\, d\omega} = \frac{\epsilon_0}{\pi c}\,|\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\mathbf{E}|^2$$

donde

$$\boldsymbol{E} = \sum_j \frac{e_j}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}'_j}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}'_j}-\frac{\boldsymbol{\beta}_j}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}_j}\right)e^{-i\omega\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_j(0)/c}$$

b) Un mesón ω^0 de masa 784 MeV se desintegra en $\pi^+\pi^-$ y e^+e^- con relaciones de bifurcación de $1{,}3\times10^{-2}$ y 8×10^{-5}, respectivamente. Demuéstrese que para ambos modos de desintegración el espectro de energía radiada a bajas

frecuencias es

$$\frac{dI}{d\omega}=\frac{e^2}{4\pi^2\epsilon_0 c}\left[\left(\frac{1+\beta^2}{\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-2\right]\simeq\frac{e^2}{\pi^2\epsilon_0 c}\left[\ln\left(\frac{M_\omega}{m}\right)-\frac{1}{2}\right]$$

siendo M_ω la masa del mesón ω^0 y m la masa de uno de los productos de desintegración. Calcúlese aproximadamente la energía *total* radiada en cada desintegración el espectro hasta la frecuencia máxima permitida por consideraciones cinemáticas. ¿Qué fracción de la energía en reposo del ω^0 representa en cada una de las desintegraciones?

15.4. La emisión de radiación debida a la desaparición de cargas y momentos magsiendo M_ω la masa del mesón ω^0 y m la masa de uno de los productos de los experimentos en un anillo de almacenamiento de alta energía es un caso íntimamente relacionado con el del problema 15.3, *b)*. Si $d\sigma_0$ es la sección eficaz diferencial para el proceso $e^+e^-\to$ hadrones, *sin* emisión de fotones, calcúlese la sección eficaz para el mismo proceso acompañado de un fotón *blando* ($\hbar\omega\to 0$) en el intervalo de energía $d(\hbar\omega)$ alrededor de $\hbar\omega$. Compárense los resultados con las expresiones mecanocuánticas:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega\, d(\hbar\omega)}=\frac{\alpha}{\pi^2}\frac{d\sigma_0(s')}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{s'^2-4m^2s'}{s^2-4m^2s}}\cdot\frac{\left[\beta^2\operatorname{sen}^2\theta+\dfrac{\hbar^2\omega^2}{s'+2m^2}(1-\beta^4\cos^4\theta)\right]}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d(\hbar\omega)}=\frac{4\alpha}{\pi}\frac{d\sigma_0(s')}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{s'^2-4m^2s'}{s^2-4m^2s}}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-1\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\hbar^2\omega^2}{s'+2m^2}\left[\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-1\right]\right\}$$

siendo $s=(p_1+p_2)^2$, $s'=(p_1+p_2-k)^2$, $\beta=v/c$ del electrón en el sistema c.m. Despréciese la emisión de radiación por cualquiera de los hadrones, supuesto que todos son mucho más pesados que los electrones.

Los factores proporcionales a ω^2 en los numeradores de estas expresiones pueden atribuirse a la desaparición de los momentos magnéticos. Si no se ha incluido ya tal contribución en el cálculo semiclásico, considérese la posibilidad de hacerlo.

15.5. Dos partículas de cargas q_1 y q_2 y masas m_1 y m_2 chocan bajo la acción de fuerzas electromagnéticas (y quizá otras). Considérense las distribuciones angular y de frecuencia de la radiación emitida en la colisión.

a) Demuéstrese que, en el caso de movimiento no relativista, la energía radiada por unidad de ángulo sólido y unidad de intervalo de frecuencia en el sistema de coordenadas del centro de masas viene dada por

$$\frac{dI(\omega,\Omega)}{d\Omega}=\frac{\mu^2}{16\pi^3c^3\epsilon_0}\times$$

$$\times\left|\int e^{-i\omega t}\ddot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{n}\left(\frac{q_1}{m_1}e^{i(\omega/c)(\mu/m_1)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}(t)}-\frac{q_2}{m_2}e^{-i(\omega/c)(\mu/m_2)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}(t)}\right)dt\right|^2$$

en donde $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)$ es la distancia mutua, $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en la dirección de observación y $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$ es la masa reducida.

b) Mediante desarrollo de los factores de retardo demuéstrese que, si las dos partículas tienen la misma razón carga a masa (por ejemplo, un deuterón y una partícula alfa), el término principal (dipolar) se anula, y el término del

orden siguiente da

$$\frac{dI(\omega,\Omega)}{d\Omega}=\frac{\omega^2}{16\pi^3c^5\epsilon_0}\left(\frac{q_1\mu^2}{m_1^2}+\frac{q_2\mu^2}{m_2^2}\right)^2\left|\int e^{-i\omega t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}(\ddot{\mathbf{x}}\times\mathbf{n})\,dt\right|^2$$

c) Relaciónese el resultado *b)* con el desarrollo en multipolos de las secciones 9.1-9.3.

15.6. Dos cargas puntuales idénticas de carga q y masa m interaccionan mediante fuerzas repulsivas de corto alcance que equivalen a una esfera dura de radio R en su distancia mutua. Despreciando la *interacción* electromagnética entre ambas, determínese la sección eficaz de radiación en el sistema del centro de masa, en el menor orden (no nulo) de aproximación. Demuéstrese que la sección eficaz diferencial para la emisión de fotones por unidad de ángulo sólido y unidad de intervalo de energía es

$$\frac{d^2\sigma}{d(\hbar\omega)\,d\Omega}=\frac{R^2}{60\pi}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{R}{\hbar c}\right)^2\left[1+\frac{5}{14}P_2(\cos\theta)-\frac{3}{28}P_4(\cos\theta)\right]$$

en donde θ se mide respecto de la dirección de incidencia. Compárese este resultado con el del problema 15.1 en lo referente a dependencia con la frecuencia, magnitud relativa, etc.

15.7. Una partícula de carga ze, masa m y velocidad no relativista v, es desviada en un campo de Coulomb apantallado $V(r)=Zze^2e^{-\alpha r}/4\pi\epsilon_0 r$, y como consecuencia emite radiación. Discútase la radiación suponiendo la aproximación de que la partícula se mueve en una trayectoria rectilínea que pasa por el centro de fuerzas.

a) Demuéstrese que, si el parámetro de impacto es b, la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia es

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega,b)=\frac{1}{24\pi^4\epsilon_0^3}\,\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{c}{v}\right)^2\alpha^2K_1^2(\alpha b)$$

cuando $\omega\ll v/b$, y despreciable cuando $\omega\gg v/b$.

b) Demuéstrese que la sección eficaz de radiación es

$$\frac{d\chi(\omega)}{d\omega}\simeq-\frac{1}{12\pi^3\epsilon_0^3}\,\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{c}{v}\right)^2\left[\frac{x^2}{2}\left(K_0^2(x)-K_1^2(x)+\frac{2K_0(x)K_1(x)}{x}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

en donde $x_1=\alpha b_{\text{mín}}$, $x_2=\alpha b_{\text{máx}}$.

c) Con $b_{\text{mín}}=\hbar/mv$, $b_{\text{máx}}=v/\omega$, $\alpha^{-1}=1{,}4a_0Z^{-1/3}$, determínese la sección eficaz de radiación en los dos casos límite, $x_2\ll 1$ y $x_2\gg 1$. Compárense los resultados con los límites obtenidos en el texto para «apantallamiento» y «no apantallamiento».

15.8. Una partícula de carga ze, masa m y velocidad v, es desviada en una trayectoria hiperbólica por un potencial de Coulomb repulsivo fijo, $V(r)=Zze^2/4\pi\epsilon_0 r$. Con la aproximación polar no relativista (pero sin otras aproximaciones):

a) Demuéstrese que la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia cuando la partícula incide inicialmente con un parámetro de impacto b es

$$\frac{d}{d\omega}I(\omega,b)=\frac{2}{3\pi^2\epsilon_0}\,\frac{(zea\omega)^2}{c^3}\,e^{-(\pi\omega/\omega_0)}\left\{\left[K'_{i\omega/\omega_0}\left(\frac{\omega\epsilon}{\omega_0}\right)\right]^2+\frac{\epsilon^2-1}{\epsilon^2}\left[K_{i\omega/\omega_0}\left(\frac{\omega\epsilon}{\omega_0}\right)\right]^2\right\}$$

b) Demuéstrese que la sección eficaz de radiación es

$$\frac{d\chi(\omega)}{d\omega}=\frac{4}{3\pi\epsilon_0}\,\frac{(zeav)^2}{c^3}\,e^{-(\pi\omega/\omega_0)}\,\frac{\omega}{\omega_0}\,K_{i\omega/\omega_0}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left[-K'_{i\omega/\omega_0}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$$

c) Pruébese que la sección eficaz de radiación se reduce a la obtenida en el texto para la radiación de frenado clásica cuando $\omega\ll\omega_0$. ¿Cuál es la forma límite cuando $\omega\gg\omega_0$?

d) ¿Qué modificaciones se presentan en el caso de una interacción coulombiana atractiva?

La trayectoria hiperbólica puede describirse por

$$x=a(\epsilon+\cosh\xi),\qquad y=-b\,\operatorname{senh}\xi,\qquad \omega_0 t=(\xi+\epsilon\,\operatorname{senh}\xi)$$

en donde

$$a=Zze^2/4\pi\epsilon_0 mv^2,\quad \epsilon=\sqrt{1+(b/a)^2},\quad \omega_0=v/a.$$

15.9. Mediante el método de los cuantos virtuales, discútase el parentesco existente entre la sección eficaz para la fotodesintegración de un núcleo y desintegración por electrón de un núcleo.

a) Demuéstrese que para electrones de energía $E=\gamma mc^2\gg mc^2$, la sección eficaz de desintegración por electrones es aproximadamente

$$\sigma_{el}(E)\simeq\frac{1}{2\pi^2\epsilon_0}\,\frac{e^2}{\hbar c}\int_{\omega_T}^{E/\hbar}\sigma_{foto}(\omega)\ln\left(\frac{k\gamma^2mc^2}{\hbar\omega}\right)\frac{d\omega}{\omega}$$

en donde $\hbar\omega_T$ es la energía umbral del proceso.

b) Suponiendo que $\sigma_{foto}(\omega)$ tiene la forma de resonancia

$$\sigma_{foto}(\omega)\simeq\frac{A}{8\pi^2\epsilon_0}\,\frac{e^2}{Mc}\,\frac{\Gamma}{(\omega-\omega_0)^2+(\Gamma/2)^2}$$

en donde la anchura Γ es pequeña en comparación con $(\omega_0-\omega_T)$, represéntese el comportamiento $\sigma_{el}(E)$ como función de E y demuéstrese que cuando $E\gg\hbar\omega_0$,

$$\sigma_{el}(E)\simeq\frac{1}{2\pi^2\epsilon_0}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)\frac{Ae^2}{Mc}\,\frac{1}{\omega_0}\ln\left(\frac{kE^2}{mc^2\hbar\omega_0}\right)$$

c) Discútase la comparación experimental existente entre actividades producidas por espectros de radiación de frenado y electrones monoenergéticos tal como presentan BROWN y WILSON, *Phys. Rev.*, **93**, 443 (1954), y demuéstrese que la magnitud definida como $F_{exp}(Z,E)$ tiene el valor aproximado $8\pi/3$ para energías altas, si se utiliza el espectro de Weizsäcker-Williams para describir ambos procesos y la sección eficaz de fotodesintegración tiene una forma resonante.

15.10. Una partícula rápida de carga ze, masa M, velocidad v, choca con un átomo hidrogenoide con un electrón de carga $-e$, masa m, enlazado a un núcleo central de carga Ze. Podemos dividir las colisiones en dos clases: colisiones próximas en las que la partícula atraviesa el átomo ($b<d$), y colisiones distantes en las que la partícula pasa por fuera del átomo ($b>d$). El «radio» atómico d puede tomarse igual a a_0/Z. En las colisiones próximas podemos tratar la interacción de la partícula incidente con el electrón como una colisión entre dos cuerpos, y podemos calcular la transferencia de energía mediante la sección eficaz de Rutherford. En las colisiones distantes podemos considerar la excitación

e ionización del átomo como el resultado de efecto fotoeléctrico debido a los cuantos virtuales de los campos de la partícula incidente.

Por simplicidad supondremos que, para las energías Q del fotón mayores que el potencial de ionización I, la sección eficaz fotoeléctrica es

$$\sigma_\gamma(Q)=\frac{8\pi^2}{137}\left(\frac{a_0}{Z}\right)^2\left(\frac{I}{Q}\right)^3$$

(Esto obedece a la ley empírica $Z^4\lambda^3$ para la absorción de rayos X, y posee un coeficiente ajustado para que se satisfaga la regla de la suma de dipolo, $\int \sigma_\lambda(Q)\,dQ=\pi e^2\hbar/2\epsilon_0 mc$).

a) Calcúlense las secciones eficaces para la transferencia de energía Q por colisiones próximas y distantes (siempre que sea posible, exprésense en función de Q/I y en unidades $z^2e^4/8\pi\epsilon_0^2 mv^2I^2$). *Represéntense* las dos distribuciones cuando $Q/I>1$, el movimiento de la partícula incidente es no relativista y $\frac{1}{2}mv^2=10^3I$.

b) Demuéstrese que el número de colisiones distantes es mucho mayor que el de colisiones próximas, pero que la transferencia de energía por colisión es mucho menor. Demuéstrese que la pérdida de energía se divide aproximadamente por igual entre ambos tipos de colisiones, y compruébese que el resultado obtenido para la pérdida de energía total está esencialmente de acuerdo con el resultado de Bethe [13.44].

15.11. En la descomposición de un mesón π en reposo se crea un mesón μ y un neutrino. La energía cinética total disponible es $(m_\pi-m_\mu)c^2=34$ MeV. El mesón μ tiene una energía cinética de 4,1 MeV. Determínese el número de cuantos emitidos por unidad de intervalo de energía debido a la creación repentina del mesón μ en movimiento. Suponiendo que los fotones se emiten perpendicularmente a la dirección de movimiento del mesón μ (de hecho es una distribución en $\text{sen}^2\,\theta$) demuéstrese que la energía máxima del fotón es 17 MeV. Hállese cuántos «cuantos» se emiten con energía mayor que una décima parte de la energía máxima, y compárese el resultado obtenido con la razón observada en las descomposiciones radiativas π-μ. [W. F. FRY, *Phys. Rev.*, **86**, 418 (1952); H. PRIMAKOFF, *Phys. Rev.*, **84**, 1255 (1951).]

15.12. Un núcleo efectúa una transición interna de un estado a otro y como consecuencia sale despedido un electrón orbital. Este posee una energía cinética igual a la energía de transición menos su energía de enlace. Para una línea de conversión de 1 MeV determínese el número de cuantos emitidos por unidad de energía a causa de la eyección repentina del electrón. ¿Qué fracción de los electrones tendrá energías menores del 99 por 100 de la energía total? ¿Será observable experimentalmente esta cola de baja energía en la línea de conversión?

15.13. Uno de los modos de desintegración de un mesón K^+ es la desintegración en tres piones, $K^+\rightarrow\pi^+\pi^+\pi^-$. La energía liberada es 75 MeV, lo bastante baja para que los piones puedan tratarse de forma no relativista en primera aproximación.

a) Demuéstrese que el espectro diferencial de intensidad radiada a bajas frecuencias en el sistema en el que el mesón K está en reposo es, aproximadamente:

$$\frac{d^2I}{d\omega\,d\Omega}\simeq\frac{e^2}{2\pi^3\epsilon_0 c}\cdot\frac{T_-}{m_\pi c^2}\cdot\text{sen}^2\,\theta$$

siendo T_- la energía cinética del pión negativo y θ el ángulo de emisión del fotón respecto al ímpetu del pión negativo.

b) Estímese la relación de bifurcación para la emisión de un fotón de energía mayor que Δ respecto a la desintegración no radiativa en tres piones. ¿Cuál es su valor numérico si $\Delta=1$ MeV? ¿Y si es 10 MeV?

15.14. Uno de los modos de desintegración del mesón K cargado ($M_k=493{,}7$ MeV) es $K^+ \to \pi^+ \pi^0$ ($M_{\pi^+}=139{,}6$ MeV, $M_{\pi^0}=135{,}0$ MeV). Se emite radiación de frenado interna por la creación del pión positivo. Un estudio de este modo de desintegración radiativa ha sido realizado por EDWARDS y otros, *Phys. Rev.*, **D5**, 2720 (1972).

a) Calcúlese la distribución clásica en ángulo y frecuencia de fotones blandos y compárese con los datos de la figura 6, de EDWARDS y otros. Calcúlese también la distribución clásica para $\beta=0{,}71$, que corresponde a un pión cargado de energía cinética 58 MeV, y compárese.

b) Estímese el número de desintegraciones radiativas para energías cinéticas de los piones cargados en el intervalo 58 MeV$\leqslant T_\pi \leqslant$90 MeV, como fracción de *todas* las desintegraciones K^+ (la desintegración del modo $\pi^+ \pi^0$ es el 21 por 100 de todas las desintegraciones). Se puede tratar la cinemática, incluyendo el fotón, correctamente, o se puede aproximar la realidad con la idealización de que el pión neutro tenga siempre el mismo ímpetu y el fotón y el pión cargado con ímpetus paralelos (véase la parte *a)* para justificar esta hipótesis). Esta idealización permite relacionar directamente los límites de la energía cinética del pión con la del fotón. Compárese el valor estimado con el experimental para la relación de bifurcación para $\pi^+ \pi^0 \gamma$ de $(2{,}4 \pm 0{,}8) \times 10^{-4}$ (con el intervalo limitado de energías del π^+).

CAMPOS MULTIPOLARES

En los capítulos 3 y 4 se utilizó extensamente el desarrollo del potencial escalar en armónicos esféricos para resolver problemas electrostáticos provistos de alguna simetría respecto del origen de coordenadas. No sólo nos resultaba útil para poder tratar problemas de contorno en coordenadas esféricas, sino que, con una fuente presente, nos daba una forma sistemática de desarrollar el potencial mediante los momentos multipolares de la densidad de carga. En el caso de campos electromagnéticos variables con el tiempo, podemos generalizar este desarrollo en armónicos esféricos escalares a un desarrollo en ondas esféricas vectoriales. Estas ondas esféricas vectoriales resultan adecuadas para los problemas de contorno electromagnéticos provistos de simetría esférica, y también para la discusión de la radiación multipolar procedente de una distribución de fuentes localizada. En el capítulo 9 ya hemos considerado los multipolos radiantes más sencillos. En el presente capítulo vamos a dar un desarrollo sistemático.

16.1. SOLUCIONES BASICAS DE LA ECUACION DE ONDAS ESCALAR EN ONDAS ESFERICAS

Como introducción al problema de ondas esféricas vectoriales, vamos a considerar la ecuación de ondas escalar. Un campo escalar $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ que satisface la ecuación de ondas sin fuentes:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad [16.1]$$

puede analizarse en el tiempo mediante la integral de Fourier:

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\boldsymbol{x}, \omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \qquad [16.2]$$

en que cada componente satisface la ecuación de ondas de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\boldsymbol{x}, \omega) = 0 \qquad [16.3]$$

con $k^2 = \omega^2/c^2$. En problemas provistos de simetría respecto de un cierto origen conviene tener soluciones fundamentales adecuadas a las coordenadas esféricas. La representación del operador laplaciano en coordenadas esféricas se

da en la ecuación [3.1]. La separación de las variables angular y radial constituye la expresión ya conocida:

$$\psi(x, \omega) = \sum_{l,m} f_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [16.4]$$

en donde los armónicos esféricos Y_{lm} están definidos por [3.53]. Las funciones radiales $f_l(r)$ satisfacen la ecuación radial:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] f_l(r) = 0 \qquad [16.5]$$

Efectuando la sustitución

$$f_l(r) = \frac{1}{r^{1/2}} u_l(r) \qquad [16.6]$$

la ecuación [16.5] se transforma en:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right] u_l(r) = 0 \qquad [16.7]$$

que es precisamente la ecuación de Bessel [3.75] con $\nu = l + \frac{1}{2}$. Así, las soluciones para $f_l(r)$ son:

$$f_l(r) = \frac{A}{r^{1/2}} J_{l+1/2}(kr) + \frac{B}{r^{1/2}} N_{l+1/2}(kr) \qquad [16.8]$$

Se acostumbra definir las *funciones de Bessel y Hankel esféricas*, que se designan por $j_l(x)$, $n_l(x)$, $h_l^{(1,2)}(x)$, de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} j_l(x) &= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(x) \\ n_l(x) &= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} N_{l+1/2}(x) \\ h_l^{(1,2)}(x) &= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} [J_{l+1/2}(x) \pm i N_{l+1/2}(x)] \end{aligned}\right\} \qquad [16.9]$$

Para x real, $h_l^{(2)}(x)$ es la conjugada de $h_l^{(1)}(x)$. Partiendo de los desarrollos en serie [3.82] y [3.83] se puede demostrar que

$$\left.\begin{aligned} j_l(x) &= (-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \\ n_l(x) &= -(-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\cos x}{x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [16.10]$$

Para los primeros valores de l se tienen las formas explícitas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} j_0(x)&=\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad n_0(x)=-\frac{\cos x}{x}, \quad h_0^{(1)}(x)=\frac{e^{ix}}{ix} \\ j_1(x)&=\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}, \quad n_1(x)=-\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\operatorname{sen} x}{x} \\ h_1^{(1)}(x)&=-\frac{e^{ix}}{x}\left(1+\frac{i}{x}\right) \\ j_2(x)&=\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen} x-\frac{3\cos x}{x^2}, \quad n_2(x)=-\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cos x-3\frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \\ h_2^{(1)}(x)&=\frac{ie^{ix}}{x}\left(1+\frac{3i}{x}-\frac{3}{x^2}\right) \\ j_3(x)&=\left(\frac{15}{x^4}-\frac{6}{x^2}\right)\operatorname{sen} x-\left(\frac{15}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cos x \\ n_3(x)&=-\left(\frac{15}{x^4}-\frac{6}{x^2}\right)\cos x-\left(\frac{15}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen} x \\ h_3^{(1)}(x)&=\frac{e^{ix}}{x}\left(1+\frac{6i}{x}-\frac{15}{x^2}-\frac{15i}{x^3}\right) \end{aligned}\right\} \quad [16.11]$$

A partir de las series [3.82]-[3.83] y de la definición [3.85] es posible calcular los límites para argumentos pequeños, que son:

$x \ll 1,\ l$

$$\left.\begin{aligned} j_l(x) &\to \frac{x^l}{(2l+1)!!}\left(1-\frac{x^2}{2(2l+3)}+\ldots\right) \\ n_l(x) &\to -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}\left(1-\frac{x^2}{2(1-2l)}+\ldots\right) \end{aligned}\right\} \quad [16.12]$$

en donde $(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3)\ \ldots\ (5)\cdot(3)\cdot(1)$. Análogamente, los límites para argumentos grandes son:

$x \gg l$

$$\left.\begin{aligned} j_l(x) &\to \frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(x-\frac{l\pi}{2}\right) \\ n_l(x) &\to -\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{l\pi}{2}\right) \\ h_l^{(1)}(x) &\to (-i)^{l+1}\frac{e^{ix}}{x} \end{aligned}\right\} \quad [16.13]$$

Las funciones de Bessel esféricas satisfacen las fórmulas de recurrencia:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2l+1}{x}z_l(x) &= z_{l-1}(x)+z_{l+1}(x) \\ z_l'(x) &= \frac{1}{2l+1}\left[lz_{l-1}(x)-(l+1)z_{l+1}(x)\right] \end{aligned}\right\} \quad [16.14]$$

en donde $z_l(x)$ es una cualquiera de las funciones $j_l(x)$, $n_l(x)$, $h_l^{(1)}(x)$, $h_l^{(2)}(x)$. Los wronskianos de los distintos pares son:

$$W(j_l, n_l)=\frac{1}{i} W[j_l, h_l^{(1)}]=-W[n_l, h_l^{(1)}]=\frac{1}{x^2} \qquad [16.15]$$

Podemos expresar la solución general de [16.3] en coordenadas esféricas en la forma:

$$\psi(x)=\sum_{l,m}[A_{lm}^{(1)}h_l^{(1)}(kr)+A_{lm}^{(2)}h_l^{(2)}(kr)]Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [16.16]$$

donde los coeficientes $A_{lm}^{(1)}$ y $A_{lm}^{(2)}$ se determinarán por las condiciones de contorno.

Como ejemplo vamos a presentar el desarrollo en ondas esféricas de la función de Green de una onda progresiva $G(x, x')$, solución de la ecuación

$$(\nabla^2+k^2)G(x, x')=-\delta(x-x') \qquad [16.17]$$

en un dominio infinito. Vimos en el capítulo 9 que la forma de esta función es

$$G(x, x')=\frac{e^{ik|x-x'|}}{4\pi|x-x'|} \qquad [16.18]$$

Podemos obtener el desarrollo de $G(x, x')$ en ondas esféricas exactamente del mismo modo que se hizo en la sección 3.9 con la ecuación de Poisson (en especial, véase ecuación [3.117] y siguientes). Si en [16.17] sustituimos un desarrollo de la forma:

$$G(x, x')=\sum_{l,m} g_l(r, r')Y_{lm}^*(\theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [16.19]$$

llegamos a una ecuación para $g_l(r, r')$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]g_l=-\frac{1}{r^2}\delta(r-r') \qquad [16.20]$$

La solución que satisface las condiciones de contorno, de ser finita en el origen y ondas salientes en el infinito, es:

$$g_l(r, r')=Aj_l(kr_<)h_l^{(1)}(kr_>) \qquad [16.21]$$

La discontinuidad correcta en la pendiente queda asegurada si $A=ik$. Por tanto, el desarrollo de la función de Green es:

$$\frac{e^{ik|x-x'|}}{4\pi|x-x'|}=ik\sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr_<)h_l^{(1)}(kr_>)\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [16.22]$$

Hasta ahora hemos insistido principalmente en las funciones radiales adecuadas para la ecuación de ondas escalar. Ahora vamos a volver a examinar

las funciones angulares con el fin de introducir algunos conceptos útiles al considerar la ecuación de ondas vectorial. Las funciones angulares básicas son los armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$ [3.53], que son las soluciones de la ecuación

$$-\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y_{lm}=l(l+1)Y_{lm} \qquad [16.23]$$

Como es bien conocido en mecánica cuántica, esta ecuación puede escribirse en la forma:

$$L^2Y_{lm}=l(l+1)Y_{lm} \qquad [16.24]$$

Siendo $L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$ un operador diferencial, que con:

$$\boldsymbol{L}=-i(\boldsymbol{r}\times\nabla) \qquad [16.25]$$

es $\hbar^{-1}$ veces el operador momento cinético de la mecánica ondulatoria.

Las componentes de $\boldsymbol{L}$ pueden expresarse por conveniencia mediante las combinaciones

$$\left.\begin{aligned} L_+&=L_x+iL_y=e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\ L_-&=L_x-iL_y=e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+i\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\ L_z&=-i\frac{\partial}{\partial\phi}\end{aligned}\right\} \qquad [16.26]$$

Observemos que $\boldsymbol{L}$ opera solamente sobre las variables angulares y es independiente de r. Por la definición [16.25] resulta evidente que se cumple:

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}=0 \qquad [16.27]$$

como una ecuación operacional. De las formas explícitas [16.26] resulta fácil comprobar que L^2 es igual al operador del primer miembro de [16.23].

Mediante las formas explícitas [16.26] y las relaciones de recurrencia de Y_{lm}, podemos establecer las siguientes relaciones de gran utilidad:

$$\left.\begin{aligned} L_+Y_{lm}&=\sqrt{(l-m)\,(l+m+1)}\;Y_{l,m+1}\\ L_-Y_{lm}&=\sqrt{(l+m)\,(l-m+1)}\;Y_{l,m-1}\\ L_zY_{lm}&=mY_{lm}\end{aligned}\right\} \qquad [16.28]$$

Finalmente, observaremos las siguientes ecuaciones operacionales que se refieren a las propiedades de conmutación de $\boldsymbol{L}$, L^2 y ∇^2:

$$\left.\begin{aligned} L^2\boldsymbol{L}&=\boldsymbol{L}L^2\\ \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}&=i\boldsymbol{L}\\ L_j\nabla^2&=\nabla^2L_j\end{aligned}\right\} \qquad [16.29]$$

en donde

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r)-\frac{L^2}{r^2} \qquad [16.30]$$

16.2. DESARROLLO MULTIPOLAR DE LOS CAMPOS ELECTROMAGNETICOS

Admitiendo que la dependencia temporal es de la forma $e^{-i\omega t}$, las ecuaciones de Maxwell en una región *libre* de fuentes en el vacío son:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = ick\boldsymbol{B}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = -\frac{ik}{c}\boldsymbol{E}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad [16.31]$$

siendo $k = \omega/c$. Si eliminamos $\boldsymbol{E}$ entre las dos ecuaciones en que aparece el rotacional, obtenemos para $\boldsymbol{B}$:

$$(\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

estando $\boldsymbol{E}$ dado por:

$$\boldsymbol{E} = \frac{ic}{k}\nabla \times \boldsymbol{B} \qquad [16.32]$$

Hubiéramos podido eliminar $\boldsymbol{B}$, obteniendo:

$$(\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

estando $\boldsymbol{B}$ dado por:

$$\boldsymbol{B} = \frac{-i}{ck}\nabla \times \boldsymbol{E} \qquad [16.33]$$

Tanto [16.32] como [16.33] son conjuntos de tres ecuaciones que equivalen a las ecuaciones de Maxwell [16.31].

Queremos ahora determinar las soluciones multipolares para $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Según [16.32] y [16.33], resulta evidente que cada componente *rectangular* de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}$ satisface la ecuación de ondas [16.3] de Helmholtz. Por tanto, cada una de estas componentes puede escribirse como un desarrollo de la forma general de [16.16]. Sin embargo, queda el problema de organizar las diferentes componentes con el fin de que se satisfagan $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ y $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ y que den un campo multipolar puro de orden (l, m). Vamos a seguir un método distinto y algo más sencillo sugerido por BOUWKAMP y CASIMIR *. Considérese la magnitud escalar $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}$, siendo $\boldsymbol{A}$ un campo vectorial que se comporta bien para nuestros propósitos. Es inmediato verificar que el operador laplaciano actuando sobre este escalar da:

$$\nabla^2(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r} \cdot (\nabla^2 \boldsymbol{A}) + 2\nabla \cdot \boldsymbol{A} \qquad [16.34]$$

Por consiguiente, se deduce de [16.32] y [16.33] que los escalares $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}$ satisfacen ambos a la ecuación de ondas de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}) = 0; \qquad (\nabla^2 + k^2)(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}) = 0 \qquad [16.35]$$

La solución general para $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}$ está dada por [16.16], y análogamente para $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}$.

* C. J. BOUWKAMP y H. B. G. CASIMIR, *Physica*, **20**, 539 (1954). Este trabajo discute las relaciones entre un cierto número de tratamientos diferentes, pero equivalentes, de la radiación multipolar.

A continuación *definimos un campo multipolar magnético de orden* (l, m) mediante las condiciones:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}_{lm}^{(M)} &= \frac{l(l+1)}{k}\, g_l(kr)Y_{lm}(\theta,\phi) \\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}_{lm}^{(M)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [16.36]$$

siendo

$$g_l(kr) = A_l^{(1)}h_l^{(1)}(kr) + A_l^{(2)}h_l^{(2)}(kr) \qquad [16.37]$$

La presencia del factor $l(l+1)/kc$ es debida a conveniencias posteriores. Utilizando la ecuación del rotacional de [16.33] podemos relacionar $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}$ con el campo eléctrico:

$$ck\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{i}\,\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \frac{1}{i}\,(\boldsymbol{r}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{E} \qquad [16.38]$$

estando $\boldsymbol{L}$ dado por [16.25]. Como $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}$ está dado por [16.36], el campo eléctrico del multipolo magnético debe satisfacer:

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{E}_{lm}^{(M)}(r,\theta,\phi) = l(l+1)cg_l(kr)Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad [16.39]$$

y $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}_{lm}^{(M)} = 0$. Para determinar el campo eléctrico puramente transversal mediante [16.39], obsérvese en primer lugar que el operador $\boldsymbol{L}$ actúa únicamente sobre las variables angulares (θ, ϕ). Esto significa que la dependencia radial de $\boldsymbol{E}_{lm}^{(M)}$ debe estar dada por $g_l(kr)$. En segundo lugar, el operador $\boldsymbol{L}$ al actuar sobre Y_{lm} transforma el valor de m de acuerdo con [16.28], pero no cambia el valor de l. Por consiguiente, las componentes de $\boldsymbol{E}_{lm}^{(M)}$ a lo sumo pueden ser combinaciones lineales de las Y_{lm} con valores diferentes de m y un valor común de l, igual al valor de l en el segundo miembro de [16.39]. Un momento de reflexión nos muestra que para que $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{E}_{lm}^{(M)}$ conduzca a *un solo* Y_{lm} es necesario preparar previamente las componentes de $\boldsymbol{E}_{lm}^{(M)}$ para compensar cualquier aumento o disminución de m producido por $\boldsymbol{L}$. Así, por ejemplo, en el término L_-E_+ debe ocurrir que E_+ sea proporcional a L_+Y_{lm}. A lo que esto equivale es a que el campo eléctrico debe ser:

Junto con:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{lm}^{(M)} &= cg_l(kr)\boldsymbol{L}Y_{lm}(\theta,\phi) \\ \boldsymbol{B}_{lm}^{(M)} &= -\frac{i}{ck}\,\nabla\times\boldsymbol{E}_{lm} \end{aligned}\right\} \qquad [16.40]$$

[16.40] especifica los campos electromagnéticos de un multipolo *magnético* de orden (l, m). Como el campo eléctrico [16.40] es transversal al radio vector, algunas veces estos campos multipolares se denominan *transversales eléctricos (TE)* en lugar de magnéticos.

En forma semejante, los campos de un *multipolo eléctrico, o transversal*

magnético, de orden (l, m) se especifican mediante las condiciones:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}_{lm}^{(E)} &= -\frac{l(l+1)}{k} f_l(kr) Y_{lm}(\theta,\phi) \\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}_{lm}^{(E)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [16.41]$$

Entonces, los campos multipolares *eléctricos* son:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B}_{lm}^{(E)} &= f_l(kr)\boldsymbol{L}Y_{lm}(\theta,\phi) \\ \boldsymbol{E}_{lm}^{(E)} &= \frac{ic}{k}\nabla\times\boldsymbol{B}_{lm} \end{aligned}\right\} \qquad [16.42]$$

La función radial $f_l(kr)$ viene dada por una expresión análoga a la [16.37].

Los campos [16.40] y [16.42] son los análogos, para ondas esféricas, a los modos cilíndricos TE y TM del capítulo 8. Puede demostrarse que, justamente como en la guía de ondas cilíndrica, los dos conjuntos de campos multipolares, [16.40] y [16.42], forman un sistema completo de soluciones vectoriales de las ecuaciones de Maxwell en una región sin fuentes. Se utilizará la terminología campos multipolares eléctrico y magnético, en lugar de TM y TE, puesto que, como veremos, las fuentes de cada tipo de campo son, respectivamente, la densidad de carga eléctrica y la densidad de momento magnético. Como el armónico esférico vectorial $\boldsymbol{L}Y_{lm}$ tiene un papel importante, conviene introducir la forma normalizada *:

$$\boldsymbol{X}_{lm}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{L}Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad [16.43]$$

con las propiedades de ortogonalidad:

$$\int \boldsymbol{X}_{l'm'}^{*}\cdot\boldsymbol{X}_{lm}\,d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad [16.44]$$

y

$$\int \boldsymbol{X}_{l'm'}^{*}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{X}_{lm})\,d\Omega = 0 \qquad [16.45]$$

para todo l, l', m, m'.

Combinando los dos tipos de campos podemos escribir la solución general de las ecuaciones de Maxwell [16.31]:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \sum\left[a_E(l,m)f_l(kr)\boldsymbol{X}_{lm} - \frac{i}{k}a_M(l,m)\nabla\times g_l(kr)\boldsymbol{X}_{lm}\right] \\ \boldsymbol{E} &= \sum\left[\frac{ic}{k}a_E(l,m)\nabla\times f_l(kr)\boldsymbol{X}_{lm} + ca_M(l,m)g_l(kr)\boldsymbol{X}_{lm}\right] \end{aligned}\right\} \qquad [16.46]$$

en donde los coeficientes $a_E(l,m)$ y $a_M(l,m)$ representan las contribuciones de los campos multipolares (l,m) eléctrico y (l,m) magnético. Las funciones ra-

* $\boldsymbol{X}_{lm}$ se define que sea idénticamente cero para $l=0$. Sólo existen soluciones con simetría esférica para las ecuaciones de Maxwell sin fuentes en el límite estático $k\to 0$. Véase la sección 9.1.

diales $f_l(kr)$ y $g_l(kr)$ son de la forma [16.37]. Los coeficientes $a_E(l, m)$ y $a_M(l, m)$, así como las proporciones relativas en [16.37] se determinan por las fuentes y condiciones de contorno. Para presentar esto explícitamente, notemos que los escalares $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}$ son suficientes para determinar las incógnitas en [16.46] de acuerdo con:

$$\left.\begin{aligned} a_M(l, m)g_l(kr) &= \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}}\int Y^*_{lm}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}\,d\Omega \\ a_E(l, m)f_l(kr) &= -\frac{k}{c\sqrt{l(l+1)}}\int Y^*_{lm}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}\,d\Omega \end{aligned}\right\} \qquad [16.47]$$

Por consiguiente, el conocimiento de $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}$ en dos radios diferentes r_1 y r_2, en una región sin fuentes, permitirá una especificación completa de los campos, incluyendo la determinación de las proporciones relativas de $h_l^{(1)}$ y $h_l^{(2)}$ en f_l y g_l. El empleo de los escalares $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}$ permite establecer la relación entre las fuentes ρ, $\boldsymbol{J}$ y los coeficientes multipolares $a_E(l, m)$ y $a_M(l, m)$ con relativa facilidad (véase la sección 16.5).

16.3. PROPIEDADES DE LOS CAMPOS MULTIPOLARES; ENERGIA Y MOMENTO CINETICO DE LA RADIACION MULTIPOLAR

Antes de considerar la conexión entre la solución general [16.46] y una distribución localizada de fuentes, vamos a examinar las propiedades de los campos multipolares individuales [16.40] y [16.42]. En la zona próxima ($kr \ll 1$) la función radial $f_l(kr)$ es proporcional a n_l, dado por [16.12], a menos que su coeficiente sea idénticamente nulo. Excluida esta posibilidad, el comportamiento límite de la inducción magnética para un multipolo eléctrico (l, m) es

$$\boldsymbol{B}^{(E)}_{lm} \to -\frac{k}{cl}\boldsymbol{L}\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}} \qquad [16.48]$$

en donde se ha elegido el coeficiente de proporcionalidad por razones de conveniencia que veremos a continuación. Para calcular el campo eléctrico debemos tomar el rotacional del segundo miembro. Resulta útil la identidad operacional

$$i\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\nabla^2 - \boldsymbol{\nabla}\left(1 + r\frac{\partial}{\partial r}\right) \qquad [16.49]$$

El campo eléctrico [16.42] es

$$\boldsymbol{E}^{(E)}_{lm} \to \frac{-ic}{l}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{L}\left(\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}\right) \qquad [16.50]$$

Como (Y_{lm}/r^{l+1}) es una solución de la ecuación de Laplace, el primer término de [16.49] se anula. Por tanto, a distancias pequeñas, el campo eléctrico del multipolo eléctrico (l, m) es

$$\boldsymbol{E}^{(E)}_{lm} \to -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}\right) \qquad [16.51]$$

Este es exactamente el campo electrostático multipolar de la sección 4.1. Observemos que la inducción magnética $\boldsymbol{B}_{lm}$ es en módulo menor que $\boldsymbol{E}_{lm}$ en un factor kr/c. Por tanto, en la zona próxima, $c\boldsymbol{B}_{lm}$ de un multipolo eléctrico es siempre mucho más pequeño que el campo eléctrico. Cuando se trata de los campos multipolares magnéticos [16.40], los papeles de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ están intercambiados, según la transformación

$$\boldsymbol{E}^{(E)} \to -c\boldsymbol{B}^{(M)} \qquad \boldsymbol{B}^{(E)} \to \boldsymbol{E}^{(M)}/c \tag{16.52}$$

En la zona lejana o de radiación ($kr \gg 1$) los campos multipolares dependen de las condiciones de contorno que se impongan. Para fijar ideas vamos a considerar el ejemplo de ondas progresivas salientes, adecuadas a la radiación por una fuente localizada. En tal caso, la función radial $f_l(kr)$ es proporcional a la función de Hankel esférica $h_l^{(1)}(kr)$. Partiendo de la forma asintótica [16.13], vemos que en la zona de radiación la inducción magnética correspondiente a un multipolo eléctrico (l, m) se comporta como

$$\boldsymbol{B}_{lm}^{(E)} \to (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \boldsymbol{L}Y_{lm} \tag{16.53}$$

con lo que el campo eléctrico se puede expresar:

$$\boldsymbol{E}_{lm}^{(E)} \to \frac{(-i)^l c}{k^2} \left[\nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \boldsymbol{L}Y_{lm} + \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times \boldsymbol{L}Y_{lm} \right] \tag{16.54}$$

Como ya hemos utilizado la forma asintótica de la función de Hankel esférica, no estamos autorizados a considerar potencias de $(1/r)$ mayores que la primera. Con esta restricción, y haciendo uso de la identidad [16.49], hallamos

$$\boldsymbol{E}_{lm}^{(E)} = -(-i)^{l+1} \frac{ce^{ikr}}{kr} \left[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{L}Y_{lm} - \frac{1}{k} (\boldsymbol{r}\nabla^2 - \nabla) Y_{lm} \right] \tag{16.55}$$

en donde $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{r}/r)$ es un vector unitario en la dirección radial. El segundo término es evidentemente $1/kr$ veces una cierta función angular adimensional y se puede omitir en el límite $kr \gg 1$. Así, tenemos que el campo eléctrico en la zona de radiación es

$$\boldsymbol{E}_{lm}^{(E)} = c\boldsymbol{B}_{lm}^{(E)} \times \boldsymbol{n} \tag{16.56}$$

en donde $\boldsymbol{B}_{lm}$ viene dado por [16.53]. Estos campos son campos típicos de radiación, transversales al radio vector y decrecientes según r^{-1}. Para multipolos magnéticos simplemente haremos los intercambios dados por [16.52].

Para calcular la energía y el momento cinético que transporta la radiación pueden emplearse los campos multipolares de una fuente radiante. Para concretar, consideraremos una superposición lineal de multipolos eléctricos (l, m) con valores diferentes de m, pero todos con el mismo valor de l, y, de acuerdo con [16.46], escribiremos los campos en la forma:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B}_l &= \sum_m a_E(l, m) \boldsymbol{X}_{lm} h_l^{(1)}(kr) e^{-i\omega t} \\ \boldsymbol{E}_l &= \frac{ic}{k} \nabla \times \boldsymbol{B}_l \end{aligned}\right\} \tag{16.57}$$

Para campos que varíen armónicamente, la densidad de energía media temporal es:

$$u=\frac{\epsilon_0}{4}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*+c^2\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^*) \qquad [16.58]$$

En la zona de radiación los dos términos son iguales. Como consecuencia, la energía existente en una capa esférica comprendida entre r y $(r+dr)$ (cuando $kr\gg 1$) es:

$$dU=\frac{dr}{2\mu_0 k^2}\sum_{mm'} a_E^*(l,m')a_E(l,m)\int \boldsymbol{X}_{lm'}^*\cdot\boldsymbol{X}_{lm}\,d\Omega \qquad [16.59]$$

en la que se ha utilizado la forma asintótica [16.13] de la función de Hankel esférica. Con la integral de ortogonalidad [16.44] esta expresión se convierte en:

$$\frac{dU}{dr}=\frac{1}{2\mu_0 k^2}\sum_m |a_E(l,m)|^2 \qquad [16.60]$$

que no depende del radio. Cuando se trate de la superposición general de multipolos eléctricos y magnéticos la suma sobre m se convierte en una suma sobre l y m, y $|a_E|^2$ se convierte en $|a_E|^2+|a_M|^2$. La energía total en una capa esférica en la zona de radiación es, pues, una *suma incoherente* extendida a todos los multipolos.

La media temporal de la densidad de momento cinético es

$$\boldsymbol{m}=\frac{\epsilon_0}{2}\,\mathrm{Re}\,[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*)] \qquad [16.61]$$

Podemos desarrollar el producto vectorial triple y sustituir el campo eléctrico por [16.57], con lo que se obtiene, para una superposición de multipolos eléctricos:

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\,[\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{B})] \qquad [16.62]$$

Entonces, el momento cinético en la capa esférica entre r y $(r+dr)$ en la zona de radiación es

$$d\boldsymbol{M}=\frac{dr}{2\mu_0\omega k^2}\,\mathrm{Re}\sum_{m,m'} a_E^*(l,m')a_E(l,m)\int(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{X}_{lm'})^*\boldsymbol{X}_{lm}\,d\Omega \qquad [16.63]$$

Si sustituimos $\boldsymbol{X}_{lm}$ por su forma explícita [16.43], la anterior expresión puede escribirse:

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dr}=\frac{1}{2\mu_0\omega k^2}\,\mathrm{Re}\sum_{m,m'} a_E^*(l,m')a_E(l,m)\int Y_{lm'}^*\boldsymbol{L}Y_{lm}\,d\Omega \qquad [16.64]$$

Por las propiedades de $\boldsymbol{L}Y_{lm}$ que se dan en [16.28], y la ortogonalidad de los armónicos esféricos, obtenemos las expresiones siguientes para las componen-

tes cartesianas de dM/dr:

$$\frac{dM_x}{dr}=\frac{1}{4\mu_0\omega k^2}\operatorname{Re}\sum_m [\sqrt{(l-m)(l+m+1)}a_E^*(l, m+1) + \sqrt{(l+m)(l-m+1)}a_E^*(l, m-1)]a_E(l, m) \quad [16.65]$$

$$\frac{dM_y}{dr}=\frac{1}{4\mu_0\omega k^2}\operatorname{Im}\sum_m [\sqrt{(l-m)(l+m+1)}a_E^*(l, m+1) - \sqrt{(l+m)(l-m+1)}a_E^*(l, m-1)]a_E(l, m) \quad [16.66]$$

$$\frac{dM_z}{dr}=\frac{1}{2\mu_0\omega k^2}\sum_m m|a_E(l, m)|^2 \quad [16.67]$$

Estas ecuaciones demuestran que para un multipolo eléctrico genérico de orden l que consiste en una superposición de valores diferentes de m sólo es relativamente simple la expresión de la componente z del momento cinético.

Para un multipolo con un solo valor de m, se anulan M_x y M_y, en tanto que, comparando [16.67] con [16.60] se observa que

$$\frac{dM_z}{dr}=\frac{m}{\omega}\frac{dU}{dr} \quad [16.68]$$

independientemente de r. Este hecho tiene la interpretación cuántica obvia de que la radiación de un multipolo de orden (l, m) transporta $m\hbar$ unidades de componente z de momento cinético por fotón de energía $\hbar\omega$. Aun cuando exista superposición de valores diferentes de m, se mantiene la misma interpretación de [16.67]. Cada multipolo de valor definido m contribuye a compartir *incoherentemente* la componente z del momento cinético. Sin embargo, ahora las componentes x e y no se anulan en general y los multipolos de valores m consecutivos contribuyen a una suma coherente con cierto peso. El comportamiento, contenido en [16.64], y que aparece explícitamente en [16.65]-[16.67] resulta familiar en la mecánica cuántica de un operador vectorial y su representación con respecto a los estados de base J^2 y J_z *. El momento cinético de los campos multipolares ofrece un ejemplo clásico de este comportamiento, siendo la componente z diagonal en la base multipolar (l, m) y las componentes x e y no.

Las características del momento cinético que acabamos de presentar resultan ciertas en general, aun cuando nuestro ejemplo [16.57] constituye un caso particular. Cuando se trate de una superposición de ambos multipolos, eléctricos y magnéticos, con valores distintos de (l, m), la expresión del momento cinético [16.63] se generaliza a:

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dr}=\frac{1}{2\mu_0\omega k^2}\operatorname{Re}\sum_{\substack{l,m\\ l',m'}}\left\{[a_E^*(l', m')a_E(l, m)+a_M^*(l', m')a_M(l, m)]\int(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{X}_{l'm'})^*\times\boldsymbol{em}\,d\Omega + [a_E^*(l', m')a_M(l, m)-a_M^*(l', m')a_E(l, m)]\int(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{X}_{l'm'})\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{X}_{lm}\,d\Omega\right\} \quad [16.69]$$

* Véase, por ejemplo, E. U. CONDON y G. H. SHORTLEY, *The theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press (1953), pág. 63.

El primer término de [16.69] es de la misma forma que [16.63] y representa la suma de los multipolos eléctrico y magnético separadamente. El segundo término constituye una interferencia entre los multipolos eléctrico y magnético. Al examinar la estructura de su integral angular se demuestra que la interferencia se presenta entre multipolos eléctrico y magnético cuyos valores de l difieran en una unidad. Esto es una consecuencia necesaria de las propiedades de paridad de los campos multipolares (véase más adelante). Salvo esta complicación de la interferencia, las propiedades de dM/dr son las mismas que antes.

La interpretación mecanocuántica de [16.68] se refería a la componente z del momento cinético transportado por cada fotón. En analogía adicional con la mecánica cuántica podemos esperar que la relación entre el cuadrado del momento cinético y el cuadrado de la energía tenga el valor:

$$\frac{M^{(q)2}}{U^2}=\frac{(M_x^2+M_y^2+M_z^2)_q}{U^2}=\frac{l(l+1)}{\omega^2} \qquad [16.70]$$

Pero, según [16.60] y [16.65]-[16.67] el resultado clásico para un multipolo (l, m) puro es

$$\frac{M^{(c)2}}{U^2}=\frac{|M_z|^2}{U^2}=\frac{m^2}{\omega^2} \qquad [16.71]$$

La razón para esta diferencia reside en la naturaleza cuántica de los campos electromagnéticos de un fotón único. Si se conoce con precisión la componente z del momento cinético de un solo fotón, el principio de incertidumbre requiere que las otras componentes sean inciertas, con valores cuadráticos medios tales que se cumpla [16.70]. Por otra parte, para un estado del campo de radiación que contenga muchos fotones (el límite clásico)los valores cuadráticos medios de las componentes transversales del momento cinético pueden despreciarse en comparación con el cuadrado de la componente z. Entonces, se aplica el límite clásico [16.71]. Para un campo multipolar (l, m) que contenga N fotones puede demostrarse * que:

$$\frac{[M^{(q)}(N)]^2}{[U(N)]^2}=\frac{N^2m^2+Nl(l+1)-m^2}{N^2\omega^2} \qquad [16.72]$$

Esta expresión contiene a [16.70] y [16.71] como casos límite.

La interpretación mecanocuántica del momento cinético radiado por fotón por los campos multipolares contiene las reglas de selección para transiciones multipolares entre estados cuánticos. Una transición multipolar de orden (l, m) relacionará un estado cuántico inicial especificado por el momento cinético total J y la componente z, M, con un estado cuántico final con J' en el intervalo $|J-l|\leqslant J'\leqslant J+l$ y con $M'=M-m$. O, alternativamente, entre dos estados (J, M) y (J', M'), las posibles transiciones multipolares tienen valores (l, m) tales que $|J-J'|\leqslant l\leqslant J+J'$ y $m=M-M'$.

* C. MORETTE DE WITT y J. H. D. JENSEN, *Z. Naturforsch.*, 8*a*, 267 (1953). Su tratamiento sigue paralelamente al nuestro, pero con nuestros coeficientes multipolares clásicos $a_E(l, m)$ y $a_M(l, m)$ convertidos en operadores mecanocuánticos de aniquilación de fotones (los complejos conjugados a_E^* y a_M^*, se convierten en operadores hermíticos conjugados de creación).

Para que la especificación mecanocuántica de una transición multipolar quede completa, hay que establecer si las paridades de los estados inicial y final son las mismas o distintas. La paridad del estado inicial es igual al producto de las paridades del estado final y del campo multipolar. Para determinar la paridad de un estado multipolar examinaremos simplemente el comportamiento de la inducción magnética $\boldsymbol{B}_{lm}$ al ser transformada por la simetría respecto al origen ($\boldsymbol{r} \rightarrow -\boldsymbol{r}$). Un modo de ver que $\boldsymbol{B}_{lm}$ especifica la paridad de un campo multipolar consiste en recordar que la interacción entre una partícula cargada y el campo electromagnético es proporcional a $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$. Si $\boldsymbol{B}_{lm}$ tiene una cierta paridad (par o impar) para una transición multipolar, sucede que el correspondiente $\boldsymbol{A}_{lm}$ tiene paridad opuesta, ya que el operador rotacional cambia la paridad. Así, pues, como $\boldsymbol{v}$ es un vector polar impar, las paridades de los estados relacionados por el operador de interacción $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$ diferirán en la paridad de la inducción magnética $\boldsymbol{B}_{lm}$.

Para los multipolos eléctricos, la inducción magnética viene dada por [16.57]. La transformación ($\boldsymbol{r} \rightarrow -\boldsymbol{r}$) equivale a ($r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\phi \rightarrow \phi + \pi$) en coordenadas esféricas. El operador $\boldsymbol{L}$ es invariante en la inversión. Por tanto, las propiedades de paridad de $\boldsymbol{B}_{lm}$ para multipolos eléctricos vienen especificadas por la transformación de $Y_{lm}(\theta, \phi)$. Según [3.53] y [3.50], resulta evidente que la paridad de Y_{lm} es $(-1)^l$. Vemos así que la *paridad* de los campos de *un multipolo eléctrico de orden* (l, m) es $(-1)^l$. La inducción magnética es de paridad $(-1)^l$, mientras que la del campo eléctrico $\boldsymbol{E}_{lm}$ es $(-1)^{l+1}$, ya que $\boldsymbol{E}_{lm} = ic\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}_{lm}/k$.

Para *un multipolo magnético de orden* (l, m), *la paridad* es $(-1)^{l+1}$. En este caso, el campo eléctrico $\boldsymbol{E}_{lm}$ tiene la misma forma que $\boldsymbol{B}_{lm}$ para los multipolos eléctricos. Por tanto, las propiedades de los campos son justamente opuestas a las de un multipolo eléctrico del mismo orden.

Si en las transiciones cuánticas atendemos a los cambios de paridad y a los cambios de momento cinético, vemos que solamente son posibles ciertas combinaciones de transiciones multipolares. Por ejemplo, si los estados tienen $J = \frac{1}{2}$ y $J' = \frac{3}{2}$, los órdenes de los multipolos permitidos son $l = 1, 2$. Si las paridades de los dos estados son las mismas, vemos que la conservación de la paridad restringe las posibilidades de forma que solamente pueden tener lugar transiciones dipolo magnético y cuadrupolo eléctrico. Si los estados son de distinta paridad, puede emitirse o absorberse radiación de dipolo eléctrico y cuadripolo magnético.

16.4. DISTRIBUCION ANGULAR DE LA RADIACION MULTIPOLAR

Para cualquier distribución localizada de fuentes, los campos en la zona de radiación vienen dados por la superposición de

$$\boldsymbol{B} \rightarrow \frac{e^{ikr - i\omega t}}{kr} \sum_{l,m} (-i)^{l+1} [a_E(l, m)\boldsymbol{X}_{lm} + a_M(l, m)\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{X}_{lm}] \qquad [16.73]$$

$$\boldsymbol{E} \rightarrow c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{n}$$

Los coeficientes $a_E(l, m)$ y $a_M(l, m)$ serán relacionados en la sección siguiente

con las propiedades de la fuente. La media temporal de la potencia radiada por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c}{2\mu_0 k^2}\left|\sum_{l,m}(-i)^{l+1}[a_E(l,m)\boldsymbol{X}_{lm}\times\boldsymbol{n}+a_M(l,m)\boldsymbol{X}_{lm}]\right|^2 \qquad [16.74]$$

Dentro de los símbolos de valor absoluto la polarización de la radiación viene especificada por las direcciones de los vectores. Observemos que los multipolos eléctrico y magnético de orden (l, m) dado, presentan la misma dependencia angular, pero tienen polarizaciones perpendiculares la una a la otra. Así, pues, podemos determinar el orden del multipolo midiendo la distribución angular de la potencia radiada, pero el carácter de la radiación (eléctrico o magnético) solamente se puede determinar por una medida de polarización.

Para un multipolo puro de orden (l, m), la distribución angular [16.74] se reduce a un solo término:

$$\frac{dP(l,m)}{d\Omega}=\frac{c}{2\mu_0 k^2}|a(l,m)|^2|\boldsymbol{X}_{lm}|^2 \qquad [16.75]$$

Según la definición [16.43] de $\boldsymbol{X}_{lm}$ y por las propiedades [16.28], podemos transformar la expresión anterior en la forma explícita:

$$\frac{dP(l,m)}{d\Omega}=\frac{c|a(l,m)|^2}{2\mu_0 k^2 l(l+1)}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}(l-m)(l+m+1)|Y_{l,m+1}|^2\\+\frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)|Y_{l,m-1}|^2+m^2|Y_{lm}|^2\end{array}\right\} \qquad [16.76]$$

En la tabla aparecen algunas de las distribuciones angulares más sencillas:

$$|\boldsymbol{X}_{lm}(\theta,\phi)|^2$$

l	m		
	0	±1	±2
1 Dipolo	$\frac{3}{8\pi}\operatorname{sen}^2\theta$	$\frac{3}{16\pi}(1+\cos^2\theta)$	
2 Cuadripolo	$\frac{15}{8\pi}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$	$\frac{5}{16\pi}(1-3\cos^2\theta+4\cos^4\theta)$	$\frac{5}{16\pi}(1-\cos^4\theta)$

Vemos que las distribuciones dipolares son las de un dipolo oscilante paralelo al eje z $(m=0)$ y de dos dipolos, uno a lo largo del eje x y otro a lo largo del eje y, defasados en 90° $(m=\pm1)$. En la figura 16.1 se representan las distribuciones angulares dipolar y cuadrupolar como diagramas polares de intensidad. Se representan para $l=1$ y $l=2$, aunque, en general, en una distribución multipolar de orden l intervenga una superposición coherente de las $(2l+1)$ amplitudes correspondientes a los distintos valores de m, tal como se presenta en [16.74].

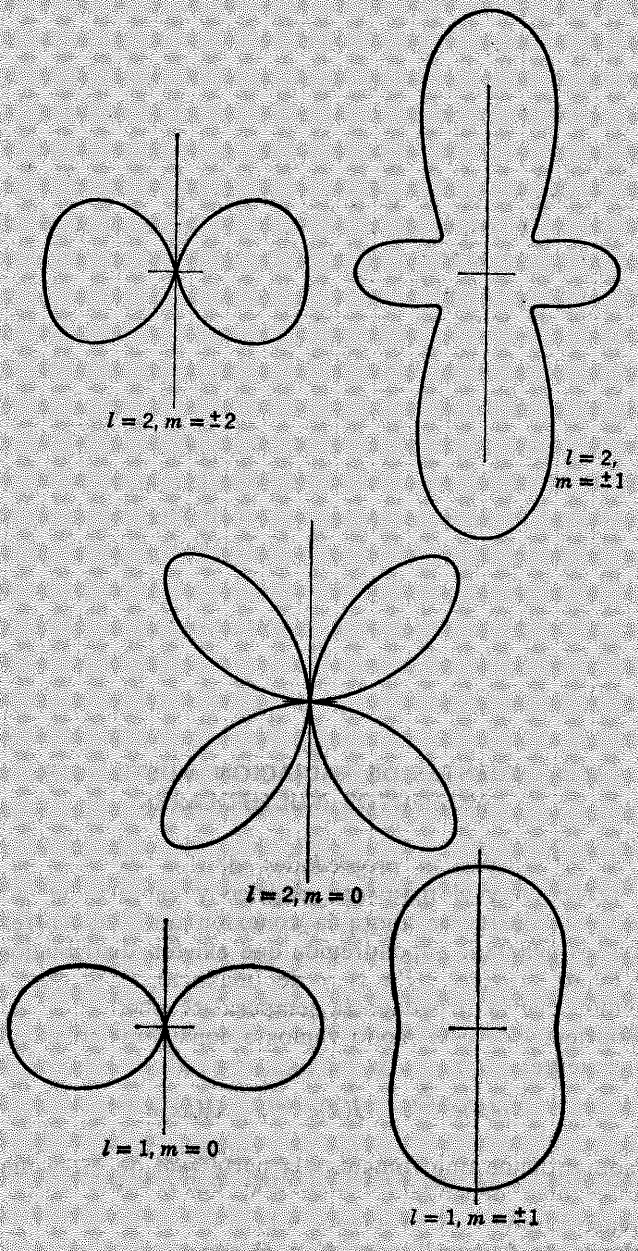


FIG. 16.1. **Diagramas de radiación dipolar y cuadrupolar para multipolos (l, m) puros.**

Por medio de [3.69] se puede demostrar que la suma de los cuadrados de los módulos de los armónicos esféricos vectoriales obedecen la regla de adición:

$$\sum_{m=-l}^{l} |\boldsymbol{X}_{lm}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \qquad [16.77]$$

Por tanto, la distribución de radiación será isótropa cuando proceda de una fuente consistente en un conjunto de multipolos de orden l, de coeficientes $a(l, m)$ independientes de m, y superpuestos de forma no coherente. Generalmente, prevalece esta situación en las transiciones radiativas atómicas y nucleares, a menos que el estado inicial haya sido preparado de forma especial.

La potencia total radiada por un multipolo puro de orden (l, m) se obtiene integrando [16.75] respecto de todos los ángulos. Como los $\boldsymbol{X}_{lm}$ están normalizados a la unidad, la potencia radiada es

$$P(l, m) = \frac{c}{2\mu_0 k^2} |a(l, m)|^2 \qquad [16.78]$$

Para una fuente cualquiera la distribución angular viene dada por la suma coherente [16.74]. Al integrar respecto de todos los ángulos se demuestra fácilmente que los términos de interferencia no contribuyen. Por tanto, la potencia total radiada es precisamente una suma no coherente de las contribuciones debidas a los distintos multipolos:

$$P = \frac{c}{2\mu_0 k^2} \sum_{l,m} [|a_E(l, m)|^2 + |a_M(l, m)|^2] \qquad [16.79]$$

16.5. FUENTES DE RADIACION MULTIPOLAR; MOMENTOS MULTIPOLARES

Habiendo discutido ya las propiedades de los campos multipolares, los diagramas de radiación y el momento cinético y energía que acompañan a la radiación, vamos a considerar ahora la conexión que hay entre los campos y las fuentes que los generan. Supondremos que existen distribuciones localizadas de carga $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, de corriente $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$ y de imanación intrínseca $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}, t)$. Además, supondremos que la dependencia temporal se puede analizar en sus componentes de Fourier, y de este modo vamos a considerar solamente fuentes que varían armónicamente:

$$\rho(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathcal{M}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} \qquad [17.80]$$

en donde se sobrentiende que tomamos la parte real de estas magnitudes complejas. Cualquier otra dependencia temporal puede obtenerse por superposición lineal (véase también el problema 9.1).

Las ecuaciones de Maxwell para $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 & \nabla \times \boldsymbol{E} - i\omega \boldsymbol{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \boldsymbol{B} + \frac{ik}{c} \boldsymbol{E} &= \mu_0(\boldsymbol{J} + \nabla \times \mathcal{M}) \end{aligned}\right\} \qquad [16.81]$$

con la ecuación de continuidad:

$$i\omega\rho = \nabla \cdot \boldsymbol{J} \qquad [16.82]$$

Resulta conveniente tratar con campos sin divergencia. Por consiguiente, utilizaremos como variables de campo $\boldsymbol{B}$ y

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{i}{\omega\epsilon_0}\boldsymbol{J} \qquad [16.83]$$

En la región exterior a las fuentes, $\boldsymbol{E}'$ se reduce a $\boldsymbol{E}$. En función de estos campos las ecuaciones de Maxwell se escriben:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad & \nabla \times \boldsymbol{E}' - i\omega\boldsymbol{B} = \frac{i}{\omega\epsilon_0}\nabla \times \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E}' = 0 \qquad & \nabla \times \boldsymbol{B} + \frac{ik}{c}\boldsymbol{E}' = \mu_0 \nabla \times \mathcal{M} \end{aligned}\right\} \qquad [16.84]$$

Las ecuaciones que contienen rotacionales pueden combinarse para dar las ecuaciones de ondas no homogéneas de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{B} = -\mu_0 \nabla \times (\boldsymbol{J} + \nabla \times \mathcal{M})$$

y [16.85]

$$(\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{E}' = -i\omega\mu_0 \nabla \times \left(\mathcal{M} + \frac{1}{k^2}\nabla \times \boldsymbol{J}\right)$$

Estas ecuaciones de onda, junto con $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, $\nabla \cdot \boldsymbol{E}' = 0$ y las ecuaciones que dan $\boldsymbol{E}'$ en función de $\boldsymbol{B}$ y viceversa, son las equivalentes, cuando hay fuentes presentes, a las [16.32] y [16.33].

Como los coeficientes multipolares en [16.46] están determinados de acuerdo con [16.47] a partir de los escalares $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}'$, resulta suficiente considerar ecuaciones de onda para ellos, en lugar de para los vectores campo $\boldsymbol{E}'$ y $\boldsymbol{B}$. Partiendo de [16.34], [16.85] y la relación vectorial $\boldsymbol{r} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{r} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{A} = -i\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{A}$, válida para cualquier campo vectorial $\boldsymbol{A}$, hallamos las ecuaciones de onda no homogéneas:

$$\left.\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B} &= -\mu_0 i\boldsymbol{L} \cdot (\boldsymbol{J} + \nabla \times \mathcal{M}) \\ (\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}' &= \mu_0 \omega \boldsymbol{L} \cdot \left(\mathcal{M} + \frac{1}{k^2}\nabla \times \boldsymbol{J}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [16.86]$$

Las soluciones de estas ecuaciones de onda escalares se siguen directamente del desarrollo de la sección 6.6. Con la condición de contorno de que sean ondas salientes en el infinito, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{L}' \cdot [\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \nabla' \times \mathcal{M}(\boldsymbol{x}')]\, d^3x' \\ \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}) &= -\frac{\mu_0 ck}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{L}' \cdot \left[\mathcal{M}(\boldsymbol{x}') + \frac{1}{k^2}\nabla' \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\right] d^3x' \end{aligned}\right\} \qquad [16.87]$$

Observemos primero, para calcular los coeficientes multipolares por medio de [16.47], que el requisito de que en el infinito sean ondas hacia fuera hace $A_l^{(2)}=0$ en [16.37]. Así, pues, escogeremos $f_l(kr)=g_l(kr)\propto h_l^{(1)}(kr)$ en [16.46] como representación de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ fuera de las fuentes. A continuación, consideramos la representación mediante ondas esféricas [16.22] de la función de Green en [16.87] y suponemos que el punto $\boldsymbol{x}$ se encuentra fuera de una superficie esférica que encierra completamente las fuentes. Entonces en las integraciones que aparecen en [16.87], $r_<=r'$ y $r_>=r$. La proyección de ondas esféricas necesaria para [16.47] es:

$$\int d\Omega\, Y_{lm}^*(\theta,\phi)\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=4\pi ik\,h_l^{(1)}(kr)j_l(kr')Y_{lm}^*(\theta',\phi') \qquad [16.88]$$

Por medio de esta proyección vemos que $a_M(l,m)$ y $a_E(l,m)$ vienen dados en función de los integrandos de [16.87] por:

$$\begin{aligned} a_E(l,m)&=\frac{\mu_0 ik^3}{\sqrt{l(l+1)}}\int j_l(kr)Y_{lm}^*\boldsymbol{L}\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{M}}+\frac{1}{k^2}\nabla\times\boldsymbol{J}\right)d^3x \\ a_M(l,m)&=-\frac{\mu_0 k^2}{\sqrt{l(l+1)}}\int j_l(kr)Y_{lm}^*\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{J}+\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{M}})\,d^3x \end{aligned} \qquad [16.89]$$

Las expresiones [16.89] dan las intensidades de los distintos campos multipolares fuera de la fuente en función de integrales extendidas a las densidades de fuentes $\boldsymbol{J}$ y $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Pueden transformarse en otras formas más útiles por medio de las identidades siguientes: Sea $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ cualquier campo vectorial de buen comportamiento. Entonces:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}&=i\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}) \\ \boldsymbol{L}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})&=i\nabla^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A})-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \end{aligned} \qquad [16.90]$$

Estas se deducen de la definición [16.25] de $\boldsymbol{L}$ y de identidades vectoriales simples. Si en la primera ecuación hacemos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\mathcal{M}}$ y en la segunda $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}$, la integral de $a_E(l,m)$ en [16.89] se convierte en:

$$a_E(l,m)=-\frac{\mu_0 k^3}{\sqrt{l(l+1)}}\int j_l(kr)Y_{lm}^*\left[\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\mathcal{M}})+\frac{1}{k^2}\nabla^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{J})-\frac{i}{k}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho)\right]d^3x$$

en la que hemos hecho uso de [16.82] para expresar $\nabla\cdot\boldsymbol{J}$ en función de ρ. Integrando por partes se reemplaza ∇^2 por $-k^2$ en el segundo término, mientras que la integración radial por partes en el tercer término convierte la derivada radial en la función esférica de Bessel. El resultado para el *coeficiente eléctrico multipolar* es:

$$a_E(l,m)=\frac{\mu_0 k^2}{i\sqrt{l(l+1)}}\int Y_{lm}^*\left\{\begin{array}{c} c\rho\dfrac{\partial}{\partial r}[rj_l(kr)]+ik\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{J})j_l(kr) \\ -ik\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\mathcal{M}})j_l(kr)\end{array}\right\}d^3x \qquad [16.91]$$

Una manipulación análoga de la segunda ecuación de las [16.89] conduce al

coeficiente magnético multipolar:

$$a_M(l, m) = \frac{\mu_0 k^2}{i\sqrt{l(l+1)}} \int Y^*_{lm} \left\{ \begin{array}{c} \nabla \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J}) j_l(kr) + \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}} \dfrac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] \\ - k^2 (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}) j_l(kr) \end{array} \right\} d^3x \quad [16.92]$$

Estos resultados son expresiones exactas, válidas para cualquier frecuencia y tamaño de la fuente.

Para muchas aplicaciones en física atómica y nuclear, las dimensiones de la fuente son muy pequeñas frente a una longitud de onda ($kr_{\text{máx}} \ll 1$). De este modo, pueden simplificarse los coeficientes multipolares de forma considerable. Se puede utilizar para las funciones de Bessel esféricas el límite [16.12] para pequeños argumentos. Si en los términos en que aparece ρ o $\boldsymbol{J}$ y $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ conservamos solamente las potencias más pequeñas de kr, nos encontramos con que el coeficiente del multipolo eléctrico es aproximadamente

$$a_E(l, m) \simeq \frac{\mu_0 c k^{l+2}}{i(2l+1)!!} \left(\frac{l+1}{l} \right)^{1/2} (Q_{lm} + Q'_{lm}) \quad [16.93]$$

en donde los momentos multipolares son:

$$\left. \begin{array}{l} Q_{lm} = \displaystyle\int r^l Y^*_{lm} \rho \, d^3x \\ \text{y} \\ Q'_{lm} = \dfrac{-ik}{c(l+1)} \displaystyle\int r^l Y^*_{lm} \nabla \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\mathcal{M}}) \, d^3x \end{array} \right\} \quad [16.94]$$

Se observa que el momento Q_{lm} tiene la misma forma que el momento multipolar electrostático q_{lm} [4.3]. El momento Q'_{lm} es un momento multipolar eléctrico inducido debido a la imanación. Generalmente es más pequeño que el momento normal Q_{lm}, por lo menos en un factor kr. Para el coeficiente multipolar magnético $a_M(l, m)$, la aproximación correspondiente para las longitudes de onda largas es

$$a_M(l, m) \simeq \frac{\mu_0 i k^{l+2}}{(2l+1)!!} \left(\frac{l+1}{l} \right)^{1/2} (M_{lm} + M'_{lm}) \quad [16.95]$$

en la que los momentos magnéticos multipolares son:

$$\left. \begin{array}{l} M_{lm} = -\dfrac{1}{l+1} \displaystyle\int r^l Y^*_{lm} \nabla \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J}) \, d^3x \\ \text{y} \\ M'_{lm} = -\displaystyle\int r^l Y^*_{lm} \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}} \, d^3x \end{array} \right\} \quad [16.96]$$

En contraste con lo que ocurre con los momentos multipolares eléctricos Q_{lm} y Q'_{lm}, para un sistema con imanación intrínseca los momentos magnéticos M_{lm} y M'_{lm} son, generalmente, del mismo orden de magnitud.

En el límite de longitudes de onda largas vemos claramente el hecho de que los campos multipolares eléctricos están relacionados con la densidad de

carga eléctrica ρ, mientras que los campos multipolares magnéticos vienen determinados por las densidades de momento magnético $(1/2)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J})$ y $\mathcal{M}$.

16.6. RADIACION MULTIPOLAR EN SISTEMAS ATOMICOS Y NUCLEARES

Aunque para una discusión completa se requiera un tratamiento mecanocuántico adecuado de los estados * que intervienen, los aspectos de la radiación multipolar en átomos y en núcleos se pueden exponer con argumentos sencillos. Según [16.78] y los coeficientes multipolares [16.93] y [16.95], la potencia total radiada por un multipolo de orden (l, m) es

$$\left.\begin{aligned} P_E(l,m) &= \frac{\mu_0 c^3}{2[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{l+1}{l}\right)k^{2l+2}\,|Q_{lm}+Q'_{lm}|^2 \\ P_M(l,m) &= \frac{\mu_0 c}{2[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{l+1}{l}\right)k^{2l+2}\,|M_{lm}+M'_{lm}|^2 \end{aligned}\right\} \qquad [16.97]$$

En términos mecanocuánticos nos interesa la probabilidad de transición (recíproco de la vida media), que se define como la potencia dividida por la energía de un fotón:

$$\frac{1}{\tau}=\frac{P}{\hbar\omega} \qquad [16.98]$$

Como solamente estamos interesados en estimaciones del orden de magnitud, tomamos el siguiente modelo esquemático de la fuente. Suponemos que la densidad de carga oscilante es

$$\rho(x)=\begin{cases} \dfrac{3e}{a^3}\,Y_{lm}(\theta,\phi), & r<a \\ 0, & r>a \end{cases} \qquad [16.99]$$

Así, tenemos que una estimación del momento multipolar eléctrico Q_{lm} es

$$Q_{lm}\simeq\frac{3}{l+3}\,ea^l \qquad [16.100]$$

sin depender para nada de m. De modo análogo, supondremos que las formas esquemáticas de las divergencias de la imanación son:

$$\nabla\cdot\mathcal{M}+\frac{1}{l+1}\,\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J})=\begin{cases} \dfrac{2g}{a^3}\,Y_{lm}(\theta,\phi)\left(\dfrac{e\hbar}{mr}\right), & r<a \\ 0, & r>a \end{cases} \qquad [16.101]$$

* En BLATT y WEISSKOPF, págs. 597-599, pueden verse las definiciones mecanocuánticas de los momentos multipolares. Préstese atención a los factores 2 en que difieren nuestros momentos de los suyos, debido a sus definiciones de las densidades de fuentes [3.1] y [3.2] de la pág. 590, al compararlas con las nuestras [16.80]. Véase el problema 9.1 en lo que se refiere a la relación entre las formas factorizadas de [16.80] y las fuentes clásicas $\rho(x, t)$, etc.

en donde g es el factor efectivo que aparece en los momentos magnéticos de las partículas en átomos o sistemas nucleares, y $e\hbar/m$ es el doble del magnetón de Bohr para dichas partículas. Así, una estimación de la suma de los momentos multipolares magnéticos es

$$M_{lm} + M'_{lm} \simeq -\frac{2}{l+2} ea^l \left(\frac{g\hbar}{ma}\right) \qquad [16.102]$$

De la definición de Q'_{lm} [16.94] vemos que

$$Q_{lm} \simeq g\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right) Q_{lm} \qquad [16.103]$$

Como las energías de las transiciones radiativas en átomos y núcleos son siempre muy pequeñas frente a las restantes energías de las partículas que intervienen, Q'_{lm} siempre resulta completamente despreciable frente a Q_{lm}.

En las transiciones multipolares eléctricas de orden l, la estimación [16.100] nos lleva a la probabilidad de transición [16.98]:

$$\frac{1}{\tau_E(l)} \simeq \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right) \frac{2\pi}{[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{l+1}{l}\right) \left(\frac{3}{l+3}\right)^2 (ka)^{2l}\omega \qquad [16.104]$$

Prescindiendo de factores del orden de la unidad, la probabilidad de transición para los multipolos magnéticos es, de acuerdo con [16.102]:

$$\frac{1}{\tau_M(l)} \simeq \left(\frac{g\hbar}{mca}\right)^2 \frac{1}{\tau_E(l)} \qquad [16.105]$$

La presencia del factor $(ka)^{2l}$ en la probabilidad de transición [16.104] significa que en el límite de las longitudes de onda largas ($ka \ll 1$), la velocidad de transición decrece rápidamente al aumentar el orden del multipolo para una frecuencia fija. Por tanto, en una transición atómica o nuclear el multipolo más bajo no nulo será generalmente el único de importancia. La razón de probabilidades de transición para órdenes sucesivos del multipolos eléctricos o magnéticos de la misma frecuencia es

$$\frac{[\tau(l+1)]^{-1}}{[\tau(l)]^{-1}} \sim \frac{(ka)^2}{4l^2} \qquad [16.106]$$

en donde hemos omitido los factores numéricos de orden relativo $(1/l)$.

En los sistemas atómicos las partículas que intervienen en el proceso de radiación son los electrones. Las dimensiones de la fuente pueden considerarse como $a \sim (a_0/Z_{ef})$, en donde a_0 es el radio de Bohr y Z_{ef} es una carga nuclear efectiva ($Z_{ef} \sim 1$ para las transiciones por los electrones de valencia; $Z_{ef} \lesssim Z$ para las transiciones de rayos X). En la estimación de ka observemos que la energía de la transición atómica es generalmente del orden de

$$\hbar\omega \lesssim Z_{ef}^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \qquad [16.107]$$

así que

$$ka \lesssim \frac{Z_{ef}}{137} \qquad [16.108]$$

Vemos por [16.106] que los sucesivos multipolos están en la razón $(Z_{ef}/137)^2$. La razón entre las velocidades de transición de multipolo magnético y eléctrico se puede estimar a partir de [16.105]. El factor g para los electrones es del orden de la unidad. Con

$$a \simeq a_0/Z_{ef} = 137\,(\hbar/mcZ_{ef}),$$

vemos que la velocidad de transición del multipolo magnético l es más pequeña que la del multipolo eléctrico correspondiente, en un factor $(Z_{ef}/137)^2$. Concluimos, pues, que en los átomos las transiciones más intensas son las de dipolo eléctrico, siendo las transiciones cuadrupolar eléctrica y dipolar magnética más débiles en un factor $(Z_{ef}/137)^2$. Solamente con las transiciones de rayos X en elementos pesados se presenta la posibilidad de que compitan otros multipolos distintos del eléctrico de menor orden.

Pasamos ahora a considerar las transiciones radiativas en núcleos atómicos. Como las energías de transición radiativa nucleares varían ampliamente (desde ~ 10 KeV hasta varios MeV), los valores de ka cubren un intervalo amplio. Significa esto que, dado el orden de un multipolo, las probabilidades de transición (o vidas medias) presentarán variaciones en varias potencias de 10, según sea la energía liberada, existiendo solapamiento de los multipolos a cada lado. A pesar de todo, resultan útiles, al catalogar las transiciones multipolares nucleares, las estimaciones groseras [16.104] y [16.105], ya que, para una *liberación de energía fija,* las estimaciones para distintos multipolos difieren mucho.

La figura 16.2 nos da una representación doble logarítmica de la estimación [16.104] de los tiempos de vida media de las transiciones multipolares eléctricas, utilizando e como carga protónica y $a \simeq 5{,}6 \cdot 10^{-13}$ cm. Este es un radio nuclear adecuado al número másico $A \sim 100$. Vemos que, aunque las curvas tienden a ser convergentes a energía elevada, las vidas medias para los distintos multipolos, a la misma energía, difieren generalmente en factores de 10^5. Quiere esto decir que los momentos multipolares reales en las transiciones individuales pueden presentar desviaciones grandes respecto de nuestras estimaciones, sin que por ello dejen de ser válidas estas estimaciones como guía al asignar órdenes de multipolos. Experimentalmente *, el diagrama vida media frente a energía presenta bandas anchas, pero bien definidas, que se encuentran en las proximidades de las líneas rectas de la figura 16.2. Hay una tendencia general a que la estimación [16.104] sirva de cota inferior de la vida media, correspondiendo a [16.100] el papel de cota superior del momento multipolar, pero para ciertas transiciones cuadripolares eléctricas llamadas «intensificadas» las vidas medias pueden ser hasta cien veces más cortas que las que aparecen en la figura 16.2.

Los multipolos magnético y eléctrico del mismo orden pueden compararse mediante [16.105]. Para los nucleones un valor típico del factor g efectivo es del orden de $g \sim 3$, a causa de sus momentos magnéticos anómalos. Así, uti-

* Véanse las figuras 1 y 2 del artículo de M. GOLDHABER y J. WENESER, *Annual Review of Nuclear Science,* vol. 5, ed. J. G. Beckerley, Annual Reviews, Stanford (1955), páginas 1-24.

lizando la estimación del tamaño de la fuente

$$a \simeq R = 1{,}2A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

tenemos:

$$\frac{1}{\tau_M(l)} \sim \frac{0{,}3}{A^{2/3}} \frac{1}{\tau_E(l)} \qquad [16.109]$$

El factor numérico presenta valores entre $4 \cdot 10^{-2}$ y $0{,}8 \cdot 10^{-2}$ para $20 < A < 250$. Así, pues, podemos anticipar que para un orden de multipolo dado las transi-

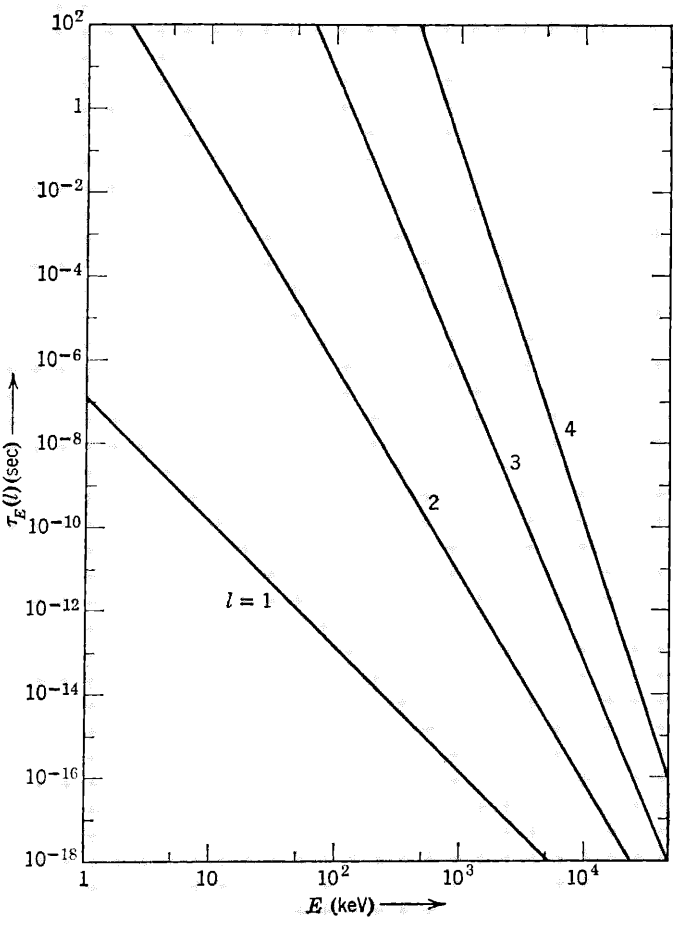


FIG. 16.2. Estimación de los tiempos de vida media de los estados nucleares excitados frente a la emisión de radiación de multipolo eléctrico en función de la energía del fotón para $l=1, 2, 3, 4$.

ciones eléctricas serán entre veinticinco y ciento veinte veces más intensas que las transiciones magnéticas. Esto es generalmente cierto para la mayoría de los multipolos. Pero para $l=1$ se nos presenta en los núcleos una circunstancia especial (fuerzas atractivas intensas independientes de la carga) que inhibe las transi-

ciones dipolares eléctricas (por lo menos a energías pequeñas). En tal caso, la estimación [16.109] deja de ser válida; las transiciones dipolares magnéticas son mucho más corrientes y precisamente tan intensas como las transiciones dipolares eléctricas.

En la sección 16.3 se discutió la paridad y reglas de selección del momento cinético, y se hizo notar que en una transición entre dos estados cuánticos puede presentarse una mezcla de multipolos, tales como el l, $(l+2)$, ... polo magnético y el $(l+1)$, $(l+3)$ ..., polo eléctrico. En el límite de las longitudes de onda largas solamente necesitamos considerar el multipolo más bajo de cada tipo. Podemos combinar las razones [16.105] y [16.106] para obtener las velocidades de transición relativas entre el $(l+1)$ polo eléctrico y el l polo magnético (usado más comúnmente para $l=1$):

$$\frac{[\tau_E(l+1)]^{-1}}{[\tau_M(l)]^{-1}} \simeq \left(\frac{A^{1/3}E}{200l}\right)^2 \qquad [16.110]$$

en donde E es la energía del fotón en MeV. Para las transiciones energéticas en elementos pesados la *amplitud* del cuadrupolo eléctrico es ~ 5 por 100 de la amplitud del dipolo magnético. Si, como de hecho ocurre con las tierras raras y elementos transuránidos, hay una intensificación del momento cuadrupolar efectivo en un factor de 10, la transición cuadrupolar eléctrica compite favorablemente con la transición dipolar magnética.

Para una mezcla de $(l+1)$, polo magnético, y l, polo eléctrico, la razón de velocidades de transición es

$$\frac{[\tau(l_M+1)]^{-1}}{[\tau_E(l)]^{-1}} \simeq \left(\frac{E}{600l}\right)^2 \qquad [16.111]$$

Incluso en las transiciones energéticas, un $(l+1)$, polo magnético, nunca llega a competir con un l, polo eléctrico.

16.7. RADIACION POR UNA ANTENA LINEAL DE ALIMENTACION CENTRAL

Vamos a considerar, como ejemplo del empleo del desarrollo multipolar de una fuente cuyas dimensiones sean comparables con la longitud de onda, la radiación de una antena delgada, lineal, alimentada en su centro, tal como se indica en la figura 16.3. Ya hemos dado en el capítulo 9 una solución directa para los campos cuando se toma para la corriente una distribución sinusoidal. Esta nos servirá como base de comparación para comprobar la convergencia del desarrollo multipolar. Suponemos que la antena yace a lo largo del eje z, entre $-(d/2) \leqslant z \leqslant (d/2)$, y que presenta una pequeña ranura en su centro de forma que se puede excitar debidamente. La corriente a lo largo de la antena se anula en los puntos extremos y es una función par de z. Por el momento no la especificaremos más que poniendo

$$I(z, t) = I(|z|)e^{-i\omega t}, \qquad I\left(\frac{d}{2}\right) = 0 \qquad [16.112]$$

Como la corriente fluye de forma radial, $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J})=0$. Es más, no hay imanación intrínseca; por tanto, todos los coeficientes multipolares magnéticos $a_M(l, m)$ son nulos. Para calcular el coeficiente multipolar eléctrico $a_E(l, m)$ [16.91] necesitamos conocer las expresiones de las densidades de carga y co-

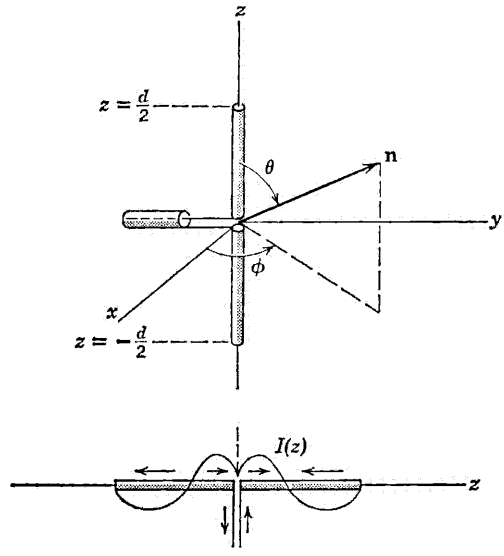


FIG. 16.3. Antena lineal de alimentación central.

rriente. La densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ es radial confinada al eje z. En coordenadas esféricas se puede expresar para $r<(d/2)$:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=\epsilon_r\frac{I(r)}{2\pi r^2}[\delta(\cos\theta-1)-\delta(\cos\theta+1)] \qquad [16.113]$$

en donde las funciones delta hacen que la corriente solamente fluya hacia arriba (o hacia abajo) a lo largo del eje z. Por la ecuación de continuidad [16.78] calculamos la densidad de carga:

$$\rho(\boldsymbol{x})=\frac{1}{i\omega}\frac{dI(r)}{dr}\left[\frac{\delta(\cos\theta-1)-\delta(\cos\theta+1)}{2\pi r^2}\right] \qquad [16.114]$$

Estas expresiones de $\boldsymbol{J}$ y ρ se pueden sustituir en [16.91], con lo que se obtiene:

$$a_E(l, m)=\frac{\mu_0 ck^2}{2\pi\sqrt{l(l+1)}}\int_0^{d/2}dr\left\{\frac{k}{c}rj_l(kr)I(r)-\frac{1}{\omega}\frac{dI}{dr}\frac{d}{dr}[rj_l(kr)]\right\}$$
$$\times\int d\Omega\, Y^*_{lm}[\delta(\cos\theta-1)-\delta(\cos\theta+1)] \qquad [16.155]$$

La integral extendida a todos los ángulos es

$$\int d\Omega=2\pi\delta_{m,0}[Y_{l0}(0)-Y_{l0}(\pi)] \qquad [16.116]$$

lo que nos muestra que sólo aparecen los multipolos $m=0$. Esto resulta evidente dada la simetría cilíndrica de la antena. Los polinomios de Legendre son pares (impares) respecto de $\theta=\pi/2$ para l par (impar). De aquí que los únicos multipolos no nulos tengan l impar. Así, la integral angular toma el valor

$$\int d\Omega = \sqrt{4\pi(2l+1)}, \quad l \text{ impar}, \ m=0 \qquad [16.117]$$

Con ligeras manipulaciones, [16.115] se puede expresar así:

$$a_E(l,0)=\frac{\mu_0 k}{2\pi}\left[\frac{4\pi(2l+1)}{l(l+1)}\right]^{1/2}_0 \int^{d/2}\left\{-\frac{d}{dr}\left[rj_l(kr)\frac{dI}{dr}\right] + rj_l(kr)\left(\frac{d^2I}{dr^2}+k^2I\right)\right\} dr \qquad [16.118]$$

Para calcular [16.118] debemos especificar la corriente $I(z)$ a lo largo de la antena. Si no hubiese radiación, la variación sinusoidal con el tiempo a la frecuencia ω implicaría una variación sinusoidal en el espacio de número de ondas $k=\omega/c$. Pero, como se ha discutido en la sección 9.4, *b)*, la emisión de radiación modifica la distribución de corriente, salvo si la antena es infinitamente delgada. La corriente $I(z)$ correcta sólo puede hallarse resolviendo un problema de condiciones de contorno complicado. Como nuestro propósito en este momento es comparar el desarrollo multipolar con una solución analítica para el caso de una distribución de corriente *conocida*, haremos la misma hipótesis sobre $I(z)$ que en la sección 9.4, *a)*, esto es, que:

$$I(z)=I \operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2}-k|z|\right) \qquad [16.119]$$

en donde I es la corriente máxima, y la fase se ha elegido de forma que la corriente sea nula en los extremos de la antena. Con una corriente sinusoidal se anula la segunda parte del integrando de [16.118]. La primera parte es una diferencial exacta, y por tanto, con $I(z)$ dada por [16.119], se obtiene de forma inmediata:

$$a_E(l,0)=\frac{\mu_0 I}{\pi d}\left[\frac{4\pi(2l+1)}{l(l+1)}\right]^{1/2}\left[\left(\frac{kd}{2}\right)^2 j_l\left(\frac{kd}{2}\right)\right], \quad l \text{ impar} \qquad [16.120]$$

Como estamos pretendiendo probar el desarrollo multipolar cuando las dimensiones de la fuente son comparables a una longitud de onda, vamos a considerar los dos casos especiales de una antena de media onda ($kd=\pi$) y una antena de onda completa ($kd=2\pi$). En la tabla inserta a continuación se da el coeficiente $l=1$ para estos dos valores de kd, y además los valores relativos para $l=3$, 5. En la tabla vemos *a)* que los coeficientes decrecen rápidamente al aumentar l, y *b)* que los coeficientes de mayor l se hacen más importantes cuanto mayores son las dimensiones de la fuente. Pero incluso para la antena de onda completa resulta probablemente adecuado el tomar nada más que $l=1$ y $l=3$ en la distribución angular, elección que es adecuada con toda

certeza en lo que se refiere a la potencia total (en donde aparecen los cuadrados de los coeficientes).

kd	$a_E(1,0)$	$a_E(3,0)/a_E(1,0)$	$a_E(5,0)/a_E(1,0)$
π	$\sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\frac{\mu_0 I}{d}$	$4{,}95\times10^{-2}$	$1{,}02\times10^{-3}$
2π	$\sqrt{6\pi}\,\frac{\mu_0 I}{d}$	0,325	$3{,}09\times10^{-2}$

Si en la distribución angular consideramos solamente los términos de dipolo y octupolo, nos encontramos con que la potencia radiada por unidad de ángulo sólido [16.74] es

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c|a_E(1,0)|^2}{4\mu_0 k^2}\left|\boldsymbol{L}Y_{1,0}-\frac{a_E(3,0)}{\sqrt{6}a_E(1,0)}\boldsymbol{L}Y_{3,0}\right|^2 \qquad [16.121]$$

Los distintos factores que aparecen entre las barras de módulo son:

$$\left.\begin{aligned}|\boldsymbol{L}Y_{1,0}|^2&=\frac{3}{4\pi}\operatorname{sen}^2\theta\\ |\boldsymbol{L}Y_{3,0}|^2&=\frac{63}{16\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,(5\cos^2\theta-1)^2\\ (\boldsymbol{L}Y_{1,0})^*\cdot(\boldsymbol{L}Y_{3,0})&=\frac{3\sqrt{21}}{8\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,(5\cos^2\theta-1)\end{aligned}\right\} \qquad [16.122]$$

Con estos factores angulares la expresión [16.121] se transforma en:

$$\frac{dP}{d\Omega}=\lambda\frac{3I^2}{\pi^3 c\epsilon_0}\left(\frac{3}{8\pi}\operatorname{sen}^2\theta\right)\left|1-\sqrt{\frac{7}{8}}\frac{a_E(3,0)}{a_E(1,0)}(5\cos^2\theta-1)\right|^2 \qquad [16.123]$$

en donde el factor λ es igual a la unidad para la antena de media onda y $(\pi^2/4)$ para la de onda completa. El coeficiente de $(5\cos^2\theta-1)$ en [16.123] es 0,0463 y 0,304 para las antenas de media onda y onda completa, respectivamente.

Por el capítulo 9 sabemos que las distribuciones angulares exactas (para corrientes excitadoras de tipo sinusoidal) son:

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{I^2}{8\pi^2\epsilon_0 c}\begin{cases}\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}, & kd=\pi\\[2ex] 4\dfrac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}, & kd=2\pi\end{cases} \qquad [16.124]$$

En la figura 16.4 se hace una comparación numérica de las distribuciones angulares exacta y aproximada. Las curvas continuas son los resultados exactos, y las de trazos, los desarrollos multipolares de dos términos. En el caso de la antena de media onda (Fig. 16.4, *a*) se representa además en curva punteada la aproximación dipolar (el primer término de [16.123]). El desarrollo multipolar

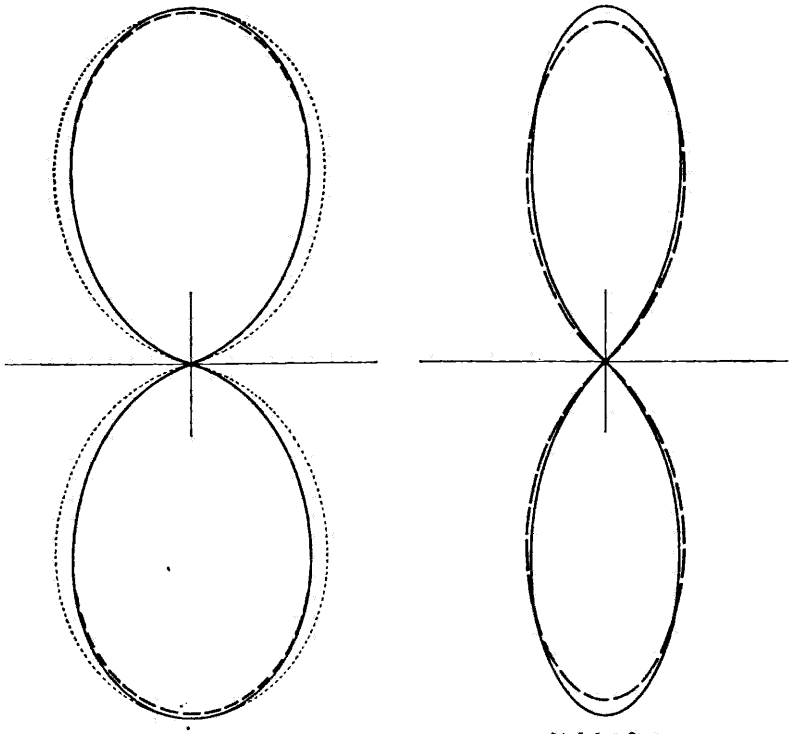


FIG. 16.4. Comparación de los diagramas de radiación exactos (curvas continuas) para las antenas de alimentación central, de media onda ($kd=\pi$) y de onda completa ($kd=2\pi$), con los desarrollos en multipolos hasta dos términos (curvas discontinuas). En la antena de media longitud de onda se incluye también la aproximación dipolar (curva punteada). La aproximación entre el valor exacto y los resultados para dos términos del desarrollo es excelente, en especial para $kd=\pi$.

de dos términos para $kd=\pi$ es casi indistinguible del resultado exacto. Incluso la aproximación de menor orden no anda muy lejos de la solución verdadera. Para la antena de onda completa (Fig. 16.4, *b)* la aproximación dipolar es evidentemente pobre, pero el desarrollo multipolar de dos términos es razonablemente bueno, pues difiere en menos del 5 por 100 en la región de radiación apreciable.

De acuerdo con [16.79], la potencia total radiada es

$$P=\frac{c}{2\mu_0 k^2}\sum_{l\ \text{impar}}|a_E(l,0)|^2 \qquad [16.125]$$

Para la antena de media onda, los resultados que figuran en la tabla de la página 779 demuestran que la potencia radiada es mayor en un factor de 1,00245 que el simple resultado de dipolo ($3I^2/\pi^3\epsilon_0 c$). En el caso de onda completa, la potencia es 1,114 veces mayor que la forma dipolar ($3I^2/4\pi\epsilon_0 c$).

16.8. DESARROLLO EN ONDAS ESFERICAS DE UNA ONDA PLANA VECTORIAL

Resulta muy útil en la discusión de la dispersión o la absorción de radiación electromagnética por objetos esféricos, o sistemas localizados en general, disponer de un desarrollo de una onda electromagnética plana en ondas esféricas.

Si se trata de un campo escalar $\psi(\boldsymbol{x})$ que satisface la ecuación de ondas, se puede obtener el desarrollo que se requiere basándonos en las propiedades de ortogonalidad de las soluciones esféricas básicas $j_l(kr)Y_{lm}(\theta, \phi)$. Otro procedimiento alternativo utiliza el desarrollo [16.22] de la función de Green ($e^{ikR}/4\pi R$) en ondas esféricas. Hacemos que $|\boldsymbol{x}'| \to \infty$ en ambos miembros de [16.22]. Entonces podemos poner $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \simeq r' - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}$ en el primer miembro, siendo $\boldsymbol{n}$ un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{x}'$. En el segundo miembro, $r_> = r'$ y $r_< = r$. Además, podemos utilizar también la forma asintótica [16.13] para expresar $h_l^{(1)}(kr')$. Así, se tiene:

$$\frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} e^{-ik\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}} = ik \frac{e^{ikr'}}{kr'} \sum_{l,m} (-i)^{l+1} j_l(kr) Y^*_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad [16.126]$$

Si en ambos miembros suprimimos el factor $e^{ikr'}/r'$, y tomamos el complejo conjugado, obtenemos el desarrollo de una onda plana:

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(kr) \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') \qquad [16.127]$$

en donde $\boldsymbol{k}$ es el vector de onda de coordenadas esféricas k, θ', ϕ'. Podemos usar el teorema de adición [3.62] para poner esta expresión de forma más compacta:

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\gamma) \qquad [16.128]$$

en donde γ es el ángulo entre $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{x}$. Si para $P_l(\cos\gamma)$ utilizamos la expresión [3.57], puede esto también expresarse así:

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)}\, j_l(kr) Y_{l,0}(\gamma) \qquad [16.129]$$

Ahora deseamos obtener un resultado equivalente para una onda plana polarizada circularmente que incide a lo largo del eje z:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) &= E_0(\boldsymbol{\epsilon}_1 \pm i\boldsymbol{\epsilon}_2) e^{ikz} \\ c\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{\epsilon}_3 \times \boldsymbol{E} = \mp i\boldsymbol{E} \end{aligned}\right\} \qquad [16.130]$$

Como la onda plana es finita en todo punto del espacio, podemos expresar su desarrollo en multipolos [16.47] incluyendo solamente funciones radiales regulares $j_l(kr)$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{l,m}\left[ca_{\pm}(l,m)j_l(kr)\boldsymbol{X}_{lm}+\frac{ic}{k}b_{\pm}(l,m)\nabla\times j_l(kr)\boldsymbol{X}_{lm}\right] \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{l,m}\left[\frac{-i}{k}a_{\pm}(l,m)\nabla\times j_l(kr)\boldsymbol{X}_{lm}+b_{\pm}(l,m)j_l(kr)\boldsymbol{X}_{lm}\right] \end{aligned}\right\} \quad [16.131]$$

Para determinar los coeficientes $a_{\pm}(l,m)$ y $b_{\pm}(l,m)$ utilizaremos las propiedades de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales $\boldsymbol{X}_{lm}$. A efectos de referencia, resumiremos la relación básica [16.44], así como otras relaciones de utilidad:

$$\left.\begin{aligned} &\int [f_l(r)\boldsymbol{X}_{l'm'}]^*\cdot[g_l(r)\boldsymbol{X}_{lm}]\,d\Omega = f_l^* g_l \delta_{ll'}\delta_{mm'} \\ &\int [f_l(r)\boldsymbol{X}_{l'm'}]^*\cdot[\nabla\times g_l(r)\boldsymbol{X}_{lm}]\,d\Omega = 0 \\ &\frac{1}{k^2}\int [\nabla\times f_l(r)\boldsymbol{X}_{l'm'}]^*\cdot[\nabla\times g_l(r)\boldsymbol{X}_{lm}]\,d\Omega = \\ &\qquad = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\left\{f_l^* g_l+\frac{1}{k^2r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[rf_l^*\frac{\partial}{\partial r}(rg_l)\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad [16.132]$$

En estas relaciones, $f_l(r)$ y $g_l(r)$ son combinaciones lineales de funciones de Bessel esféricas, que satisfacen [16.5]. Las relaciones segunda y tercera se pueden demostrar mediante la identidad operacional [16.49], la representación

$$\nabla = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r^2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{L}$$

para el operador gradiente, y la ecuación diferencial radial [16.5].

Para determinar los coeficiente $a_{\pm}(l,m)$ y $b_{\pm}(l,m)$ tomamos el producto escalar de ambos miembros de [16.131] por $\boldsymbol{X}_{lm}^*$ y a continuación integramos respecto de los ángulos. Así, y con la ayuda de la primera y segunda relaciones de ortogonalidad [16.132], obtenemos:

$$ca_{\pm}(l,m)j_l(kr) = \int \boldsymbol{X}_{lm}^*\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\,d\Omega \quad [16.133]$$

y

$$b_{\pm}(l,m)j_l(kr) = \int \boldsymbol{X}_{lm}^*\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\,d\Omega \quad [16.134]$$

Si el campo eléctrico se expresa mediante [16.130], la [16.133] se convierte en

$$a_{\pm}(l,m)j_l(kr) = \frac{E_0}{c}\int \frac{(L_{\mp}Y_{lm})^*}{\sqrt{l(l+1)}}e^{ikz}\,d\Omega \quad [16.135]$$

en donde los operadores $L_{\pm}$ vienen definidos por [16.26], y los resultados obte-

nidos de la aplicación de dichos operadores, por [16.28]. Con esto se obtiene

$$a_{\pm}(l, m)j_l(kr)=\frac{E_0\sqrt{(l\pm m)\,(l\mp m+1)}}{c\sqrt{l(l+1)}}\int Y^*_{l,m\mp1}e^{ikz}\,d\Omega \qquad [16.136]$$

Si en lugar de e^{ikz} sustituimos el desarrollo [16.129], la ortogonalidad de los Y_{lm} nos lleva evidentemente al resultado

$$a_{\pm}(l, m)=i^l\frac{E_0}{c}\sqrt{4\pi(2l+1)}\delta_{m,\pm1} \qquad [16.137]$$

De [16.134] y [16.130] se deduce con claridad que

$$b_{\pm}(l, m)=\mp ia_{\pm}(l, m) \qquad [16.138]$$

Así, el desarrollo en multipolos de la onda plana [16.130] es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})&=E_0\sum_{l=1}^{\infty}i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[j_l(kr)\boldsymbol{X}_{l,\pm1}\pm\frac{1}{k}\nabla\times j_l(kr)\boldsymbol{X}_{l,\pm1}\right]\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})&=\frac{E_0}{c}\sum_{l=1}^{\infty}i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[\frac{-i}{k}\nabla\times j_l(kr)\boldsymbol{X}_{l,\pm1}\mp ij_l(kr)\boldsymbol{X}_{l,\pm1}\right]\end{aligned} \qquad [16.139]$$

Para tal onda polarizada circularmente los valores de $m=\pm1$ tienen la interpretación evidente de ±1 unidad de momento cinético por fotón paralelamente a la dirección de propagación. Esto ya se estableció en los problemas 7.20 y 7.21.

16.9. DISPERSION DE LAS ONDAS ELECTROMAGNETICAS POR UNA ESFERA CONDUCTORA

Si sobre un obstáculo esférico incide una onda plana de radiación electromagnética, como esquemáticamente indica la figura 16.5, es dispersada de forma que, a suficiente distancia del obstáculo, los campos vienen representados por una onda plana más ondas esféricas salientes. Además de dispersión puede haber absorción por el obstáculo. Así, el flujo total de energía que sale del obstáculo será menor que el flujo total de energía que le llega, siendo la diferencia la energía absorbida. Aunque finalmente trataremos el ejemplo sencillo de dispersión por una esfera de radio a y conductividad infinita, por el momento vamos a plantear el problema de modo mucho más general.

Los campos fuera de la esfera pueden escribirse como la suma de ondas incidente y dispersada:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{E}_{\text{inc}}+\boldsymbol{E}_{\text{dis}}\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{B}_{\text{inc}}+\boldsymbol{B}_{\text{dis}}\end{aligned}\right\} \qquad [16.140]$$

en donde $\boldsymbol{E}_{inc}$ y $\boldsymbol{B}_{inc}$ vienen dados por [16.139]. Como los campos dispersados

son ondas salientes en el infinito, sus desarrollos deben ser de la forma:

$$\boldsymbol{E}_{\text{dis}}=\frac{1}{2}E_0\sum_{l=1}^{\infty} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[\alpha_{\pm}(l)h_l^{(1)}(kr)\boldsymbol{X}_{l,\pm1}\pm\frac{\beta_{\pm}(l)}{k}\nabla\times h_l^{(1)}(kr)\boldsymbol{X}_{l,\pm1}\right]$$

$$\boldsymbol{B}_{\text{dis}}=\frac{1}{2c}E_0\sum_{l=1}^{\infty} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[\frac{-i\alpha_{\pm}(l)}{k}\nabla\times h_l^{(1)}(kr)\boldsymbol{X}_{l,\pm1}\mp i\beta_{\pm}(l)h_l^{(1)}(kr)\boldsymbol{X}_{l,\pm1}\right] \qquad [16.141]$$

Los coeficientes $\alpha_{\pm}(l)$ y $\beta_{\pm}(l)$ se determinan por las condiciones de contorno en la superficie del obstáculo. *A priori* es necesario conservar una suma

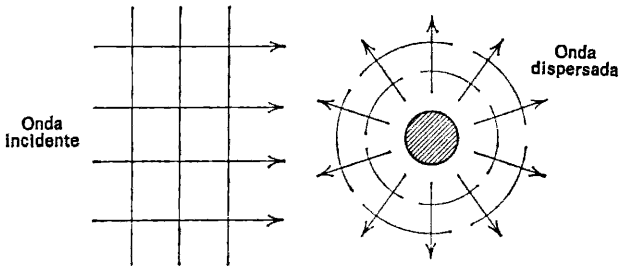


FIG. 16.5. Dispersión de radiación por un objeto localizado.

completa tanto sobre m como sobre l en [16.141]; sin embargo, para el caso particular de los problemas con simetría esférica aquí considerados, sólo aparecen los valores $m=\pm1$.

A partir de los campos totales y dispersados en la superficie de una esfera de radio a que rodee el obstáculo, que vienen expresados por [9.184] y [9.185], pueden deducirse expresiones formales para la potencia total absorbida y dispersada en función de los coeficientes $\alpha(l)$ y $\beta(l)$. Estas expresiones son:

$$P_{\text{dis}}=-\frac{c^2\epsilon_0a^2}{2}\,\text{Re}\int\boldsymbol{E}_{\text{dis}}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}_{\text{dis}}^*)\,d\Omega \qquad [16.142]$$

$$P_{\text{abs}}=\frac{c^2\epsilon_0a^2}{2}\,\text{Re}\int\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}^*)\,d\Omega \qquad [16.143]$$

En ellas $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario normal dirigido radialmente hacia fuera, $\boldsymbol{E}_{\text{dis}}$ y $\boldsymbol{B}_{\text{dis}}$ vienen dados por [16.141], en tanto que $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son la suma de los campos de la onda plana [16.139] y de los campos dispersados [16.141]. Sólo la parte transversal de los campos interviene en estas ecuaciones. Ya sabemos que $\boldsymbol{X}_{lm}$ es transversal. El otro tipo de término en [16.139] y [16.141] es:

$$\nabla\times f_l(r)\boldsymbol{X}_{lm}=\frac{\boldsymbol{in}\sqrt{l(l+1)}}{r}f_l(r)Y_{lm}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rf_l(r)]\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{X}_{lm} \qquad [16.144]$$

en donde f_l es una de las funciones de Bessel esféricas de orden l que satisface [16.5]. Cuando se introducen en [16.142] y [16.143] los desarrollos multipolares de los campos, resulta una doble suma sobre l y l' de varios productos

escalares de la forma $\mathbf{X}^*_{lm}\cdot\mathbf{X}_{l'm'}$, $\mathbf{X}^*_{lm}\cdot(\boldsymbol{n}\times\mathbf{X}_{l'm'})$ y $(\boldsymbol{n}\times\mathbf{X}^*_{lm})\cdot(\boldsymbol{n}\times\mathbf{X}_{l'm'})$. Después de integrar a todos los ángulos, las relaciones de ortogonalidad [16.132] reducen la doble suma a una suma sencilla. Cada uno de los términos de la suma contiene productos de las funciones esféricas de Bessel por derivadas de las funciones esféricas de Bessel. El empleo de los wronskianos [16.15] permite eliminar todas las funciones de Bessel y conduce a las expresiones siguientes para todas las secciones eficaces totales de dispersión y absorción (potencia dispersada o absorbida dividida por el flujo incidente, $\epsilon_0 cE_0^2$):

$$\sigma_{\text{dis}}=\frac{\pi}{2k^2}\sum_l (2l+1)[|\alpha(l)|^2+|\beta(l)|^2] \qquad \text{[16.144 bis]}$$

$$\sigma_{\text{abs}}=\frac{\pi}{2k^2}\sum_l (2l+1)[2-|\alpha(l)+1|^2-|\beta(l)+1|^2] \qquad \text{[16.145]}$$

La sección eficaz total o de extinción es la suma de σ_{dis} y σ_{abs}:

$$\sigma_t=-\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\,\text{Re}\,[\alpha(l)+\beta(l)] \qquad \text{[16.146]}$$

No es sorprendente que estas expresiones para las secciones eficaces se parezcan notablemente a los desarrollos en ondas parciales de la dispersión mecanocuántica *.

La sección eficaz diferencial de dispersión se obtiene calculando la potencia radiada en un elemento de ángulo sólido $d\Omega$ dado, o lo que es equivalente, tomando el valor absoluto del cuadrado de la amplitud de dispersión normalizada f, [9.188]. Utilizando el resultado del problema 16.11, *a)*, encontramos que la sección eficaz de dispersión para la polarización incidente $(\boldsymbol{\epsilon}_1\pm i\boldsymbol{\epsilon}_2)$ es:

$$\frac{d\sigma_{\text{dis}}}{d\Omega}=\frac{\pi}{2k^2}\left|\sum\sqrt{2l+1}\,[\alpha_\pm(l)\mathbf{X}_{l,\pm1}\pm i\beta_\pm(l)\boldsymbol{n}\times\mathbf{X}_{l,\pm1}]\right|^2 \qquad \text{[16.147]}$$

En general, la radiación dispersada está polarizada elípticamente. Sólo si $\alpha_\pm(l)=\beta_\pm(l)$ para cualquier l estaría polarizada circularmente. Esto significa que si la radiación incidente está polarizada linealmente, la radiación dispersada estará polarizada elípticamente; si la radiación incidente no está polarizada, la radiación dispersada presentará polarización parcial según sea el ángulo de observación. Ejemplos de estos hechos en el límite de longitudes de onda largas fueron descritos en el capítulo 9 (véanse Figs. 9.6 y 9.7).

Los coeficientes $\alpha_\pm(l)$ y $\beta_\pm(l)$ de [16.141] se determinan a partir de las condiciones de contorno de los campos en $r=a$. Normalmente esto implicaría la solución de las ecuaciones de Maxwell dentro de la esfera y adaptar apropiadamente las soluciones al atravesar la superficie $r=a$. Sin embargo, si el obstáculo es una esfera de radio a cuyas propiedades electromagnéticas pueden describirse mediante una *impedancia superficial* Z_s (para esto la variación radial de los campos justamente dentro de la esfera debe ser rápida en com-

* Nuestros resultados no son completamente generales. Si se hubiera incluido en [16.141] la suma sobre m, la sección eficaz de dispersión tendrá una suma sobre l y m con los cuadrados de los valores absolutos de $\alpha(l,m)$ y $\beta(l,m)$. La sección eficaz total quedaría como está, con $\alpha(l)\to\alpha(l,m=\pm\frac{1}{2})$ y $\beta(l)\to\beta(l,m=\pm\frac{1}{2})$, dependiendo del estado de polarización de la onda incidente [16.130]. La sección eficaz de absorción puede deducirse de tomar la diferencia entre σ_t y σ_{dis}.

paración con el radio), entonces las condiciones de contorno toman la forma relativamente simple:

$$\boldsymbol{E}_{\tan} = \epsilon_0 c^2 Z_s \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B} \qquad [16.148]$$

en la que $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ están calculados justamente fuera de la esfera. Según [16.139], [16.141] y [16.144] tenemos:

$$\boldsymbol{E}_{\tan} = E_0 \sum_l i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left\{ \left[j_l + \frac{\alpha_\pm(l)}{2} h_l^{(1)} \right] \boldsymbol{X}_{l,\pm 1} \pm \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \left(j_l + \frac{\beta_\pm(l)}{2} h_l^{(1)} \right) \right] \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{X}_{l,\pm 1} \right\}$$

y

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B} = \frac{E_0}{c} \sum_l i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left\{ \frac{i}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \left(j_l + \frac{\alpha_\pm(l)}{2} h_l^{(1)} \right) \right] \boldsymbol{X}_{l,\pm 1} \mp i \left[j_l + \frac{\beta_\pm(l)}{2} h_l^{(1)} \right] \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{X}_{l,\pm 1} \right\}$$

en donde $x = ka$ y todas las funciones esféricas de Bessel tienen el argumento x. La condición de contorno [16.148] requiere que, para cada valor de l y para cada término $\boldsymbol{X}_{lm}$ y $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{X}_{lm}$ separadamente, sean proporcionales los coeficientes de $\boldsymbol{E}_{\tan}$ y $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B}$, de acuerdo con *:

$$\left.\begin{aligned} j_l + \frac{\alpha_\pm(l)}{2} h_l^{(1)} &= i \left(\frac{Z_s}{Z_0} \right) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \left(j_l + \frac{\alpha_\pm(l)}{2} h_l^{(1)} \right) \right] \\ j_l + \frac{\beta_\pm(l)}{2} h_l^{(1)} &= i \left(\frac{Z_0}{Z_s} \right) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \left(j_l + \frac{\beta_\pm(l)}{2} h_l^{(1)} \right) \right] \end{aligned}\right\} \qquad [16.149]$$

Por medio de la relación $2j_l = h_l^{(1)} + h_l^{(2)}$, los coeficientes $\alpha_\pm(l)$ y $\beta_\pm(l)$ pueden escribirse:

$$\alpha_\pm(l) + 1 = - \left[\frac{h_l^{(2)} - i \left(\frac{Z_s}{Z_0} \right) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x h_l^{(2)})}{h_l^{(1)} - i \left(\frac{Z_s}{Z_0} \right) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x h_l^{(1)})} \right] \qquad [16.150]$$

teniendo $\beta_\pm(l)$ la misma forma, pero con Z_s/Z_0 sustituida por su recíproca. Notemos que con la condición de contorno de la impedancia superficial los coeficientes son los mismos para ambos estados de polarización circular.

Para una Z_s dada, todos los coeficientes multipolares quedan determinados y en principio la dispersión es conocida. Todo lo que resta es sustituir numéricamente. Antes de proceder a pasar a un límite determinado, hagamos algunas observaciones. Primera, si Z_s es imaginaria pura (si no hay disipación) o si $Z_s = 0$ o $Z_s \to \infty$, $[\alpha_\pm(l) + 1]$ y $[\beta_\pm(l) + 1]$ son números de módulo unidad. Esto significa que $\alpha_\pm(l)$ y $\beta_\pm(l)$ pueden escribirse en la forma:

$$\alpha_\pm(l) = (e^{2i\delta_l} - 1); \qquad \beta_\pm(l) = (e^{2i\delta_l'} - 1) \qquad [16.151]$$

---

* En estas fórmulas $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ es la llamada *impedancia del vacío. (Nota del T.)*

donde los ángulos de fase δ_l y δ_l' se denominan *corrimientos de fase de dispersión.* Concretamente, si $Z_s=0$ (esfera perfectamente conductora):

$$\left.\begin{aligned} \tan\delta_l &= j_l(ka)/n_l(ka) \\ \tan\delta_l' &= \left[\frac{\dfrac{d}{dx}(xj_l(x))}{\dfrac{d}{dx}(xn_l(x))}\right]_{x=ka} \end{aligned}\right\} \qquad [16.152]$$

y $\delta_l \longleftrightarrow \delta_l'$ cuando $Z_s \to \infty$.

La segunda observación es que [16.150] puede simplificarse para los límites de frecuencias bajas y altas. Cuando $ka \ll 1$, las funciones esféricas de Bessel pueden aproximarse de acuerdo con [16.12]. Entonces obtenemos la aproximación para longitudes de onda largas:

$$\alpha_\pm(l) \simeq \frac{-2i(ka)^{2l+1}}{(2l+1)[(2l-1)!!]^2}\left[\frac{x-i(l+1)Z_s/Z_0}{x+ilZ_s/Z_0}\right] \qquad [16.153]$$

con la misma forma para $\beta_\pm(l)$ con (Z_s/Z_0) reemplazada por su inversa. Cuando $ka \gg 1$, utilizamos [16.13] y obtenemos:

$$\alpha_\pm(l) \simeq \left(\frac{Z_s-Z_0}{Z_s+Z_0}\right) e^{2i[(l+1)(\pi/2)-ka]} - 1 \qquad [16.154]$$

siendo $\beta_\pm(l) = -\alpha_\pm(l)$ mediante la sustitución usual. En el límite de longitudes de onda largas, independientemente del valor real de Z_s, los coeficientes de dispersión $\alpha_\pm(l)$, $\beta_\pm(l)$ se hacen rápidamente muy pequeños a medida que aumenta l. Usualmente, sólo hace falta conservar el término más bajo ($l=1$) para cada serie de multipolos. En el límite opuesto, cuando $ka \gg 1$, la ecuación [16.154] muestra que para $l \ll ka$, los coeficientes sucesivos tienen magnitudes comparables, pero sus fases fluctúan ampliamente. Cuando $l \sim l_{\text{máx}} = ka$, hay una región de transición y para $l \gg l_{\text{máx}}$ se cumple [16.153]. El empleo del desarrollo multipolar o en ondas parciales de tan gran número de términos es un asunto delicado, que necesita el uso de calculadoras digitales o esquemas de aproximación del tipo discutido en la sección 9.13.

Ahora vamos a particularizar al caso del límite para longitudes de onda largas ($ka \ll 1$) para una esfera perfectamente conductora ($Z_s=0$), y a dejar para los problemas otros ejemplos de complejidad ligeramente mayor. Sólo son importantes los términos $l=1$ en [16.147]. De [16.153] encontramos:

$$\alpha_\pm(1) = \frac{-1}{2}\beta_\pm(1) \simeq -\frac{2i}{3}(ka)^3$$

En este límite la sección eficaz de dispersión es:

$$\frac{d\sigma_{\text{dis}}}{d\Omega} \simeq \frac{2\pi}{3}a^2(ka)^4|\mathbf{X}_{1,\pm1} \mp 2i\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{1,\pm1}|^2 \qquad [16.155]$$

De la tabla de la página 779 obtenemos los términos cuadrado de los mó-

dulos:

$$|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{X}_{1,\pm1}|^2=|\boldsymbol{X}_{1,\pm1}|^2=\frac{3}{16\pi}(1+\cos^2\theta) \qquad [16.156]$$

Los términos producto vectorial se pueden obtener fácilmente:

$$\mathrm{Re}\,[\pm i(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{X}_{1,\pm1})^*\cdot\boldsymbol{X}_{1,\pm1}]=\frac{-3}{8\pi}\cos\theta \qquad [16.157]$$

Con lo que en el caso límite de longitudes de onda largas la sección eficaz diferencial de dispersión es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\simeq a^2(ka)^4\left[\frac{5}{8}(1+\cos^2\theta)-\cos\theta\right] \qquad [16.158]$$

independientemente del estado de polarización de la radiación incidente. En la figura 16.6 aparece la distribución angular de la radiación dispersada, un

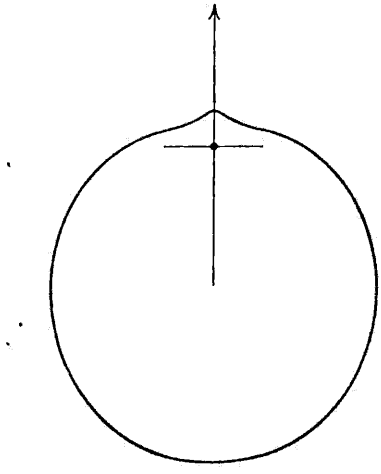


FIG. 16.6. Distribución angular de la radiación dispersada por una esfera perfectamente conductora en el límite de las longitudes de onda largas ($ka\ll1$).

diagrama polar equivalente a la figura 9.7. La dispersión hacia atrás resulta predominante, la notable asimetría alrededor de 90° es debida al término de interferencia dipolo eléctrico-dipolo magnético.

La sección eficaz total en el límite de las longitudes de onda largas es

$$\sigma=\frac{10\pi}{3}a^2(ka)^4 \qquad [16.159]$$

Este es un resultado bien conocido, obtenido por primera vez por MIE y DEBYE (1908-1909), ya discutido desde un punto de vista diferente en la sección 9.6, *c)*.

El problema general de la dispersión de ondas electromagnéticas por esferas de propiedades eléctricas y magnéticas arbitrarias cuando *ka* no es peque-

ño resulta complicado. Fue atacado sistemáticamente por MIE y DEBYE, en 1908-1909. Hasta hoy se han publicado sobre el tema centenares de artículos. En los libros de KERKER, KING y WU, BOWMAN, SENIOR y USLENGHI, y otras fuentes citadas al final del capítulo, pueden encontrarse detalles de los muchos aspectos de este importante problema. El libro de BOWMAN, SENIOR y USLENGHI discute la dispersión por otros obstáculos de forma regular además de la esfera.

Para obstáculos que no sean esferas, cilindros, etc., hay muy poca teoría formal. Recientemente se ha realizado un progreso interesante al desarrollar PURCELL y PENNYPACKER un esquema de aproximación en el que un obstáculo dispersante de forma y propiedades electromagnéticas arbitrarias se reemplaza por una distribución de dipolos elementales dispersantes cuyas propiedades reproducen las del obstáculo original. Se busca una solución autoconsistente para los campos dentro y fuera de esta distribución por medios numéricos en una calculadora digital de alta velocidad. Este trabajo está citado entre las lecturas recomendadas al final del capítulo 9.

16.10. PROBLEMAS DE CONDICIONES DE CONTORNO CON CAMPOS MULTIPOLARES

La dispersión de radiación por una esfera conductora es un ejemplo de un problema de contorno con campos multipolares. Otros ejemplos son las oscilaciones libres de una esfera conductora, la cavidad resonante esférica y la dispersión por una esfera dieléctrica. La posibilidad de pérdidas resistivas en los conductores añade a la lista problemas tales como valores de la Q de una cavidad y secciones transversales de absorción ya mencionados. Las técnicas generales para tratar todos estos problemas son las mismas que las que se vieron en la sección 16.9 y el capítulo 8. El aparato matemático necesario ya ha sido desarrollado en el presente capítulo. La discusión de estos ejemplos se dejará para los problemas al final del capítulo.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

La teoría de los armónicos esféricos vectoriales y campos vectoriales multipolares se discute ampliamente por:

BLATT y WEISSKOPF, apéndice B.
MORSE y FESHBACH, sección 13.3.

Vienen dadas aplicaciones a la radiación multipolar nuclear en:

BLATT y WEISSKOPF, cap. XII.
SIEGBAHN, cap. XIII, por S. A. MOSZKOWSKI, y
cap. XVI (II), por M. GOLDHABER y A. W. SUNYAR.

Al final del capítulo 9 se citaron varios libros sobre antenas, así como sobre dispersión. No obstante, en ninguno de ellos se discuten rigurosamente los desarrollos multipolares.

La dispersión de radiación por una esfera perfectamente conductora se trata de forma breve en:

MORSE y FESHBACH, págs. 1882-1886.
PANOFSKY y PHILLIPS, sección 12.9.

Discusiones mucho más elaboradas con propiedades dieléctricas y conductoras arbitrarias en la esfera, vienen dadas en:

BORN y WOLF, sección 13.5.
STRATTON, sección 9.25.

Información matemática sobre las funciones de Bessel esféricas, etc., se encuentra en:

MORSE y FESHBACH, págs. 1573-6.

Al final de la sección 16.9 se han citado ya otras referencias sobre dispersión.

PROBLEMAS

16.1. Se tienen tres cargas situadas a lo largo del eje z, una $+2q$ en el origen y cargas $-q$ en $z=\pm a\cos\omega t$. Determínense los momentos multipolares de menor orden no nulos, la distribución angular de la radiación y la potencia total radiada. Supóngase que $ka\ll 1$.

16.2. Una superficie casi esférica definida por

$$R(\theta)=R_0[1+\beta P_2(\cos\theta)]$$

tiene en su interior una distribución volúmica uniforme de carga total Q. El parámetro pequeño β varía armónicamente con el tiempo a una frecuencia ω. Corresponde esto a ondas superficiales en la esfera. Tomando solamente los términos de menor orden en β y considerando la aproximación para longitudes de onda largas, calcúlense los momentos multipolares no nulos, la distribución angular de la radiación y la potencia total radiada.

16.3. La densidad de carga uniforme del problema 16.2 se reemplaza por una densidad uniforme de imanación paralela al eje z, cuyo momento magnético total es M. Con las mismas aproximaciones anteriores calcúlense los momentos multipolares de radiación no nulos, la distribución angular de la radiación y la potencia total radiada.

16.4. Una antena consiste en una espira circular de alambre, de radio a, situada en el plano x-y con su centro en el origen. La corriente en el alambre es

$$I=I_0\cos\omega t=\mathrm{Re}\, I_0 e^{-i\omega t}$$

a) Calcúlense las expresiones de $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ en la zona de radiación sin aproximaciones en lo que se refiere a la magnitud de ka. Determínese la potencia radiada por unidad de ángulo sólido.

b) ¿Cuál es el momento multipolar de menor orden no nulo ($Q_{l,m}$ o $M_{l,m}$)? Calcúlese este momento en el caso límite $ka\ll 1$.

16.5. Se tienen dos dipolos eléctricos de momento dipolar p situados en un plano a una distancia $2a$ entre ellos. Los ejes de los dipolos son paralelos entre sí y perpendiculares al plano, pero sus momentos presentan direcciones opuestas. Los dipolos giran con una velocidad constante ω alrededor de un eje paralelo situado entre ellos exactamente a la mitad de la distancia ($\omega\ll c/a$).

a) Calcúlense las componentes del momento cuadripolar.

b) Demuéstrese que la distribución ángular de la radiación es proporcional a $(1-3\cos^2\theta+4\cos^4\theta)$, y que la potencia total radiada es

$$P=\frac{cp^2a^2}{10\pi\epsilon_0}\left(\frac{\omega}{c}\right)^6$$

16.6. En el caso límite de longitudes de onda largas, calcúlense los momentos multipolares no nulos de la distribución de carga

$$\rho = Cr^3 e^{-5r/6} Y_{1,1}(\theta, \phi) Y_{2,0}(\theta, \phi) e^{-i\omega_0 t}$$

y determínese la distribución angular y potencia total radiada para cada multipolo. Esta distribución de carga es adecuada para una transición entre los estados $n=3$, $l=2(3d)$ y $n=2$, $l=1(2p)$ en un átomo de hidrógeno.

16.7. Los campos que representan una onda magnética transversal propagándose en una guía de ondas cilíndrica de radio R son:

$$E_z = J_m(\gamma r) e^{im\phi} e^{i\beta z - i\omega t}, \qquad H_z = 0$$

$$E_\phi = \frac{-m\beta}{\gamma^2} \frac{E_z}{r}, \qquad H_r = -\frac{\epsilon_0 ck}{\beta} E_\phi$$

$$E_r = \frac{i\beta}{\gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \qquad H_\phi = \frac{\epsilon_0 ck}{\beta} E_r$$

en donde m es el índice que especifica la dependencia angular, β es la constante de propagación $\gamma^2 = k^2 - \beta^2$ $(k=\omega/c)$, en que γ es tal que $J_m(\gamma R)=0$. Calcúlese la razón entre la componente z del momento angular electromagnético y la energía en el campo. Con el fin de simplificar los cálculos, puede ser ventajoso efectuar algunas integraciones por partes y utilizar la ecuación diferencial satisfecha por E_z.

16.8. Un hueco esférico de radio a en un medio conductor puede servirnos de cavidad resonante electromagnética.

a) Suponiendo conductividad infinita, determínense las ecuaciones trascendentes para las frecuencias características ω_{ln} en la cavidad correspondiente a los modos TE y TM.

b) Calcúlense valores numéricos para la longitud de onda λ_{ln} en unidades del radio a para los cuatro modos más bajos de ondas TE y TM.

c) Calcúlense explícitamente los campos eléctrico y magnético en el interior de la cavidad para los modos TE y TM más bajos.

16.9. La cavidad esférica resonante del problema 16.8 tiene paredes no permeables de gran conductividad, pero finita. En la aproximación correspondiente a profundidad de penetración δ pequeña frente al radio de la cavidad a, demuéstrese que la Q de la cavidad, definida por la ecuación [8.82], viene dada por

$$Q = a, \qquad \text{para modos TE}$$

y

$$Q = a\left(1 - \frac{l(l+1)}{x_{ln}^2}\right), \qquad \text{para modos TM}$$

en donde $x_{ln} = (a/c)\omega_{ln}$ para los modos TM.

16.10. Discútanse los modos normales de oscilación de una esfera sólida perfectamente conductora de radio a en el vacío. (Este problema fue resuelto por J. J. Thomson hacia 1880.)

a) Determínense las ecuaciones características para las frecuencias propias correspondientes a modos de oscilación TE y TM. Demuéstrese que las raíces siempre tienen una parte imaginaria negativa, suponiendo una dependencia con el tiempo $e^{-i\omega t}$.

b) Calcúlense las frecuencias propias para los modos TE y TM $l=1$ y $l=2$. Tabúlese la longitud de onda (definida en función de la parte real de la frecuencia) en unidades de radio a y del tiempo de caída (definido como el tiem-

po que emplea la *energía* en decrecer hasta e^{-1} de su valor inicial) en unidades del tiempo de tránsito (a/c), para cada uno de los modos.

16.11. *a)* Demuéstrese que para la onda dispersada [16.141] la amplitud de dispersión *normalizada* [9.188] es:

$$f=\frac{1}{ik}\sqrt{\frac{n}{2}}\sum_l \sqrt{(2l+1)}[\alpha_{\pm}(l)\mathbf{X}_{l,\pm 1}\pm i\beta_{+}(l)\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{l,\pm 1}]$$

en la que el vector polarización de la onda incidente es $(\epsilon_1\pm i\epsilon_2)/\sqrt{2}$.

b) Dedúzcase una expresión para la sección eficaz total de σ_t a partir del teorema óptico [9.189] y de la expresión anterior para f.

16.12. Una onda plana polarizada circularmente de frecuencia $\omega=ck$ incide sobre una esfera conductora no permeable de radio a.

a) Suponiendo que la conductividad de la esfera es infinita, dense expresiones explícitas de los campos eléctrico y magnético junto a la superficie y en las proximidades de la esfera, en el caso límite de longitudes de onda largas, $ka\ll 1$.

b) Utilizando las técnicas del capítulo 8, calcúlese la potencia absorbida por la esfera de la onda incidente, suponiendo que la conductividad es grande pero finita. Exprésese el resultado como una sección eficaz de absorción, en función del número de ondas k, el radio a y la profundidad de penetración δ. Supóngase $ka\ll 1$.

16.13. Discútase la dispersión de una onda plana de radiación electromagnética por una esfera dieléctrica no permeable, de radio a y constante dieléctrica ϵ.

a) Hallando los campos en el interior de la esfera y uniendo a la onda incidente la onda de dispersión fuera de la esfera, determínense los coeficientes multipolares de la onda de dispersión. Defínanse corrimientos de fase adecuados al problema.

b) Considérese el límite de longitudes de onda largas $(ka\ll 1)$ y determínense de forma explícita las secciones eficaces de dispersión diferencial y total. Represéntese la distribución angular para $\epsilon=2$.

c) En el caso límite $\epsilon\to\infty$, compárense los resultados con los correspondientes a una esfera perfectamente conductora.

16.14. Considérese la dispersión de una onda plana por una esfera no permeable de radio a y conductividad muy buena, pero no perfecta. Supóngase que $ka\ll 1$ y que la profundidad de penetración $\delta<a$.

a) Demuéstrese, a partir del análisis de la sección 8.1, que:

$$Z_s/Z_0=\frac{k\delta}{2}(1-i)$$

b) En el límite de longitudes de onda largas, demuéstrese que, para $l=1$, los coeficientes $\alpha_{\pm}(l)$ y $\beta_{\pm}(l)$ de [16.149] son:

$$\alpha_{\pm}(1)\simeq -\frac{2i}{3}(ka)^3\left[\frac{\left(1-\frac{\delta}{a}\right)-i\frac{\delta}{a}}{\left(1+\frac{\delta}{2a}\right)+i\frac{\delta}{2a}}\right]$$

$$\beta_{\pm}(1)\simeq\frac{4i}{3}(ka)^3$$

c) Escríbase explícitamente la sección eficaz diferencial de dispersión, que sea correcta en *primer* orden en δ/a y en el menor orden en ka.

d) Utilizando [16.145] calcúlese la sección eficaz de absorción. Demuéstrese que hasta el primer orden en δ es $\sigma_{abs} \simeq 3\pi(k\delta)a^2$. ¿En cuánto difiere el valor, si $\delta = a$?

AMORTIGUAMIENTO POR RADIACION, AUTOCAMPOS DE UNA PARTICULA, DISPERSION Y ABSORCION DE RADIACION POR UN SISTEMA LIGADO

17.1. INTRODUCCION

Los problemas de electrodinámica se han dividido en los capítulos precedentes en dos clases; en una de ellas se especifican las fuentes (cargas y corrientes) y se calculan los campos electromagnéticos resultantes, en la otra se especifican ciertos campos electromagnéticos externos y se calculan los movimientos de partículas cargadas o corrientes. Las guías de ondas, las cavidades y la radiación de fuentes multipolares dadas constituyen ejemplos del primer tipo de problemas, mientras que el movimiento de cargas en campos eléctricos y magnéticos y los fenómenos de pérdida de energía son ejemplos del segundo tipo. Ocasionalmente los dos problemas se combinan, como en la discusión de la radiación de frenado. Sin embargo, el tratamiento es por etapas: primeramente se determina el movimiento de la partícula cargada en un campo externo despreciando la emisión de radiación, y a continuación se calcula la radiación a partir de la trayectoria como una distribución dada de carga.

Es evidente que esta forma de tratar los problemas de electrodinámica solamente puede tener validez aproximada. El movimiento de partículas cargadas en campos de fuerza externos implica necesariamente emisión de radiación siempre que las cargas estén aceleradas. La radiación emitida transporta energía, ímpetu y momento cinético y, por tanto, debe influir en el movimiento subsiguiente de las partículas cargadas. Como consecuencia, el movimiento de las fuentes de radiación está determinado, en parte, por la forma en que tiene lugar la emisión de la radiación. Un tratamiento correcto debe incluir la reacción de la radiación sobre el movimiento de las fuentes.

¿Por qué hemos llegado tan lejos en nuestra discusión de la electrodinámica sin enfrentarnos con este hecho? ¿A qué se debe que tantas respuestas calculadas de modo aparentemente erróneo concuerdan tan bien con los experimentos? Una respuesta parcial a la primera cuestión se halla en la segunda. *Hay* muchísimos problemas en electrodinámica que pueden incluirse con error despreciable en una de las dos categorías descritas en el primer párrafo. Por tanto, resulta ventajoso discutirlos sin la complicación adicional e innecesaria de incluir los efectos de reacción. El resto de la respuesta a la primera cuestión es que no existe un tratamiento completamente satisfactorio de los efectos de reacción de la radiación. Las dificultades que presenta este problema rozan uno de los aspectos más fundamentales de la física, la naturaleza de una partícula elemental. Aunque pueden darse soluciones parciales, manejables en áreas limitadas, el problema básico está aún sin resolver. Podría esperarse que la

transición de tratamientos clásicos a mecanocuánticos evitara las dificultades. Aunque existen esperanzas de que finalmente pueda suceder así, las discusiones mecanocuánticas presentes están sembradas de dudas aún más refinadas que las clásicas. Uno de los triunfos de años relativamente recientes (1948-1950) es el que los conceptos de covariancia de Lorentz e invariancia de contraste se hayan utilizado de modo lo suficientemente ingenioso para soslayar estas dificultades en la electrodinámica cuántica y, de este modo, permitir el cálculo de efectos radiativos muy pequeños con precisión extremadamente elevada, en completo acuerdo con los resultados experimentales. Sin embargo, desde un punto de vista fundamental, las dificultades permanecen aún. En este capítulo consideraremos sólo los aspectos clásicos, pero de pasada indicaremos algunas de las analogías mecanocuánticas.

La cuestión de por qué muchos problemas se pueden tratar despreciando los efectos reactivos de la radiación tiene la respuesta obvia de que tales efectos deben ser de importancia despreciable. Para ver de forma cualitativa cuándo sucede esto, y obtener así estimaciones semicuantitativas de los valores de los parámetros en los que los efectos radiativos son o no de importancia, necesitamos un criterio sencillo. Tal criterio puede obtenerse de consideraciones energéticas. Si un campo de fuerzas externo hace que una partícula de carga e esté dotada de una aceleración de valor típico a durante un periodo de tiempo T, la energía radiada es del orden de

$$E_{\text{rad}} \sim \frac{e^2a^2T}{6\pi\epsilon_0c^3} \qquad [17.1]$$

según la fórmula de Larmor [14.22]. Si esta pérdida de energía por radiación es despreciable en comparación con la energía característica del problema E_0, podremos esperar que los efectos radiativos sean de poca importancia. Pero si $E_{\text{rad}} \gtrsim E_0$, los efectos de reacción de la radiación serán apreciables. Así, podemos expresar el criterio que nos dice cuándo empiezan a ser importantes los efectos radiativos mediante:

$$E_{\text{rad}} \sim E_0 \qquad [17.2]$$

El expresar cuál es la energía característica E_0 exige algo de cuidado. Distinguiremos dos situaciones aparentemente distintas, una en la que la partícula está inicialmente en reposo y está sometida a la fuerza aplicada solamente durante el intervalo finito T y otra en la que la partícula experimenta aceleración de forma continua, por ejemplo, en movimiento cuasiperiódico a cierta frecuencia característica ω_0. Para la partícula inicialmente en reposo, un valor típico de la energía es evidentemente la energía cinética después del periodo de aceleración. Así, pues,

$$E_0 \sim m(aT)^2$$

El criterio [17.2] se convierte en

$$\frac{e^2a^2T}{6\pi\epsilon_0c^3} \sim ma^2T^2$$

o bien,

$$T \sim \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0mc^3}$$

Resulta de utilidad definir el *tiempo característico* como

$$\tau = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \qquad [17.3]$$

Así, la conclusión es que para un tiempo T grande frente a τ, los efectos radiativos carecen de importancia. Solamente cuando la fuerza aplicada sea tan repentina y de tan corta duración que sea $T \sim \tau$, los efectos de radiación modificarán el movimiento de forma apreciable. Resulta interesante observar que el tiempo característico τ más largo para partículas cargadas es el que corresponde a los electrones, y que su valor es $\tau = 6{,}26 \cdot 10^{-24}$ seg. Este es el tiempo que invierte la luz en recorrer 10^{-13} cm. Solamente en los fenómenos en que se consideren estas distancias o tiempos deberemos esperar que los efectos de radiación desempeñen un papel *crucial*.

Si el movimiento de la partícula es casi periódico con una amplitud típica d y una frecuencia característica ω_0, la energía mecánica de movimiento puede identificarse con E_0, y es del orden de

$$E_0 \sim m\omega_0^2 d^2$$

Las aceleraciones son típicamente $a \sim \omega_0^2 d$ y el intervalo de tiempo $T \sim (1/\omega_0)$. Por tanto, el criterio [17.2] es

$$\frac{e^2\omega_0^4 d^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 \omega_0} \simeq m\omega_0^2 d^2$$

o

$$\omega_0 \tau \sim 1 \qquad [17.4]$$

en donde τ viene dado por [17.3]. Como ω_0^{-1} es un periodo adecuado para el movimiento mecánico, vemos de nuevo que, si el tiempo mecánico más importante es largo frente al tiempo característico τ [17.3], los efectos de reacción radiativa sobre el movimiento carecerán de importancia.

Los ejemplos de los dos últimos párrafos demuestran que puede esperarse que los efectos reactivos de la radiación en el movimiento de una partícula cargada sean de importancia cuando las fuerzas externas sean tales que el movimiento se altere de forma apreciable en tiempos del orden de τ o en distancias del orden de $c\tau$. Este es el criterio general dentro del campo de la electrodinámica clásica. Para movimientos menos violentos, los efectos reactivos son suficientemente pequeños para que sus efectos sean despreciables en el movimiento a corto plazo. Los efectos acumulativos a largo plazo se pueden tomar en consideración de forma aproximada, como vamos a ver inmediatamente.

17.2. FUERZA DE REACCION RADIATIVA A PARTIR DEL PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA ENERGIA

Se nos presenta ahora el problema de cómo incluir los efectos reactivos de la radiación en las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada. Comenzaremos con un argumento sencillo que se basa en la conservación de la energía de una partícula cargada no relativista. Reservaremos para las últimas

secciones una deducción con más fundamento, así como la incorporación de los efectos relativistas.

Si despreciamos la emisión de radiación, una partícula de masa m y carga e, sometida a la acción de una fuerza externa $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ se mueve según la ecuación de movimiento de Newton:

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \qquad [17.5]$$

Como es acelerada, la partícula emite radiación cuya potencia viene dada por la fórmula de Larmor [14.22]:

$$P(t) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}(\dot{\boldsymbol{v}})^2 \qquad [17.6]$$

Con el fin de tener en cuenta esta pérdida de energía por radiación y el efecto que produce en el movimiento de la partícula, vamos a modificar la ecuación de Newton [17.5] sumándole una *fuerza de reacción radiativa* $\boldsymbol{F}_{\text{rad}}$:

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{F}_{\text{rad}} \qquad [17.7]$$

A pesar de que $\boldsymbol{F}_{\text{rad}}$ no queda determinada por ahora, podemos ver algunos de los requisitos que «debe» satisfacer:

$\boldsymbol{F}_{\text{rad}}$ debe
1) anularse para $\boldsymbol{v}=0$, ya que en tal caso no hay radiación;
2) ser proporcional a e^2, ya que: *a)* la potencia radiada es proporcional a e^2, y *b)* el signo de la carga no puede intervenir en los efectos de radiación;
3) incluir de hecho el tiempo característico τ [17.3], ya que parece ser el único parámetro significativo de que se dispone.

Determinaremos la forma de $\boldsymbol{F}_{\text{rad}}$ exigiendo que el trabajo efectuado por esta fuerza sobre la partícula en el intervalo de tiempo $t_1 < t < t_2$ sea igual a la energía radiada en este tiempo con signo negativo. De este modo se conservará la energía, al menos en el intervalo de tiempo (t_1, t_2). Con el resultado de Larmor [17.6] este requisito es:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{\text{rad}} \cdot \boldsymbol{v}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\, \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}\, dt$$

Podemos integrar por partes el segundo miembro, con lo que obtenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{\text{rad}} \cdot \boldsymbol{v}\, dt = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v}\, dt - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\,(\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v})\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Si el movimiento es periódico o tal que $(\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v}) = 0$ para $t = t_1$ y $t = t_2$, podemos poner

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\boldsymbol{F}_{\text{rad}} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\, \ddot{\boldsymbol{v}} \right) \cdot \boldsymbol{v}\, dt = 0$$

Entonces, resulta permisible identificar la fuerza de reacción radiativa en la

forma:

$$\boldsymbol{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} = m\tau\ddot{\boldsymbol{v}} \qquad [17.8]$$

Y la ecuación de movimiento modificada toma el aspecto

$$m(\dot{\boldsymbol{v}} - \tau\ddot{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \qquad [17.9]$$

La ecuación [17.9] recibe a veces el nombre de *ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz*. Puede considerarse como una ecuación que aproximadamente y de forma temporal media incluye los efectos reactivos de la emisión de radiación. Esta ecuación es criticable fundándonos en que es de segundo orden en el tiempo y no de primer orden, por lo que va en contra de lo que ya sabemos que requiere una ecuación dinámica de movimiento. Inmediatamente se manifiesta esta dificultad en las llamadas soluciones «desbocadas». Si la fuerza externa es cero, es evidente que [17.9] tiene dos soluciones posibles:

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \begin{cases} 0 \\ \boldsymbol{a}e^{t/\tau} \end{cases} \qquad [17.10]$$

en donde $\boldsymbol{a}$ es la aceleración para $t=0$. Solamente es razonable la primera solución. La segunda solución es inaceptable, puesto que $(\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v}) \neq 0$ para t_1 y t_2. Claro está que la ecuación resulta útil solamente en el dominio en que el término reactivo es una corrección pequeña. Entonces, podemos tratar la radiación radiativa como una perturbación que produce cambios lentos o pequeños en el estado de movimiento de la partícula. Podemos evitar el problema de las soluciones «desbocadas» reemplazando [17.9] por una ecuación integrodiferencial (véase la sección 17.6).

Como ejemplo del empleo de [17.9] para dar cuenta de los pequeños efectos radiativos, consideraremos una partícula que se mueve en un campo de fuerza central, atractivo y conservativo. En ausencia de reacción por radiación se conservan la energía y el momento cinético de la partícula, y son los que determinan el movimiento. La emisión de radiación provoca cambios en estas magnitudes. Siempre que las aceleraciones no sean demasiado violentas, la energía y el momento cinético variarán de forma apreciable sólo en un intervalo de tiempo largo en comparación con el periodo característico del movimiento. De este modo, en un instante dado, será el movimiento esencialmente el mismo que en ausencia de reacción radiativa. Las variaciones a largo plazo pueden describirse mediante promedios tomados a lo largo de la órbita no perturbada de la partícula.

Si el campo de fuerza central y conservativo se describe por medio de un potencial $V(r)$, despreciando los efectos reactivos, la aceleración es:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{-1}{m}\left(\frac{dV}{dr}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad [17.11]$$

Según el principio de conservación de la energía, la variación de la energía total de la partícula respecto del tiempo viene dada por la fórmula de la potencia de Larmor con signo negativo:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}(\dot{\boldsymbol{v}})^2 = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}\left(\frac{dV}{dr}\right)^2$$

que según la definición de τ [17.3] puede expresarse como

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\tau}{m}\left(\frac{dV}{dr}\right)^2 \qquad [17.12]$$

Como se supone que en un ciclo de la órbita es pequeña la variación de energía, podemos reemplazar el segundo miembro por su valor medio temporal referido a la órbita newtoniana. Se obtiene así:

$$\frac{dE}{dt} \simeq -\frac{\tau}{m}\left\langle\left(\frac{dV}{dr}\right)^2\right\rangle \qquad [17.13]$$

El cambio secular del momento cinético puede hallarse considerando el producto vectorial de [17.9] por el radio vector $\boldsymbol{r}$. Como el momento cinético es $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$, tenemos:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_{\text{ext}} + m\tau\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{v}} \qquad [17.14]$$

Por ser la fuerza externa de naturaleza central, el par aplicado es nulo. Pero el término del par radiativo puede expresarse así:

$$m\tau\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{v}} = \tau\left(\frac{d^2\boldsymbol{L}}{dt^2} - m\boldsymbol{v} \times \dot{\boldsymbol{v}}\right) \qquad [17.15]$$

Se supone que el momento cinético varía lentamente con el tiempo, cuando éste se mide en unidades de τ. Por tanto, podemos omitir en [17.15] la segunda derivada de $\boldsymbol{L}$ respecto de t y sustituir $\dot{\boldsymbol{v}}$ por el valor obtenido de la ecuación de movimiento no perturbado [17.11]. Así, podemos expresar la variación de momento cinético respecto del tiempo como

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \simeq -\frac{\tau}{m}\left\langle\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right\rangle\boldsymbol{L} \qquad [17.16]$$

en donde, tal como en [17.13], hemos calculado la media temporal sobre la órbita instantánea.

Las ecuaciones [17.13] y [17.16] nos determinan cómo varía la órbita de la partícula, debido a la reacción radiativa, en función del tiempo. Aunque el comportamiento detallado depende de la forma específica de la ley de fuerza, podemos indicar algunas propiedades de tipo cualitativo. Si la frecuencia característica del movimiento es ω_0, podemos expresar el valor medio de [17.16] así:

$$\frac{\tau}{m}\left\langle\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right\rangle \sim \frac{\tau}{m}m\omega_0^2 = \omega_0^2\tau$$

con algún coeficiente numérico adimensional del orden de la unidad. Esto nos demuestra que el tiempo característico en el cual varía el momento cinético es del orden de $1/(\omega_0\tau)\omega_0$. Este tiempo es muy largo frente al periodo orbital $2\pi/\omega_0$, siempre que $\omega_0\tau \ll 1$. Con las ecuaciones energéticas podemos emplear argumentos análogos.

Estas ecuaciones, que incluyen efectos radiativos pueden utilizarse para discutir problemas prácticos tales como el tiempo de moderación de un mesón mu o pi al caer en cascada desde una órbita alrededor del núcleo con número cuántico muy grande hasta las órbitas más bajas. En la mayor parte del intervalo de tiempo los números cuánticos son lo bastante grandes como para que resulte una aproximación adecuada la descripción clásica en que el movimiento es continuo. Se dejará para los problemas la discusión de ejemplos de esta clase.

17.3. CALCULO DE ABRAHAM-LORENTZ DE LA AUTO-FUERZA

La deducción realizada en la sección anterior de la fuerza de reacción debida a la radiación, aunque plausible, ciertamente no es rigurosa ni fundamental. El problema consiste en dar cuenta de forma satisfactoria de la reacción sobre la partícula cargada de sus propios campos de radiación. Por consiguiente, cualquier discusión sistemática debe considerar la estructura de la carga de la partícula y sus autocampos. ABRAHAM (1903) y LORENTZ (1904) hicieron el primer intento de tal tratamiento ensayando el construir un modelo puramente electromagnético de una partícula cargada. Nuestra discusión sigue el esquema de la dada por LORENTZ en su libro, *Theory of Electrons,* nota 18, pág. 252.

Consideremos una partícula cargada única de carga total e con una densidad de carga altamente localizada $\rho(\boldsymbol{x})$ en el sistema en el cual está la partícula en reposo. La partícula se encuentra bajo la acción de campos electromagnéticos externos $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x}, t)$. En las secciones 6.8 y 12.10 hemos visto que la variación respecto del tiempo del ímpetu mecánico más el ímpetu electromagnético en el interior de un volumen dado es nula, siempre que no haya flujo de ímpetu hacia fuera o hacia dentro de dicho volumen. ABRAHAM y LORENTZ propusieron que el ímpetu aparentemente mecánico de una partícula cargada es en realidad de origen electromagnético. Entonces, la ley de conservación del ímpetu puede enunciarse como:

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=0$$

o, de forma equivalente, en función de la fuerza de Lorentz:

$$\int (\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\, d^3\boldsymbol{x}=0 \qquad [17.17]$$

Los campos que aparecen en esta ecuación son los campos *totales,* y la integración se extiende al volumen de la partícula.

Con el fin de que [17.17] tome el aspecto de la ecuación de movimiento de Newton,

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$$

descompondremos los campos totales en los campos externos y los campos propios $\boldsymbol{E}_s$, $\boldsymbol{B}_s$ debidos a las densidades de carga y corriente propias de la partícula, ρ y $\boldsymbol{J}$:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_{\text{ext}}+\boldsymbol{E}_s\\ \boldsymbol{B}&=\boldsymbol{B}_{\text{ext}}+\boldsymbol{B}_s\end{aligned}\right\} \qquad [17.18]$$

De este modo, podemos expresar [17.17] como ecuaciones de movimiento de Newton, en que la fuerza externa sea

$$\boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \int (\rho \boldsymbol{E}_{\text{ext}} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}_{\text{ext}})\, d^3x \qquad [17.19]$$

y la variación respecto del tiempo del ímpetu de la partícula

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\int (\rho \boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}_s)\, d^3x \qquad [17.20]$$

Siempre que las fuerzas externas varíen sólo ligeramente sobre la extensión ocupada por la partícula, la fuerza externa [17.19] se nos convierte precisamente en la ecuación de fuerza de Lorentz ordinaria para una partícula de carga e y velocidad $\boldsymbol{v}$.

Para calcular la fuerza propia (la integral del segundo miembro de [17.20]) es necesario disponer de un modelo de la partícula cargada. Por sencillez supondremos que:

a) la partícula está instantáneamente en reposo;
b) la distribución de carga es rígida y de simetría esférica.

Nuestros resultados estarán necesariamente restringidos a movimientos no relativistas y carecerán de las propiedades de transformación de Lorentz adecuadas. Más tarde remediaremos estas deficiencias.

Para una partícula instantáneamente en reposo, [17.20] se convierte en

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\int \rho(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{x}, t)\, d^3x \qquad [17.21]$$

El autocampo puede expresarse mediante potenciales propios $\boldsymbol{A}$ y Φ, de modo que

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \int \rho(\boldsymbol{x}, t) \left[\nabla\Phi(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) \right] d^3x \qquad [17.22]$$

Los potenciales vienen dados por $A^\alpha = (\Phi/c, \boldsymbol{A})$:

$$A^\alpha(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[J^\alpha(\boldsymbol{x}', t')]_{\text{ret}}}{R}\, d^3x' \qquad [17.23]$$

siendo $J^\alpha = (c\rho, \boldsymbol{J})$ y $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$.

En la ecuación [17.23] el 4-vector corriente debe calcularse en el instante retardado t'. Este difiere del instante t en un tiempo del orden de $\Delta t \sim (a/c)$, siendo a la dimensión de la partícula. Para una distribución de carga altamente localizada, este intervalo de tiempo es extremadamente corto, y durante el mismo se puede suponer que el movimiento de la partícula cambia sólo muy ligeramente. Por consiguiente, resulta natural tomar el desarrollo en serie de Taylor de [17.23] alrededor del tiempo $t' = t$. Como $[\,]_{\text{ret}}$ significa calculado para $t' = t - (R/c)$, cualquier magnitud retardada se puede expresar

$$[\,]_{\text{ret}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R}{c}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} [\,] \qquad [17.24]$$

Con este desarrollo para el cuadrivector corriente en [17.23], la expresión [17.22] se convierte en

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,c^n}\int d^3x\int d^3x'\,\rho(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\rho(\boldsymbol{x}',t)\nabla R^{n-1}+\frac{R^{n-1}}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t}\right]$$

Consideremos los términos $n=0$ y $n=1$ en la parte correspondiente al potencial escalar (primer término del paréntesis cuadrado) del segundo miembro. Para $n=0$, el término es proporcional a

$$\int d^3x\int d^3x'\,\rho(\boldsymbol{x},t)\rho(\boldsymbol{x}',t)\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$$

que es precisamente la auto-fuerza electrostática. Esta se anula en las distribuciones de carga con simetría esférica. El término $n=1$ es idénticamente nulo, ya que comprende ∇R^{n-1}. Así, la primera contribución no nula procedente de la parte de potencial escalar se debe al término $n=2$. Podemos cambiar los índices de sumatorio, con lo que tenemos

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,c^{n+2}}\int d^3x\int d^3x'\,\rho(\boldsymbol{x},t)R^{n-1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\{\ \}\\ \text{en donde}\quad\{\ \}&=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)+\frac{\partial\rho}{\partial t}(\boldsymbol{x}',t)\frac{\nabla R^{n+1}}{(n+1)(n+2)R^{n+1}}\end{aligned}\right\}\qquad[17.25]$$

Con la ecuación de continuidad para las densidades de carga y corriente, podemos expresar el paréntesis de llaves de [17.25]:

$$\{\ \}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)-\frac{\boldsymbol{R}}{n+2}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)$$

En la integral extendida a d^3x' podemos integrar el segundo término por partes, con lo que tenemos:

$$-\int d^3x'\,R^{n+1}\frac{\boldsymbol{R}}{n+2}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}=+\frac{1}{n+2}\int d^3x'\,(\boldsymbol{J}\cdot\nabla')R^{n-1}\boldsymbol{R}=$$

$$=\frac{-1}{n+2}\int d^3x'\,R^{n-1}\left(\boldsymbol{J}+(n-1)\frac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{R}}{R^2}\boldsymbol{R}\right)$$

Significa esto que el paréntesis de llaves en [17.25] es efectivamente igual a

$$\{\ \}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)-\left(\frac{n-1}{n+2}\right)\frac{(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^2}\qquad[17.26]$$

Para una distribución de carga rígida, la corriente es

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)=\rho(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{v}(t)$$

Si la distribución de carga tiene simetría esférica, la única dirección significativa del problema es la de $\boldsymbol{v}(t)$. Por consiguiente, al integrar sobre d^3x y d^3x', solamente nos queda la componente de [17.26] en la dirección de $\boldsymbol{v}(t)$. De aquí que [17.26] sea equivalente a

$$\{\ \} = \rho(x', t)v(t)\left[\frac{n+1}{n+2} - \frac{n-1}{n+2}\left(\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{Rv}\right)^2\right]$$

Además, todas las direcciones de $\boldsymbol{R}$ son igualmente probables. Esto significa que el segundo miembro puede sustituirse por su valor medio 1/3. Así, llegamos a la siguiente expresión para el paréntesis de llaves:

$$\{\ \} = \frac{2}{3}\rho(x', t)v(t) \qquad [17.27]$$

Con [17.27] en [17.25], la autofuerza se convierte, despreciando términos no lineales en las derivadas de $\boldsymbol{v}$ respecto del tiempo (que aparecen para $n \geqslant 4$), en

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^{n+2}}\frac{2}{3n!}\frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{v}}{\partial t^{n+1}}\int d^3x'\int d^3x\,\rho(x')R^{n-1}\rho(x) \qquad [17.28]$$

Para comprender el significado de [17.28], vamos a considerar los primeros términos del desarrollo:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)_0 &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^2}\dot{\boldsymbol{v}}\int d^3x\int d^3x'\,\frac{\rho(x)\rho(x')}{R} \\
\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)_1 &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\int d^3x\int d^3x'\,\rho(x)\rho(x') = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} \\
\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)_n &\sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n!\,c^{n+2}}\,\boldsymbol{v}^{(n+1)}\,a^{n-1}
\end{aligned}\right\} \qquad [17.29]$$

En la tercera expresión, a es una longitud característica de la extensión de la distribución de carga de la partícula. Observemos que para $n \geqslant 2$ los términos del desarrollo se anulan en el límite de una carga puntual ($a \to 0$). Así, pues, para las distribuciones de carga muy localizadas sólo tendremos necesidad de considerar las contribuciones de $n=0$ y $n=1$. El término $n=1$ es precisamente la fuerza de reacción radiativa ya hallada en [17.9]. Es independiente de la estructura de la partícula y depende solamente de su carga total. Podemos considerar la presente deducción dotada de una base más fundamental que la que se trató en la sección 17.2.

El término $n=0$ de [17.29] requiere atención especial. La integral doble es proporcional a la autoenergía electrostática U de la distribución de carga:

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int d^3x\int d^3x'\,\frac{\rho(x)\rho(x')}{R} \qquad [17.30]$$

Por consiguiente, podemos expresar el término $n=0$ como

$$\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)_0 = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}\dot{\boldsymbol{v}} \qquad [17.31]$$

que tiene la forma requerida de una variación de ímpetu respecto del tiempo. La autoenergía electrostática dividida por c^2 puede identificarse con la masa electromagnética de la partícula:

$$m_e = \frac{U}{c^2} \qquad [17.32]$$

Entonces, la ecuación de movimiento de Newton para el modelo de Abraham-Lorentz toma la forma:

$$\left(\frac{4}{3} m_e\right) \dot{\boldsymbol{v}} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \qquad [17.33]$$

supuesto que se desprecian términos superiores del desarrollo [17.28]. Este resultado es el mismo que [17.9], excepto en el factor extraño 4/3 que multiplica a la masa electromagnética.

17.4. DIFICULTADES EN EL MODELO DE ABRAHAM-LORENTZ

Aunque el método de Abraham-Lorentz constituye un paso significativo hacia una descripción fundamental de una partícula cargada, resulta deficiente por varios motivos:

1. Un defecto obvio es la naturaleza no relativista del modelo. Para el término de fuerza reactiva, puede hacerse fácilmente una generalización relativista (véase el problema 17.4), pero en sí mismo esto no resulta suficiente.

2. En [17.33] la masa electromagnética aparece con un coeficiente incorrecto. Esto es un síntoma de que el modelo no posee las propiedades de covarianza de Lorentz adecuadas, como veremos con mayor claridad en la sección siguiente.

3. Si pretendemos poder ignorar los términos de orden superior del desarrollo de la autofuerza, debemos tomar $a \to 0$. Pero la masa electromagnética es del orden de $(e^2/4\pi\epsilon_0 c^2 a)$. Por tanto, en el límite $a \to 0$, la masa se hace infinita. Si queremos que la masa se conserve del mismo orden que la observada m de la partícula, la extensión ocupada por la carga debe ser $a \sim r_0$, en donde

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2}$$

Para los electrones esta distancia, llamada *radio clásico del electrón,* es $2{,}82 \cdot 10^{-13}$ cm. Aunque este radio es muy pequeño, se pueden imaginar movimientos suficientemente violentos como para que los términos de orden superior del desarrollo se hagan importantes para tales extensiones finitas *. Así,

* Dos términos sucesivos del desarrollo están en la razón

$$\left(\frac{a}{c} \frac{d^{n+2}v}{dt^{n+2}} \Big/ \frac{d^{n+1}v}{dt^{n+1}}\right)$$

Esto quiere decir que el movimiento debe cambiar de forma apreciable en un intervalo de tiempo (a/c). Este intervalo de tiempo para $a \sim e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$ es precisamente τ, dado por [17.3]. Así, volvemos al mismo criterio anterior.

pues, si la partícula es de extensión finita, la teoría truncada debe considerarse solamente como una descripción aproximada.

4. La distribución de carga localizada debe tener fuerzas de carácter no electromagnético para que se mantenga estable. Así, pues, en el marco de las ecuaciones de Maxwell y de la relatividad especial, debemos abandonar la idea de un modelo de la materia puramente electromagnético. Sabemos de fuerzas intensas de naturaleza no electromagnética. Estas interacciones hacen que las partículas que las comparten, llamadas hadrones, tengan extensiones finitas en el espacio. La distribución de carga e imanación puede explorarse mediante la dispersión de electrones y mesones mu, en la hipótesis de que estas partículas de prueba sean cargas puntuales y de que las leyes de la electrodinámica sean válidas a distancias próximas. Se encuentra, para los neutrones y protones con detalle, y para otros hadrones en forma más fragmentaria, que la extensión de la carga y la imanación es del orden de $(0{,}5\text{-}1{,}0)\times 10^{-13}$ cm. Este valor es algo menor que el radio clásico del electrón, r_0, pero del mismo orden de magnitud. Puede haber algún significado profundo en que así ocurra, pero en nuestro nivel de conocimientos actual un hecho mucho más relevante es que la longitud de onda de Compton del mesón pi, el cuanto más ligero del campo de fuerza nuclear, es $\hbar/m_\pi c = 1{,}4\times 10^{-13}$ cm. Presumiblemente esta longitud, y otras longitudes hadrónicas semejantes, determinan las extensiones vistas en los experimentos de dispersión de electrones.

Los leptones cargados (electrones y mesones mu) parece que tienen sólo interacciones electromagnéticas y débiles. Por consiguiente, son candidatos para la generalización mecanocuántica del modelo de Abraham-Lorentz. Como se mencionó en la introducción, al menos los experimentos con electrones no muestran evidencia alguna de la existencia de estructura o extensión finita al nivel de 10^{-15} cm. En el contexto clásico de una distribución de carga extensa este hecho resulta completamente inexplicable. Naturalmente, sabemos que los efectos cuánticos intervienen a distancias del orden de $\hbar/mc = 137r_0$. Por tanto, un modelo electromagnético puramente clásico tiene poco interés para el mundo real.

Las fuerzas no electromagnéticas implican una contribución m_0 de tales fuerzas a la masa de una partícula. Dentro del marco del modelo de Abraham-Lorentz discutido hasta ahora, esta masa adicional aparece meramente como un coeficiente adicional a la aceleración en [17.33].

17.5. DEFINICIONES COVARIANTES DE LA ENERGIA Y EL IMPETU ELECTROMAGNETICOS

Un problema importante en el modelo de Abraham-Lorentz es la falta de covariancia adecuada de la autoenergía y el autoímpetu electromagnéticos, como se manifiesta por el factor anómalo 4/3 en la inercia, hallado por primera vez por J. J. THOMSON (1881). La raíz de esta dificultad procede del empleo de las densidades de energía e ímpetu familiares:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}(\boldsymbol{E}^2 + c^2\boldsymbol{B}^2); \qquad \boldsymbol{g} = \epsilon_0(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \qquad [17.34]$$

de una forma no crítica. Se acostumbra a definir la energía y el ímpetu elec-

tromagnéticos totales (véase la sección 6.8) como las integrales tridimensionales de volumen de estas densidades en un instante fijo. En la discusión del teorema de Poynting esto resulta permisible para un observador en reposo en el sistema inercial en el que se definen los campos, pero no es defendible en general cuando debe considerarse el 4-vector ímpetu electromagnético total en diferentes sistemas inerciales. Las densidades [17.34] son elementos del tensor simétrico de esfuerzos electromagnético $\Theta^{\alpha\beta}$, [12.115]. Como ya se ha mencionado en la sección 12.10, *a)*, la integral al espacio tridimensional de Θ^{00} y Θ^{0i} en un instante fijo no se transforma como las componentes de un 4-vector a menos que el tensor satisfaga la condición $\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = 0$, esto es, para campos sin fuentes. Para una partícula clásica extensa con una densidad de carga y corriente no nulas el tensor de esfuerzos electromagnético no es de divergencia nula (véase [12.118]). En consecuencia, las integrales tridimensionales usuales de u y $\boldsymbol{g}$ no pueden representar la energía y el ímpetu de una partícula en todos los sistemas inerciales de forma compatible.

En 1906 POINCARÉ dio una solución al problema de la covariancia de la energía y el ímpetu de la partícula de Abraham-Lorentz y también de su estabilidad (soslayando la cuestión de las propiedades de transformación de la energía y el ímpetu *electromagnéticos* por separado). POINCARÉ señaló que (clásicamente) una partícula cargada puramente electromagnética era imposible debido a que la distribución de carga eléctrica por sí misma es inestable. Son necesarias fuerzas no eléctricas para mantener en su lugar la carga. Entonces, POINCARÉ postuló un tensor de esfuerzos no electromagnético $P^{\alpha\beta}$ que debería añadirse a $\Theta^{\alpha\beta}$ para dar el tensor total de autoesfuerzos $S^{\alpha\beta}$:

$$S^{\alpha\beta} = \Theta^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta}$$

Entonces, definió el 4-vector ímpetu total de la partícula como:

$$cP^\alpha = \int S^{\alpha 0}\, d^3x \qquad [17.35]$$

donde la integral se extiende al espacio tridimensional en un instante fijo. Puede demostrarse que [17.35] se transforma como un 4-vector supuesto que en el sistema propio de la partícula ($\boldsymbol{P} = 0$):

$$\int S^{(0)ij}\, d^3x^{(0)} = 0 \qquad [17.36]$$

donde, $i, j = 1, 2, 3$ y el superíndice (0) indica el sistema propio. Este requisito es que la autotensión total (en el sentido tridimensional) se anula, precisamente la condición para que haya equilibrio mecánico. La anulación de la tensión total en el sistema propio puede relacionarse con la condición diferencial:

$$\partial_\alpha S^{\alpha\beta} = 0$$

Así nos vemos conducidos de nuevo a la misma situación que para la radiación sin fuentes. Si el tensor de esfuerzos covariante de Lorentz tiene una 4-divergencia nula, entonces las integrales espaciales en un instante fijo de la forma de [17.35] pueden representar apropiadamente el 4-vector energía-ímpetu.

La solución de Poincaré tiene algunas virtudes, pero también tiene deficiencias. Requiere *tensiones de Poincaré* desconocidas con el fin de aportar esta-

bilidad. Evita la cuestión de las propiedades de transformación de la parte electromagnética de la energía y del ímpetu en cualquier sistema.

El carácter de 4-vector correcto para la energía y el ímpetu electromagnéticos puede, aún en presencia de fuentes, asegurarse operando con cierto cuidado. Las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} E_e' &= \frac{\epsilon_0}{2}\int (\boldsymbol{E}'^2 + c^2\boldsymbol{B}'^2)\, d^3x' \\ \boldsymbol{P}_e' &= \epsilon_0 \int \boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{B}'\, d^3x' \end{aligned}\right\} \qquad [17.37]$$

puede considerarse que definen la energía y el ímpetu en cierto sistema inercial particular K'. Los integrandos de [17.37] son elementos del tensor de segundo orden $\Theta^{\alpha\beta}$. Evidentemente debemos contraer uno de los índices del tensor con un 4-vector, y el 4-vector debe ser tal que se reduzca a d^3x' en el sistema inercial K'. Definimos el 4-vector tipo temporal:

$$d\sigma^\beta = n^\beta\, d^3\sigma \qquad [17.38]$$

en donde $d^3\sigma$ es un elemento de «área» tridimensional invariante sobre un hiperplano de tipo espacial en cuatro dimensiones. La normal al hiperplano n^β tiene las componentes $(1, 0, 0, 0)$ en K'. El invariante $d^3\sigma$ es evidentemente $d^3\sigma = n_\beta d\sigma^\beta = d^3x'$. Si el sistema inercial K' se mueve con velocidad $c\boldsymbol{\beta}$ con respecto a un sistema inercial K, entonces en K el 4-vector n^β es

$$n^\beta = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}) \qquad [17.39]$$

Por consiguiente, la definición general del 4-vector ímpetu electromagnético en cualquier sistema es:

$$cP_e^{\ \alpha} = \int \Theta^{\alpha\beta}\, d\sigma_\beta = \int \Theta^{\alpha\beta} n_\beta\, d^3\sigma \qquad [17.40]$$

En K', n_β tiene sólo componente temporal. Con $d^3\sigma = d^3x'$, esta expresión covariante se reduce a [17.37]. Pero en el sistema K, $n_\beta = (\gamma, -\gamma\boldsymbol{\beta})$ y la definición covariante tiene componentes espaciales y temporales:

$$\left.\begin{aligned} cP_e^{\ 0} &= \gamma \int (u - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g})\, d^3\sigma \\ cP_e^{\ i} &= \gamma \int (cg^i + T_{ij}^{(M)}\beta^j)\, d^3\sigma \end{aligned}\right\} \qquad [17.41]$$

donde $T_{ij}^{(M)}$ es el 3×3 tensor de esfuerzos de Maxwell [6.120]. Si se desea, el elemento de volumen invariante $d^3\sigma = d^3x'$ puede suprimirse en favor del elemento de volumen d^3x en el sistema K por medio de $d^3x' = \gamma d^3x$ (integración en el instante de tiempo t).

Las definiciones [17.40] y [17.41] del 4-vector ímpetu electromagnético proporcionan una definición covariante partiendo de las expresiones [17.37] en cualquier sistema K'. Las diferentes elecciones del sistema K' conducen a 4-vectores diferentes, naturalmente, pero esto no es causa de alarma *. Existe

* Una elección posible para K' es el «laboratorio» en que el observador está en reposo. La discusión de las leyes de conservación en el capítulo 6 puede interpretarse de este modo.

una elección natural de sistema K' si la masa electromagnética de los campos no es nula, a saber, el sistema propio en el cual:

$$\epsilon_0 \int \boldsymbol{E}^{(0)} \times \boldsymbol{B}^{(0)}\, d^3x^{(0)} = 0 \qquad [17.42]$$

Designamos este sistema, en el que el ímpetu electromagnético total $\boldsymbol{P}'_e$ es cero, como $K^{(0)}$ y añadimos el superíndice cero a las magnitudes en dicho sistema para dejar claro que constituye una elección especial del sistema K'. De acuerdo con [17.37] la energía electromagnética en reposo es entonces:

$$E_e^{(0)} = m_e c^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\boldsymbol{E}^{(0)2} + c^2 \boldsymbol{B}^{(0)2})\, d^3x^{(0)} \qquad [17.43]$$

En el sistema K la energía y el ímpetu electromagnéticos están dados por [17.41], donde ahora $\boldsymbol{v}$ es la velocidad del sistema propio $K^{(0)}$ en K.

Para configuraciones electromagnéticas en las que todas las cargas están en reposo en cierto sistema (el modelo de Abraham-Lorentz de una partícula cargada es un ejemplo), las fórmulas generales pueden reducirse a una forma más atractiva y transparente. Claramente, el sistema en el que todas las cargas están en reposo es $K^{(0)}$, puesto que en él todo es electrostático y el campo magnético se anula en todos los puntos del espacio tridimensional. Para tales configuraciones electrostáticas, el campo magnético viene dado sin aproximación en el sistema K por

$$c\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E} \qquad [17.44]$$

Esto puede verificarse a partir de [11.149]. El integrando de la primera ecuación de [17.41] es, pues, invariante de Lorentz:

$$\begin{aligned}(u - \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{g}) &= \frac{\epsilon_0}{2} (\boldsymbol{E}^2 + c^2\boldsymbol{B}^2) - \epsilon_0 c\, \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} (\boldsymbol{E}^2 + c^2\boldsymbol{B}^2) - \epsilon_0 c (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{B} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} (\boldsymbol{E}^2 - c^2\boldsymbol{B}^2)\end{aligned}$$

Por consiguiente, la energía en K está dada por

$$cP_e^{\,0} = \gamma \frac{\epsilon_0}{2} \int (\boldsymbol{E}^2 - c^2\boldsymbol{B}^2)\, d^3\sigma = \gamma^2 \frac{\epsilon_0}{2} \int (\boldsymbol{E}^2 - c^2\boldsymbol{B}^2)\, d^3x \qquad [17.45]$$

Análogamente, la segunda ecuación de [17.41] se convierte en:

$$c\boldsymbol{P}_e = \gamma\boldsymbol{\beta} \int \frac{\epsilon_0}{2} (\boldsymbol{E}^2 - c^2\boldsymbol{B}^2)\, d^3\sigma = \gamma^2\boldsymbol{\beta} \int \frac{\epsilon_0}{2} (\boldsymbol{E}^2 - c^2\boldsymbol{B}^2)\, d^3x \qquad [17.46]$$

Con el integrando $(\boldsymbol{E}^2 - c^2\boldsymbol{B}^2)$ invariante es claro que tenemos un 4-vector

$P_e^{\alpha}=(\gamma m_e c, \gamma m_e \boldsymbol{v})$, siendo la masa electromagnética:

$$m_e=\frac{\epsilon_0}{2c^2}\int (\boldsymbol{E}^2-c^2\boldsymbol{B}^2)\,d^3\sigma=\frac{\epsilon_0}{2c^2}\int \boldsymbol{E}^{(0)2}\,d^3x^{(0)}$$

en acuerdo con [17.43] y también [17.30] y [17.32].

La ecuación [17.45] para la energía ha sido empleada por BUTLER * para discutir el experimento de Trouton-Noble, una de las pruebas de la relatividad especial referente al par sobre un condensador cargado suspendido en movimiento respecto al éter.

Resulta quizás instructivo examinar los términos de la expresión de $\boldsymbol{P}_e$ para considerar el factor 4/3 y su eliminación. Escribiendo el primer término del ímpetu en [17.41]:

$$c\boldsymbol{P}_e^{(1)}=\gamma\int cg\,d^3\sigma \qquad [17.47]$$

encontramos

$$c\boldsymbol{P}_e^{(1)}=\gamma\epsilon_0\int [\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{\beta}-(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}]\,d^3\sigma \qquad [17.48]$$

En el límite no relativista, $\boldsymbol{E}$ cambia respecto a su valor en el sistema propio sólo en términos del orden de β^2. Suponiendo que el campo es esféricamente simétrico en el sistema propio, el segundo término da un promedio de 1/3 del primero al integrar a todos los ángulos. Entonces se tiene un coeficiente numérico $(2/3)=(4/3)/2$, o $\boldsymbol{P}_e^{(1)}\simeq 4m_e\boldsymbol{v}/3$. La contribución del tensor de esfuerzos de Maxwell en [17.41] puede escribirse:

$$c\boldsymbol{P}_e^{(2)}=\gamma\epsilon_0\int [(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{\beta}]\,d^3\sigma \qquad [17.49]$$

En el límite no relativista y con la hipótesis de simetría esférica en el sistema propio, $\boldsymbol{P}_e^{(2)}\simeq -m_e\boldsymbol{v}/3$, dando la suma apropiada. Sin embargo, es mucho más significativo el hecho de que *sin ninguna hipótesis o aproximaciones* $\boldsymbol{P}_e^{(1)}+\boldsymbol{P}_e^{(2)}$ se suman para dar [17.46] el vector ímpetu correcto que, junto con la energía [17.45], da un 4-vector energía-ímpetu para los campos electrostáticos en el sistema propio.

La falta de covariancia del modelo de Abraham-Lorentz ha sido superada por medio de la expresión propiamente covariante [17.40] para el 4-vector ímpetu electromagnético. Esto parece haber sido realizado por primera vez por KWAL **, y más tarde por ROHRLICH ***, que proporciona una amplia discusión en su libro citado en la bibliografía. Una discusión relativista estrechamente relacionada del factor incorrecto 4/3 en la ecuación de fuerza de Abraham-Lorentz [17.33], fue obtenida por FERMI ****, en 1922, cuando demostró que por aplicación covariante del principio de Hamilton se llega a una modificación adecuada de la autofuerza [17.20] tal que se obtiene un factor unidad, en lugar

---

* J. W. BUTLER, *Am. J. Phys.*, **36**, 936 (1968).

** B. KWAL, *J. phys. radium*, **10**, 103 (1949).

*** F. ROHRLICH, *Am. J. Phys.*, **28**, 639 (1960). Véase también F. ROHRLICH, *Am. J. Phys.*, **38**, 1310 (1970).

**** E. FERMI, *Z. Phisik*, **24**, 340 (1922), o *Atti accad. nazl. Lincei Rend.*, **31**, 184 (1922).

de 4/3. Análoga en algunos aspectos a la solución aquí presentada es la que da WILSON *.

17.6. LA ECUACION INTEGRODIFERENCIAL DE MOVIMIENTO INCLUYENDO EL AMORTIGUAMIENTO DEBIDO A LA RADIACION

En la sección 17.2 se discutió cualitativamente la ecuación de Abraham-Lorentz [17.9]. Se señaló que, si en cierto sentido los efectos radiativos se consideraban como pequeños, podría emplearse un esquema de aproximaciones sucesivas para describir el movimiento. No obstante, la ecuación en su forma diferencial presenta un comportamiento no físico (por ejemplo, la solución [17.10]) debido a que es una ecuación diferencial respecto del tiempo de orden superior al que correspondería a una ecuación mecánica de movimiento. Es deseable disponer de una ecuación de movimiento equivalente que sea de orden correcto, no tenga soluciones groseramente no físicas y se presente de forma natural el aspecto de las aproximaciones sucesivas. Limitaremos nuestra discusión a movimientos no relativistas, aunque la generalización para movimiento completamente relativista no es difícil.

El principio que nos guiará para convertir [17.9] en una ecuación de movimiento equivalente es que la nueva ecuación presente soluciones que evolucionen de forma continua en las correspondientes a una partícula neutra en el caso límite para el que la carga de la partícula tiende a cero. Cuanto menor sea la carga de la partícula, menores son los campos propios y menores los efectos radiativos si las demás circunstancias permanecen iguales.

Si se imagina que la fuerza externa es una función dada del tiempo podemos integrar [17.9] una vez respecto del tiempo mediante la utilización de un factor integrante. Ponemos:

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = e^{t/\tau}\boldsymbol{u}(t)$$

A continuación, de [17.9] hallamos que

$$m\dot{\boldsymbol{u}} = -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\boldsymbol{F}(t)$$

La primera integral es, pues:

$$m\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\int_t^C e^{-t'/\tau}\boldsymbol{F}(t')\,dt' \qquad [17.50]$$

Hemos evitado el signo menos de la anterior haciendo que el límite indefinido de la integral sea el límite inferior. La constante de integración C puede determinarse por razones físicas.

La ecuación integrodiferencial de movimiento [17.50] difiere de las ecuaciones mecánicas corrientes en que la aceleración de la partícula en cualquier tiempo depende no del valor instantáneo de la fuerza que actúa, sino de una media temporal ponderada de la misma. La presencia del factor $e^{-(t-t')/\tau}$ significa que solamente interviene un pequeño intervalo de tiempo de orden de τ.

* W. WILSON, *Proc. Phys. Soc.* (London), **A48**, 376 (1936).

Como $\tau \propto e^2$, este intervalo de tiempo se hace infinitamente pequeño cuando $e^2 \to 0$. Entonces exigiremos que la ecuación de movimiento se convierta en la ecuación de Newton, $m\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{F}(t)$. Esto se consigue eligiendo el límite superior de la integral de [17.50] infinito. Para ver detalladamente el comportamiento, introducimos una nueva variable de integración:

$$s = \frac{1}{\tau}(t' - t)$$

Así, [17.50] puede expresarse

$$m\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \int_0^\infty e^{-s}\boldsymbol{F}(t + \tau s)\, ds \qquad [17.51]$$

Si la fuerza varía lentamente con el tiempo (medido en unidades de τ), podremos esperar que un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $s = 0$ converja con rapidez. Así, tenemos:

$$\boldsymbol{F}(t + \tau s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau s)^n}{n!} \frac{d^n \boldsymbol{F}(t)}{dt^n} \qquad [17.52]$$

Que sustituyendo en [17.51] nos da

$$m\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \frac{d^n \boldsymbol{F}(t)}{dt^n} \qquad [17.53]$$

En el caso límite $\tau \to 0$ solamente nos queda el término $n = 0$ de la serie. Así, tenemos la ecuación de movimiento ordinaria para una partícula no cargada. Los términos de orden superior representan correcciones radiativas para una partícula cargada, términos que son importantes solamente si la fuerza varía en el tiempo con suficiente rapidez.

La ecuación integrodiferencial [17.51] puede considerarse como un sustituto físicamente razonable de la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz [17.9]. Todas las soluciones de [17.51] satisfacen a la [17.9]. Sin embargo, no se presentan soluciones «desbocadas» no físicas, tales como [17.10]. La ecuación [17.51] aún presenta ciertas peculiaridades. La principal de ellas es su violación del concepto tradicional de causalidad. Resulta evidente de [17.51] que la aceleración en el instante t depende de la fuerza que actúa en instantes *posteriores* a t. Esto es contrario a nuestras ideas de causa y efecto. La figura 17.1 muestra un ejemplo típico de tal comportamiento no causal. Se aplica a la partícula una fuerza constante en instantes $t > 0$. La ecuación de movimiento predice una «preaceleración» antes de que la fuerza esté «realmente» aplicada.

Para analizar si tales efectos están en contradicción con los hechos conocidos debemos considerar la escala de tiempos en juego. Los efectos no causales se limitan a intervalos de tiempo del orden de $\tau \sim e^2/4\pi\epsilon_0 mc^3 \sim 10^{-24}$ s. Este tiempo es el que tarda la luz en viajar una distancia del orden del «tamaño» de las partículas elementales. No es posible detectar por medios macroscópicos un intervalo de tiempo tan corto. Por ejemplo, las fuerzas no pueden ser aplicadas o eliminadas sobre la partícula con la rapidez indicada en la figura. Por tanto, la falta de causalidad inherente a [17.51] no puede ser ob-

servada en el laboratorio. Describiremos este estado de cosas diciendo que, aunque [17.51] implica la carencia de causalidad microscópica, el modelo satisface los requisitos de causalidad macroscópica. Otro punto importante es que se trata de un modelo clásico y dejará ya de ser válido a distancias y tiempos mucho mayores que $e^2/4\pi\epsilon_0 mc^3$ y τ. Como consecuencia del principio de incer-

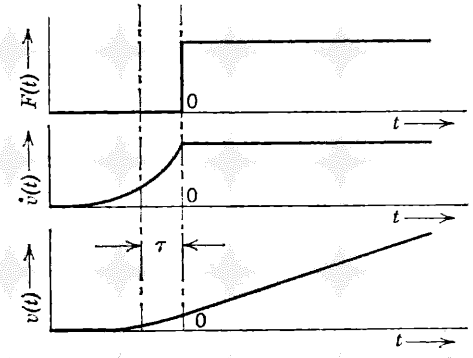


FIG. 17.1. «Preaceleración» de una partícula cargada.

tidumbre, la actuación y cese de una fuerza externa en un intervalo de tiempo Δt viene acompañada de incertidumbres en la energía del orden de $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$. Si éstas son del orden de la energía en reposo de la partícula mc^2, el comportamiento estará muy lejos de ser clásico. Esto nos da un límite mecanocuántico de los intervalos de tiempo, $\tau_q \sim \hbar/mc^2 \sim 137\tau$. Como $\tau_q \gg \tau$, llegamos a la conclusión de que, en el dominio en el que es de esperar que se cumpla la ecuación clásica, los movimientos son lo suficientemente suaves como para que: 1) los efectos no causales sean de importancia mínima, y 2) la reacción radiativa dé lugar solamente a pequeñas correcciones en el movimiento.

Si la fuerza aplicada $\boldsymbol{F}$ viene dada en función de la posición y no del tiempo, la solución de la ecuación integrodiferencial se hace algo más complicada, aunque no distinta en principio.

17.7. ANCHURA DE LINEA Y DESPLAZAMIENTO DE NIVEL DE UN OSCILADOR

Los efectos de reacción radiativa son de gran importancia en el comportamiento detallado de los sistemas atómicos. Aunque una discusión completa supone más bien el formalismo elaborado de la electrodinámica cuántica, podemos apreciar los aspectos cualitativos mediante un tratamiento clásico. Como ejemplo característico consideraremos una partícula cargada enlazada por una fuerza recuperadora unidimensional cuya constante es $k = m\omega_0^2$. En ausencia de amortiguamiento debido a la radiación, la partícula oscila con amplitud constante a la frecuencia característica ω_0. Cuando se incluyen los efectos reactivos, la amplitud de la oscilación decrece de forma gradual, ya que se está convirtiendo energía de movimiento en energía radiada. Este es el análogo clásico de la emisión espontánea en la que un átomo realiza una transición desde un estado excitado a un estado de menor energía mediante la emisión de un fotón.

Si $x(t)$ es el desplazamiento de la partícula cargada desde su posición de equilibrio, la ecuación de movimiento [17.51] para este problema es

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2\int_0^\infty e^{-s}x(t+\tau s)\,ds=0 \qquad [17.54]$$

Como la solución para $\tau=0$ es $x(t)\sim e^{i\omega_0 t}$, es natural suponer una solución de la forma

$$x(t)=x_0e^{-\alpha t} \qquad [17.55]$$

Por motivos físicos anticipamos que la parte imaginaria de α será muy aproximadamente igual a ω_0, al menos para $\omega_0\tau\ll 1$, pero que α tiene una parte real positiva que describe el efecto disipativo de la emisión de radiación. Cuando sustituimos [17.55] en [17.54], se convierte en:

$$x_0e^{-\alpha t}\left[\alpha^2+\omega_0^2\int_0^\infty e^{-(1+\alpha\tau)s}\,ds\right]=0$$

La existencia de la integral requiere que $\mathrm{Re}\,(1+\alpha\tau)>0$. Con esta hipótesis, α estará determinada por una ecuación cúbica:

$$\tau\alpha^3+\alpha^2+\omega_0^2=0 \qquad [17.56]$$

Esta es la misma ecuación que sale de [17.9], pero ahora tenemos la condición $\mathrm{Re}\,(1+\alpha\tau)>0$ para eliminar la solución «desbocada» ($\alpha\simeq-(1+\omega_0^2\tau^2)/\tau$). Las dos raíces significativas físicamente pueden presentarse en forma explícita para valores arbitrarios de τ y ω_0, pero la fórmula es lo suficientemente complicada para que sea de escaso valor salvo para cálculo numérico. Estamos interesados en órdenes de magnitud de los parámetros tales que $\omega_0\tau\ll 1$. De este modo, resulta sencillo probar directamente a partir de [17.56] que α se puede dar, correctamente hasta el orden $(\omega_0\tau)^2$ inclusive, mediante

en donde

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{\Gamma}{2}\pm i(\omega_0+\Delta\omega)\\ \Gamma&=\omega_0^2\tau\\ \Delta\omega&=-\frac{5}{8}\omega_0^3\tau^2\end{aligned}\right\} \qquad [17.57]$$

La constante Γ se conoce como *constante de amortiguamiento*, mientras que $\Delta\omega$ recibe el nombre de *desplazamiento de nivel* *.

La energía de un oscilador decrece exponencialmente como $e^{-\Gamma t}$ a causa del amortiguamiento por radiación. Quiere esto decir que la radiación emitida aparece como un tren de ondas con una longitud efectiva del orden de c/Γ.

* Se invita al lector a hacer una pausa y considerar la constante Γ de amortiguamiento desde diferentes puntos de vista. Uno es emplear la fórmula de la potencia de Larmor [17.6] y directamente la conservación de la energía para relacionar la potencia media temporal radiada $\bar{P}(t)$ con la energía total del oscilador $E(t)$. Otro es preguntarse por la energía cinética inicial y la amplitud x_0 del oscilador tales que $\Gamma=\bar{P}/\hbar\omega_0$, correspondiendo a la emisión de un solo fotón de energía $\hbar\omega_0$. Entonces puede compararse con los valores para un oscilador mecanocuántico en su n-ésimo estado cuántico.

Tal impulso finito de radiación no es exactamente monocromático, sino que tiene un espectro de frecuencia que cubre un intervalo del orden de Γ. La forma exacta del espectro de frecuencia viene dada por el cuadrado de la transformada de Fourier del campo eléctrico o de la aceleración. Despreciando un transitorio inicial (de duración τ), la amplitud del espectro es, pues, proporcional a

$$E(\omega) \propto \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{\alpha - i\omega}$$

La energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia es

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\Gamma/2)^2} \qquad [17.58]$$

en donde I_0 es la energía total radiada. Esta distribución espectral se denomina en *forma de línea resonante*. La anchura de la distribución para la cual la intensidad es la mitad que en el máximo se denomina *semianchura* o *anchura de línea* y es igual a Γ. En la figura 17.2 se presenta esta línea espectral. A causa

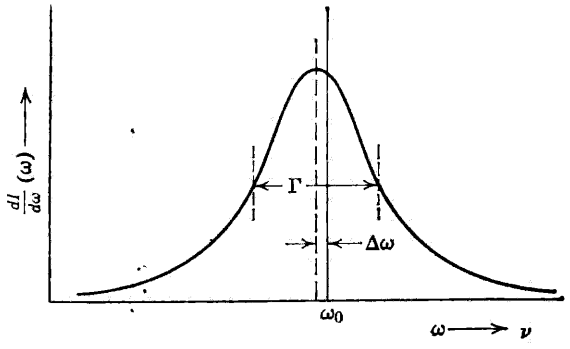


FIG. 17.2. Ensanchamiento y corrimiento de la línea espectral a causa de la reacción radiativa. La forma de la línea de resonancia presenta una anchura Γ. El corrimiento del máximo es $\Delta\omega$.

de los efectos reactivos de la radiación, la línea resulta *ensanchada* y *desplazada* en frecuencia.

La anchura de línea clásica para los osciladores electrónicos es una constante universal cuando se expresa en función de la longitud de onda:

$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega_0^2} \Gamma = 2\pi c\tau = 1{,}2 \times 10^{-4}\ \text{Å}$$

Mecanocuánticamente, las anchuras de las líneas espectrales varían. Con el fin de establecer una conexión con el tratamiento clásico, la anchura de línea mecanocuántica se expresa a veces como

$$\Gamma_q = f_{ij}\Gamma$$

en donde f_{ij} es la «intensidad de oscilador» de la transición $(i \to j)$. Las inten-

sidades de oscilador varían de forma considerable, siendo a veces aproximadamente la unidad para transiciones fuertes de un solo electrón y a veces mucho menores.

El corrimiento de nivel clásico $\Delta\omega$ es menor que la anchura de línea Γ en un factor $\omega_0\tau \ll 1$. Mecanocuánticamente (y en la experiencia) no sucede así. El motivo se debe a que en la teoría cuántica hay un mecanismo distinto para el corrimiento de nivel, aunque implique todavía el campo electromagnético. Incluso en ausencia de fotones, el campo de radiación cuantizado tiene valores esperados no nulos para los *cuadrados* de las intensidades del campo electromagnético (fluctuaciones en vacío). Estos campos fluctuantes (junto con las fluctuaciones en vacío en el campo negatón-positón) actúan sobre la partícula cargada causando corrimiento en su energía. El desplazamiento de nivel mecanocuántico para un oscilador es del orden de

$$\frac{\Delta\omega_q}{\omega_0} \sim \omega_0\tau \log\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\right)$$

comparado con el corrimiento clásico debido a la emisión de radiación

$$\frac{|\Delta\omega_c|}{\omega_0} \sim (\omega_0\tau)^2$$

Se advierte que el desplazamiento de nivel mecanocuántico es comparable a, o mayor que, la anchura de línea. El pequeño desplazamiento radiativo de los niveles de energía de los átomos fue observado por primera vez por LAMB, en 1947 *, y se llama, en su honor, *desplazamiento de Lamb*. Una revisión muy legible de los aspectos teórico-cuánticos del problema, que sólo requiere un conocimiento rudimentario de la teoría cuántica de campos, ha sido hecha por WEISSKOPF **.

17.8. DISPERSION Y ABSORCION DE RADIACION POR UN OSCILADOR

En las secciones 14.7 y 14.8 se ha discutido la dispersión de radiación por partículas cargadas libres. Ahora deseamos considerar la dispersión de radiación por cargas ligadas. El primer ejemplo escogido es la dispersión de radiación de frecuencia ω por una sola partícula no relativista de masa m y carga e enlazada mediante una fuerza recuperadora, lineal, con simetría esférica $m\omega_0^2\boldsymbol{x}$. Como vamos a considerar oscilaciones en estado estacionario, nos está permitido emplear la ecuación de Abraham-Lorentz [17.9], en lugar de la forma integrodiferencial [17.51]. La ecuación de movimiento es, pues:

$$m(\ddot{\boldsymbol{x}} - \tau\dddot{\boldsymbol{x}} + \omega_0^2\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(t)$$

Si queremos tomar en cuenta otros efectos disipativos (correspondientes a otros modos cuánticos de amortiguamiento, además de la reemisión de fotones), podemos añadir al segundo miembro un término resistivo ($m\Gamma'\dot{\boldsymbol{x}}$), siendo

* W. E. LAMB y R. C. RUTHERFORD, *Phys. Rev.*, **72**, 241 (1947).
** V. F. WEISSKOPF, *Revs. Modern Phys.*, **21**, 305 (1949).

Γ' una constante de amortiguamiento, cuyas dimensiones son las de una frecuencia. El campo electromagnético incidente nos proporciona la fuerza impulsora. La ecuación de movimiento en la aproximación dipolar se nos convierte en

$$\ddot{x}+\Gamma'\dot{x}-\tau\dddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{e}{m}\epsilon E_0 e^{-i\omega t} \qquad [17.59]$$

en donde E_0 es el campo eléctrico en el centro de fuerzas, y ϵ es el vector de polarización incidente. La solución estacionaria es

$$x=\frac{e}{m}\frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma_t}\epsilon \qquad [17.60]$$

en la que

$$\Gamma_t(\omega)=\Gamma'+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\Gamma \qquad [17.61]$$

recibe el nombre de *constante de amortiguamiento total* o *anchura total.* La constante de amortiguamiento radiativa es $\Gamma=\omega_0^2\tau$.

El movimiento acelerado descrito por [17.60] da lugar a los campos de radiación. Según [14.18], el campo eléctrico de radiación es

$$\boldsymbol{E}_{\text{rad}}=\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{r}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{x}})]_{\text{ret}}$$

Por tanto, el campo de radiación con polarización ϵ' viene dado por

$$\epsilon'^*\cdot\boldsymbol{E}_{\text{rad}}=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\omega^2\frac{E_0 e^{-i\omega t}e^{ikr}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma_t}\left(\frac{\epsilon'^*\cdot\epsilon}{r}\right) \qquad [17.62]$$

De la definición [14.101] de sección eficaz diferencial de dispersión hallamos que la sección eficaz de dispersión para la radiación de frecuencia ω y polarización ϵ' es

$$\frac{d\sigma(\omega,\epsilon')}{d\Omega}=\left|\frac{r\epsilon'^*\cdot\boldsymbol{E}_{\text{rad}}}{E_0}\right|^2=\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2|\epsilon'^*\cdot\epsilon|^2\left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_t^2}\right] \qquad [17.63]$$

El factor que multiplica al corchete es precisamente la sección eficaz de Thomson para la dispersión por una partícula libre.

Para frecuencias muy pequeñas comparadas con la frecuencia de enlace ($\omega\ll\omega_0$), la sección eficaz se reduce a

$$\frac{d\sigma(\omega,\epsilon')}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2|\epsilon'^*\cdot\epsilon|^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \qquad [17.64]$$

A longitudes de onda largas la dispersión es, pues, inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda. Esta es la ley de Rayleigh de la dispersión, ya vista en los capítulos 9 y 16 de la dispersión para longitudes de onda grandes.

Para frecuencias cercanas a la frecuencia de enlace ω_0 la dispersión se hace muy grande, mostrando un comportamiento resonante típico. En las proximi-

dades de la resonancia puede representarse la sección eficaz por la aproximación

$$\frac{d\sigma(\omega, \epsilon')}{d\Omega} \simeq \frac{9}{16} \lambda\!\!\!^{-2}_0 \frac{\Gamma^2}{(\omega-\omega_0)^2+(\Gamma_t/2)^2} |\epsilon'^* \cdot \epsilon|^2 \qquad [17.65]$$

en donde $\lambda\!\!\!^{-}_0 = (c/\omega_0)$ es la longitud de onda (dividida por 2π) en la resonancia, $\Gamma = \omega_0^2 \tau$ es la constante de amortiguamiento radiativa, y $\Gamma_t \simeq \Gamma + \Gamma'$. Si sumamos las polarizaciones dispersadas y efectuamos una integración sobre todos los ángulos, resulta una sección eficaz total de dispersión:

$$\sigma_{\text{dis}}(\omega) \simeq \frac{3\pi}{2} \lambda\!\!\!^{-2}_0 \frac{\Gamma^2}{(\omega-\omega_0)^2+(\Gamma_t/2)^2} \qquad [17.66]$$

Esta expresión presenta la forma típica de línea resonante, cuya semianchura está dada por Γ_t y cuya sección eficaz de pico es:

$$\sigma_{\text{dis}}(\omega_0) = 6\pi \lambda\!\!\!^{-2}_0 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_t}\right)^2 \qquad [17.67]$$

A altas frecuencias ($\omega \gg \omega_0$) la sección eficaz [17.63] se aproxima al valor de Thomson para una partícula libre, prescindiendo del factor $(1+\omega^2\tau^2)^{-1}$ debido al amortiguamiento por radiación. En el dominio clásico podemos tomar este factor igual a la unidad: $\omega\tau \sim 1$, lo cual corresponde a fotones de energías $\hbar\omega \sim 137mc^2$. Los efectos cuánticos se hacen importantes cuando $\hbar\omega \sim mc^2$, tal como se vio en las secciones 14.7 y 17.6.

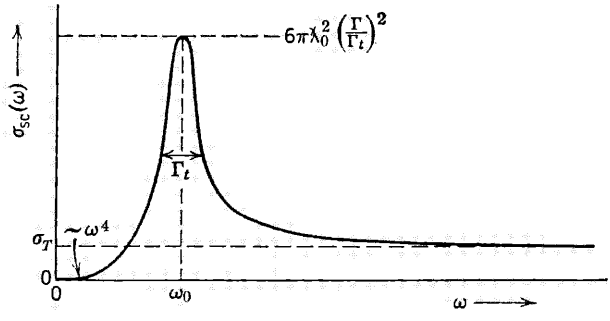


FIG. 17.3. Sección eficaz total para la dispersión de radiación por un oscilador en función de la frecuencia σ_T es la sección eficaz de dispersión de Thomson para una partícula libre.

La figura 17.3 muestra la sección eficaz de dispersión en todo el intervalo clásico de frecuencias.

La aguda dispersión resonante para $\omega = \omega_0$ se denomina *fluorescencia de resonancia*. Corresponde mecanocuánticamente a la absorción de radiación por un átomo, molécula o núcleo, en una transición desde su estado fundamental a un estado excitado con la subsiguiente emisión de la radiación en otras direcciones durante el proceso de desexcitación. El factor $6\pi\lambda\!\!\!^{-2}_0$ que aparece en la sección eficaz de pico se reemplaza mecanocuánticamente por el factor estadístico:

$$6\pi\lambda\!\!\!^{-2}_0 \rightarrow 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}_0 \frac{(2J_{ex}+1)}{2(2J_g+1)}$$

en donde J_g y J_{ex} son los momentos cinéticos del estado fundamental y excitado, y $4\pi\lambda_0$ es la máxima dispersión permisible para un estado cuántico único. Los restantes factores representan una suma sobre todos los subestados magnéticos finales y una media sobre los iniciales. El factor 2 es el peso estadístico asociado con las polarizaciones de la radiación incidente. El resultado clásico corresponde a $J_e=0$ y $J_{ex}=1$.

La absorción de radiación, considerada como distinta de la dispersión, ya se discutió para un oscilador en la sección 13.2. Allí los campos excitadores eran los de una partícula cargada rápida, pero el tratamiento (de la ecuación [13.15] a [13.24]) era lo suficientemente general como para que se nos permita una transcripción directa. Las únicas diferencias son que la Γ de la sección 13.2 debe reemplazarse por Γ_t [17.61], y que el campo eléctrico incidente hay que tomarlo como esencialmente monocromático. Por [13.24] hallamos que, en la aproximación dipolar, la energía absorbida por unidad de intervalo de frecuencia es

$$\frac{dE}{d\omega}=\frac{e^2}{m}|E_0(\omega)|^2\frac{2\omega^2\Gamma_t}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_t^2} \qquad [17.68]$$

Esta energía se extrae del haz incidente y se convierte en movimiento mecánico del oscilador. Una parte de ella es reemitida. Es la dispersión que acabamos de discutir. Otra parte es disipada por otras vías, descritas esquemáticamente por medio del término de rozamiento en [17.59]. Esta última parte es absorción verdadera en el sentido en que lo hemos utilizado en la sección 16.9 y en el capítulo 9. Como [17.68] representa la disipación total, por dispersión y no radiativa, resulta apropiado definir la *sección eficaz total* como la energía [17.68] absorbida por unidad de intervalo de frecuencia dividida por la energía incidente por unidad de área y unidad de frecuencia. El flujo incidente es $2\epsilon_0 c|E_g(\omega)|^2$. Por tanto, la sección eficaz total es

$$\sigma_t(\omega)=\frac{e^2}{\epsilon_0 mc}\frac{\omega^2\Gamma_t}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_t^2} \qquad [17.69]$$

Que, utilizando la definición de $\Gamma=\omega_0^2\tau$, puede expresarse

$$\sigma_t(\omega)=6\pi\lambda_0^2\frac{\omega^2\Gamma\Gamma_t}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_t^2} \qquad [17.70]$$

En las tres regiones $\omega\ll\omega_0$, $\omega\sim\omega_0$, $\omega\gg\omega_0$, se puede aproximar la sección eficaz mediante

$$\sigma_t(\omega)\simeq\begin{cases}6\pi\lambda_0^2\dfrac{\omega^2\Gamma\Gamma_t}{\omega_0^4}, & \omega\ll\omega_0\\ \dfrac{3\pi}{2}\lambda_0^2\dfrac{\Gamma\Gamma_t}{(\omega_0-\omega)^2+(\Gamma_t/)2^2}, & \omega\simeq\omega_0\\ 6\pi\lambda_0^2\dfrac{\Gamma\Gamma_t}{\omega^2}, & \omega\gg\omega_0\end{cases} \qquad [17.71]$$

Vemos que en las proximidades de la frecuencia de resonancia ω_0 la sección eficaz de absorción presenta la misma forma que la sección eficaz de disper-

sión, pero es mayor en un factor Γ_t/Γ. A frecuencias elevadas, $\Gamma_t \to \omega^2\tau$, de modo que la sección eficaz de absorción se aproxima al valor constante de Thomson (nuevamente hemos ignorado $\omega\tau$ frente a la unidad).

La diferencia entre la sección eficaz total y la sección eficaz de dispersión es la sección eficaz de absorción, llamada algunas veces *sección eficaz de reacción* $\sigma_r(\omega)$. Podemos expresar las tres secciones eficaces mediante una forma sugestiva basada en [17.70]:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\text{dis}}(\omega)\\ \sigma_r(\omega)\\ \sigma_t(\omega)\end{matrix}\right\} = 6\pi c^2 \frac{(\omega^2/\omega_0^2)\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_t^2} \left\{\begin{matrix}\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\Gamma\\ \Gamma'\\ \Gamma_t\end{matrix}\right. \qquad [17.72]$$

El denominador resonante es el mismo para las tres secciones eficaces. Los procesos radiativos son proporcionales a $(\omega^2/\omega_0^2)\Gamma = \omega^2\tau$. Los otros procesos disipativos (reacciones) son proporcionales a Γ'. El factor común $(\omega^2/\omega_0^2)\Gamma$ representa la radiación incidente. Para la dispersión aparece un segundo factor $(\omega^2/\omega_0^2)\Gamma$, mientras que en las reacciones lo hace el factor Γ'. En la sección eficaz de absorción o total aparece la anchura total Γ_t. Estos productos de constantes de amortiguamiento se presentan también mecanocuánticamente en la teoría de reacciones de resonancia.

La integral de la sección eficaz de absorción extendida a todas las frecuencias conduce a una relación llamada *regla de suma dipolar*. Se desprecian los efectos de amortiguamiento debido a la radiación. Esto es necesario si hemos de tener un comportamiento causal. La raíz no física de la ecuación cúbica [17.56] tiene aquí su contrapartida en un polo de [17.62] en el plano complejo ω lejos del origen, en el semiplano superior, para $\omega \simeq i/\tau$. Al integrar a todas las frecuencias este polo no físico contribuye de modo importante y erróneamente. Despreciar los efectos de reacción radiativa es equivalente a la hipótesis de que la anchura Γ_t en [17.70] sea una constante independiente de la frecuencia. En esta aproximación se demuestra fácilmente que la integral de $\sigma_t(\omega)$ extendida a todas las frecuencias es

$$\int_0^\infty \sigma_t(\omega)\, d\omega = \frac{\pi e^2}{2\epsilon_0 mc} \qquad [17.73]$$

Observamos que la regla de la suma depende de la carga y masa de la partícula, pero no de otras propiedades tales como ω_0 y Γ'. Equivale a la expresión [13.26] de la energía total absorbida por el sistema de los campos que pasan. Es tambien equivalente a la regla de suma de Kramers-Kronig [7.122] para la frecuencia de plasma ($\omega \operatorname{Im} \epsilon(\omega) = cN\sigma_t$).

Como puede deducirse de esta conexión con las relaciones de dispersión de Kramers-Kronig, la regla de suma dipolar es un enunciado general que es cierto tanto clásicamente como mecanocuánticamente, no importa cuán complicada sea la respuesta del sistema a la radiación incidente como función de la frecuencia. Depende sólo de tres requisitos físicos: *a)*, que sea aplicable la aproximación dipolar; *b)*, que los modos normales de oscilación del sistema se amortigüen en el tiempo (aunque sea muy lentamente) debido a las pérdidas resistivas siempre presentes, y *c)*, que a frecuencias elevadas los efectos de enlace no sean importantes y que la partícula responda como si estuviera libre (véase el problema 17.8).

Si se tiene un sistema de partículas independientes de cargas e_j y masas m_j enlazadas a un centro fijo, la regla de la suma tiene una generalización evidente:

$$\int_0^\infty \sigma_t(\omega)\, d\omega = \frac{\pi}{2\epsilon_0 c} \sum_j \frac{e_j^2}{m_j} \qquad [17.74]$$

Si las partículas están enlazadas entre sí por interacciones mutuas, debemos suprimir el movimiento del centro de masas. Es fácil demostrar que esto se consigue sustrayendo de la suma [17.74] un término (Q^2/M), en donde Q es la carga total del sistema de partículas y M la masa total. En el caso de un núcleo con Z protones y $N(=A-Z)$ neutrones, la regla de la suma se convierte en

$$\int_0^\infty \sigma_t(\omega)\, d\omega = \frac{\pi e^2}{2\epsilon_0 mc} \left(\frac{NZ}{A}\right) \qquad [17.75]$$

en donde e es la carga del protón, y m es la masa de un nucleón *.

REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

La historia de los intentos sobre modelos clásicos de partículas cargadas y las cuestiones asociadas está tratada con detalle por

WHITTAKER.

Las ideas de ABRAHAM, LORENTZ, POINCARÉ y otros se presentan por:

LORENTZ, secciones 26-37, 179-184, nota 18.

Tratamientos claros y breves de los efectos de energía propia y reacción radiativa vienen dados por:

ABRAHAM y BECKER, tomo II, secciones 13, 14, 66.
LANDAU y LIFSHITZ, *Classical theory of fields*, sección 9.9.
PANOFSKY y PHILLIPS, caps. 20 y 21.
SOMMERFELD, *Electrodynamics*, sección 36.

Una teoría clásica relativista del electrón puntual fue desarrollada primeramente por:

P. A. M. DIRAC, *Proc. Roy. Soc.*, **A167**, 148 (1938).

La teoría de Lorentz-Dirac se discute en

BARUT,
ROHRLICH,

donde se tratan con detalle otros aspectos de teoría clásica relativista de campos.

---

* De hecho la regla de la suma para el fotoefecto nuclear tiene un factor adicional $(1+x)$, en donde $x \sim \frac{1}{2}$ es la contribución debida a fuerzas de intercambio en el núcleo. Una forma física de comprender este aumento es imaginar las fuerzas de intercambio como causadas por la transferencia de mesones π cargados, virtuales, entre nucleones. Estos mesones cargados virtuales contribuyen a la corriente nuclear total. Como su razón e/m es mayor que la de los nucleones, dan lugar a un aumento de la regla de la suma sobre su valor ordinario [17.75].

La ecuación integrodiferencial de movimiento [17.51] parece haber sido obtenida por primera vez por:

IWANENKO y SOKOLOW, sección 35.

Ejemplos de la solución de la ecuación integrodiferencial de movimiento son dados por:

G. N. PLASS, *Rev. Modern Phys.*, **33**, 37 (1961).

PROBLEMAS

17.1. Una partícula no relativista de carga e y masa m se halla ligada por una fuerza recuperadora isótropa lineal de constante de fuerza $m\omega_0^2$.

Utilizando [17.13] y [17.16] de la sección 17.2, demuéstrese que la energía y momento angular de la partícula decrecen exponencialmente a partir de sus valores iniciales $e^{-\Gamma t}$, en donde $\Gamma=\omega_0^2\tau$.

17.2. Un electrón no relativista de carga $-e$ y masa m, ligado a un potencial coulombiano atractivo $(-Ze^2/4\pi\epsilon_0 r)$, se mueve en una órbita circular en ausencia de reacción radiativa.

a) Demuéstrese que tanto la ecuación de la energía [17.13] como la del momento cinético [17.16] nos conducen a la solución de variación lenta del radio de la órbita:

$$r^3(t)=r_0^3-9Z(c\tau)^3\frac{t}{\tau}$$

en donde r_0 es el valor de $r(t)$ para $t=0$.

b) En el caso de órbitas circulares en un átomo de Bohr, el radio de la órbita y el número cuántico principal n están relacionados por $r=n^2a_0/Z$. Si la probabilidad de transición para pasar de $n\to(n-1)$ se define como $-dn/dt$, demuéstrese que el resultado de *a)* está de acuerdo con el hallado en el problema 14.10.

c) Partiendo de *a)* calcúlese el valor numérico de los tiempos empleados por un mesón μ de masa $m=207m_e$ para caer de una órbita circular de número cuántico principal $n_1=10$ a otras con $n_2=4$, $n_2=1$. Esta es una estimación razonable del tiempo empleado por un mesón μ para caer a su órbita más baja después de su captura por un átomo aislado.

17.3. Un electrón se mueve en un campo coulombiano atractivo $(-Ze^2/4\pi\epsilon_0 r)$ con una energía de enlace $\mathcal{E}$ y momento cinético L. Su órbita es elíptica,

$$\frac{1}{r}=\frac{Ze^2m}{4\pi\epsilon_0 L}\left[1+\sqrt{1-\frac{32\pi^2\epsilon_0^2\mathcal{E}L^2}{Z^2e^4m}}\cos(\theta-\theta_0)\right]$$

La excentricidad ξ de la elipse viene dada por la raíz cuadrada que multiplica al coseno.

a) Calculando los valores medios adecuados sobre la órbita, demuéstrese que los cambios periódicos en la energía y momento cinético son

$$\frac{d\epsilon}{dt}=\frac{2^{1/2}}{96}\frac{Z^3e^8m^{1/2}}{\pi^3\epsilon_0^3c^3}\frac{\epsilon^{3/2}}{L^5}\left(3-\frac{32\pi^2\epsilon_0^2\mathcal{E}L^2}{Z^2e^4m}\right)$$

$$\frac{dL}{dt}=-\frac{2^{1/2}}{12}\frac{Ze^4}{\pi^2\epsilon_0^2m^{1/2}c^3}\frac{\epsilon^{3/2}}{L^2}$$

b) Si los valores iniciales de $\mathcal{E}$ y L son $\mathcal{E}_0$ y L_0, demuéstrese que

$$\epsilon(L)=\frac{Z^2e^4m}{32\pi^2\epsilon_0^2L^2}\left[1-\left(\frac{L}{L_0}\right)^3\right]+\frac{\epsilon_0}{L_0}L$$

Calcúlese la excentricidad de la elipse y demuéstrese que decrece desde su valor inicial como $(L/L_0)^{3/2}$, lo cual nos dice que la órbita tiende a hacerse circular a medida que transcurre el tiempo.

c) Compárense estos resultados con el caso especial de una órbita circular del problema 17.2.

Sugerencia: Al calcular las medias temporales, hágase uso de la ley de Kepler de la igualdad de las áreas ($dt=mr^2\,d\theta/L$) para convertir integrales temporales en integrales angulares.

17.4. La teoría relativista de Dirac (1938) de los electrones puntuales clásicos tiene como su ecuación de movimiento:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau}=F_\mu^{\text{ext}}+F_\mu^{\text{rad}}$$

en donde p_μ es el cuadrivector ímpetu de la partícula, τ es el tiempo propio de la partícula y F_μ^{rad} es la generalización covariante de la fuerza de reacción radiativa [17.8].

Utilizando el requisito de que cualquier fuerza debe satisfacer $F_\mu p_\mu=0$, demuéstrese que

$$F_\mu^{\text{rad}}=\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0mc^3}\left[\frac{d^2p_\mu}{d\tau^2}+\frac{p_\mu}{m^2c^2}\left(\frac{dp_\nu}{d\tau}\frac{dp^\nu}{d\tau}\right)\right]$$

17.5. *a)* Demuéstrese que para movimiento relativista en una dimensión la ecuación de movimiento del problema 17.4 puede expresarse en la forma:

$$\dot{p}-\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0mc^3}\left(\ddot{p}-\frac{pp^2}{p^2+m^2c^2}\right)=\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}\,f(\tau)$$

en donde p es el ímpetu en la dirección de movimiento, un punto significa diferenciación respecto del tiempo propio, y $f(\tau)$ es la fuerza newtoniana ordinaria como función del tiempo propio.

b) Demuéstrese que la sustitución de $p=mc\,\text{senh}\,y$ reduce la ecuación relativista a la forma de Abraham-Lorentz [17.9] en y y en τ. Exprésese la solución general para $p(\tau)$, con la condición inicial:

$$p(\tau)=p_0 \quad \text{para} \quad \tau=0$$

17.6. Una partícula no relativista de carga e y masa m se acelera en un movimiento unidimensional a través de una distancia d mediante un campo eléctrico constante. La idealización matemática es que a la partícula se aplica una fuerza externa $m\alpha$, mientras sus coordenadas están en el intervalo $(0, d)$. Sin amortiguamiento por radiación, la partícula, que inicialmente tiene una velocidad v_0, es acelerada uniformemente durante un tiempo

$$T=(-v_0/\alpha)+\sqrt{(v_0^2/\alpha^2)+(2d/\alpha)},$$

y emerge en $x=d$ con una velocidad final

$$v_1=\sqrt{v_0^2+2\alpha d}.$$

Con amortiguamiento por radiación, el movimiento se altera de forma que la partícula emplea un tiempo T' para atravesar la región y emerge con una velocidad v_1'.

a) Resuélvase la ecuación integrodiferencial de movimiento, amortiguamiento incluido, suponiendo que T y T' son grandes frente a τ. Represéntese un diagrama de velocidad frente al tiempo para el movimiento con amortiguamiento y sin él.

b) Demuéstrese que hasta el menor orden en τ,

$$T' = T - \tau\left(1 - \frac{v_0}{v_1}\right)$$

$$v_1' = v_1 - \frac{\alpha^2\tau}{v_1} T$$

c) Compruébese que la suma de la energía radiada y la variación de la energía cinética de la partícula es igual al trabajo efectuado por el campo aplicado.

17.7. Un modelo clásico para la descripción del ensanchamiento por colisión de las líneas espectrales es que el oscilador sea interrumpido por una colisión, después de haber oscilado durante un tiempo T, de modo que se pierde la coherencia del tren de ondas.

a) Tomando el oscilador que se utilizó en la sección 17.8 y suponiendo que la probabilidad de que suceda una colisión entre T y $(T+dT)$ es $(\nu e^{-\nu T}\, dT)$, en donde ν es la frecuencia media de colisión, demuéstrese que la distribución espectral promediada es:

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\Gamma + 2\nu}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} + \nu\right)^2}$$

de forma que la anchura de la línea es $(2\nu + \Gamma)$.

b) La intensidad de oscilador para el doblete del sodio a 5 893 Å es $f = 0{,}975$, de forma que la anchura natural es en esencia el valor clásico $\Delta\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Å. Estímese la anchura de Doppler de la línea, suponiendo que los átomos de sodio están en equilibrio térmico a una temperatura de 500 °K, y compárese con la anchura natural. Suponiendo una sección eficaz de colisión de 10^{-16} cm^2, determínese la anchura de colisión del doblete del sodio en función de la presión del vapor de sodio. ¿Para qué presión es la anchura por colisión igual a la anchura natural?, ¿a la anchura de Doppler?

17.8. Un oscilador de una sola partícula bajo la acción de un campo eléctrico aplicado $\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$ tiene momento dipolar dado por

$$\boldsymbol{p} = \alpha(\omega)\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$$

a) Demuéstrese que la sección eficaz de absorción dipolar puede expresarse como

$$\sigma_t(\omega) = \frac{2\pi}{c\epsilon_0}\left[-i\omega\alpha(\omega) + \text{c.c.}\right]$$

b) Unicamente utilizando los hechos de que todos los modos normales de oscilación deben tener cierto amortiguamiento y que la polarizabilidad $\alpha(\omega)$ debe aproximarse al valor para la partícula libre $(-e^2/m\omega^2)$ a altas frecuencias, demuéstrese que la sección eficaz de absorción satisface la regla de la suma de

dipolos:

$$\int_0^\infty \sigma(\omega)\, d\omega = \frac{\pi e^2}{2\epsilon_0 mc}$$

(Claramente, resulta relevante la discusión de las relaciones de dispersión de Kramers-Kronig del capítulo 7.)

APENDICE SOBRE UNIDADES Y DIMENSIONES

La cuestión de las unidades y dimensiones en electricidad y magnetismo ha ocupado durante años a gran número de físicos e ingenieros. Esta situación se halla en marcado contraste con el acuerdo casi universal en las unidades fundamentales de longitud (centímetro o metro), masa (gramo o kilogramo) y tiempo (segundo solar medio). Quizá la razón se deba a que las unidades mecánicas se definieron cuando la idea de patrones «absolutos» constituía un nuevo concepto (justamente antes de 1800), y fueron introducidos en el mundo profesional y comercial por un grupo de científicos eminentes (BORDA, LAPLACE y otros). Cuendo surgió el problema de las unidades electromagnéticas habían (y aún hay) muchos expertos. El propósito de este apéndice es añadir tanta luz y tan poco calor como sea posible.

1. UNIDADES Y DIMENSIONES; UNIDADES FUNDAMENTALES Y UNIDADES DERIVADAS

ABRAHAM, PLANK, BRIDGMAN *, BIRGE ** y otros, han insistido sobre la *arbitrariedad* en el *número* de unidades fundamentales y en las *dimensiones* de cualquier magnitud física en función de dichas unidades. El lector interesado en el asunto hará muy bien en familiarizarse con las excelentes series de artículos de BIRGE.

Los aspectos deseables de un sistema de unidades en cualquier campo son conveniencia y claridad. Por ejemplo, los físicos teóricos dedicados a la teoría relativista cuántica de campos y a la teoría de partículas elementales encuentran conveniente la *elección* de las constantes universales tales como el cuanto de acción de Planck y la velocidad de la luz en el vacío de forma que sean *adimensionales* y de *valor unidad*. El sistema de unidades resultante (llamado unidades «naturales») tiene solamente una unidad fundamental que acostumbra a tomarse: la longitud. Todas las magnitudes, bien sean longitud o tiempo o fuerza o energía, etc., se expresan mediante esa única unidad, siendo sus dimensiones potencias de la dimensión de dicha unidad. Nada hay inventado o menos fundamental en tal sistema que en otro en que las unidades fundamentales sean el metro, el kilogramo y el segundo (sistema MKS). Simplemente es un asunto de conveniencia ***.

Hay que decir algunas palabras sobre las unidades o patrones fundamentales, considerados como magnitudes independientes, y las unidades o patro-

* P. W. BRIDGMAN: *Dimensional Analysis*, Yale University Press (1931).

** R. T. BIRGE: *Am. Phys. Teacher* (actualmente, *Am. J. Phys.*), **2**, 41 (1934); **3**, 102, 171 (1935).

*** En la teoría cuántica de campos, las potencias de la constante de acoplamiento desempeñan el papel de otras unidades básicas al plantear el análisis dimensional.

nes derivados que se definen tanto en cantidad como en dimensión teórica y experimentalmente en función de las unidades fundamentales. La tradición hace que consideremos la masa (m), la longitud (l) y el tiempo (t) como magnitudes fundamentales. Pero con las magnitudes eléctricas no ha habido tradición. Consideremos, por ejemplo, la unidad de corriente. El ampère «internacional» (aceptado durante un largo periodo como unidad práctica de corriente) se define en función de la masa de plata depositada por unidad de tiempo en un proceso de electrólisis en un voltámetro adecuado. Tal unidad de corriente se considera como una unidad fundamental independiente de las unidades de masa, longitud y tiempo, ya que la cantidad de corriente que nos sirve de unidad se obtiene de una experiencia de electrólisis supuesta reproducible.

Por otro lado, el patrón de corriente aceptado en la actualidad, el ampère «absoluto», se define como la corriente que cuando fluye en cada uno de dos conductores muy largos, paralelos y de sección despreciable, separados por una distancia de un metro en el vacío, da lugar a una fuerza transversal por unidad de longitud de $2 \cdot 10^{-7}$ newton/metro entre los dos alambres. Significa esto que el ampère absoluto es una unidad derivada, ya que su definición se ha hecho mediante una fuerza mecánica entre dos alambres, mediante la ecuación [A.4] mencionada más adelante *. Gracias a esta definición, el ampère «absoluto» es exactamente la décima parte de la unidad e.m. de corriente, el abamperio. Desde 1948 el sistema de patrones electromagnéticos aceptado internacionalmente está basado en el metro, el kilogramo, el segundo y la anterior definición de ampère «absoluto», además de otras unidades derivadas para resistencia, voltaje, etc. Parece ser ésta una situación deseable que evita dificultades tales como las que se presentaron, en 1894, cuando por acuerdo del Congreso (basado en recomendaciones de una comisión internacional de ingenieros y científicos) se definieron unidades fundamentales independientes de corriente, voltaje y resistencia basadas en tres experiencias independientes (voltámetro de plata, pila patrón de Clark, columna de mercurio especificada) **. Poco después, debido a errores sistemáticos en los experimentos, fuera de la exactitud pretendida, resultó ¡que la ley de Ohm dejaba de ser válida por acuerdo del Congreso!

En el momento actual el Sistema Internacional (SI) tiene la masa definida en función del kilogramo patrón conservado en París, la longitud en función del *metro* como un cierto número de longitudes de onda en el vacío de una cierta transición atómica del átomo ^{86}Kr y el tiempo en función del *segundo*, que es un cierto número entero de periodos de una transición hiperfina en el ^{133}Cs. Debido a la precisión tan extremadamente elevada con que puede medirse la velocidad de la luz con lasers estabilizados (en realidad la medida, tanto de la frecuencia como de la longitud de onda, de una misma línea espec-

---

* Por tanto, a la constante de proporcionalidad k_2 de [A.4] se le da el valor $k_2 = 10^{-7}$ en el sistema M.K.S.A. Las *dimensiones* del amperio «absoluto», como algo distinto de su valor, dependen de las dimensiones asignadas a k_2. En el sistema M.K.S.A. habitual de unidades electromagnéticas se elige arbitrariamente la corriente eléctrica (I) como una *cuarta* dimensión básica. Como consecuencia, la carga tiene dimensiones It, y k_2 tiene dimensiones $mlI^{-2}t^{-2}$. Si k_2 se toma sin dimensiones, entonces la corriente tiene las dimensiones $m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$. La cuestión de si se introduce una cuarta dimensión básica como la corriente, o si las magnitudes electromagnéticas tienen dimensiones dadas por potencias (a veces fraccionarias) de las tres dimensiones mecánicas básicas es un tema puramente subjetivo y no tiene significación fundamental.

** Por ejemplo, véase F. A. LAWS, *Electrical Measurements*, McGraw-Hill, Nueva York (1917), págs. 705-706.

tral), es probable que pronto la definición del metro sea en función de la unidad de tiempo (^{133}Cs) y de un valor determinado para la velocidad de la luz en el vacío (véase la introducción para el último valor de c) *.

2. UNIDADES Y ECUACIONES ELECTROMAGNETICAS

En la discusión de unidades y dimensiones en electromagnetismo tomaremos como punto de partida la elección tradicional de longitud (l), masa (m) y tiempo (t) como dimensiones básicas independientes. Además, tomaremos la definición comúnmente aceptada de corriente como carga por unidad de tiempo ($I=dq/qt$). Esto significa que la relación entre la carga y la corriente tiene dimensión de tiempo **. Entonces la ecuación de continuidad para las densidades de carga y corriente toma la forma:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad [A.1]$$

Para simplificar, inicialmente vamos a considerar sólo fenómenos electromagnéticos en el vacío, salvo la presencia de cargas y corrientes.

La ley física fundamental que rige la electrostática es la ley de Coulomb, que se refiere a la fuerza que se ejerce entre dos cargas puntuales q y q', separadas por una distancia r. La expresión matemática de esta ley es

$$F_1 = k_1 \frac{qq'}{r^2} \qquad [A.2]$$

La constante k_1 es una constante de proporcionalidad cuyo valor y dimensiones, *o bien* quedan determinados por la propia ecuación si el valor y dimensiones de la unidad de carga se han establecido independiente *o* se eligen arbitrariamente con objeto de definir la unidad de carga. Dentro de nuestro esquema actual todo lo que está determinado por el momento es que el producto (k_1qq') tiene las dimensiones de (ml^3t^{-2}).

El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ es una magnitud derivada que corrientemente se define como la fuerza por unidad de carga. Más general sería definir el campo eléctrico proporcionalmente a la fuerza por unidad de carga, con una constante de proporcionalidad que fuese una constante universal, quizá con dimensiones, de forma que el campo eléctrico sería dimensionalmente distinto de fuerza por unidad de carga. Sin embargo, no se gana nada con esta libertad superflua en la definición de $\boldsymbol{E}$, ya que el campo eléctrico es la primera magnitud de campo derivada que se define. Solamente cuando definamos otras magnitudes de campo, puede que resulte conveniente incluir en las definiciones

* Para una discusión sobre el empleo de los fenómenos cuánticos para definir patrones, véase el artículo sobre metrología cuántica de B. W. PETLEY, en *Encyclopaedic Dictionary of Physics*, editor J. Thewlis, volumen suplementario 4, pág.s 354 ss, Pergamon, Oxford (1971).

** Desde el punto de vista de la relatividad especial sería más natural dar a la corriente las dimensiones de carga partida por longitud. Así, la densidad de corriente J y la densidad de carga ρ tendrían las mismas dimensiones y formarían un cuadrivector «natural». Esta es la elección que se hace en un sistema de Gauss modificado (véase nota al pie de la pág. 834, correspondiente a la tabla 4).

constantes de proporcionalidad dimensionales con el fin de ajustar las dimensiones y valores de estos campos respecto de las del campo eléctrico. Por tanto, sin pérdida de generalidad apreciable, el campo eléctrico debido a una carga puntual q puede definirse según [A.2] como la fuerza por unidad de carga

$$E = k_1 \frac{q}{r^2} \qquad [A.3]$$

Todos los sistemas de unidades conocidos por el autor utilizan esta definición de campo eléctrico.

En los fenómenos magnéticos estacionarios, las observaciones de AMPÈRE constituyen una base para especificar la interacción y definir la inducción magnética. De acuerdo con Ampère, la fuerza por unidad de longitud entre dos hilos paralelos e infinitamente largos separados por una distancia d, y transportan corrientes I e I', es:

$$\frac{dF_2}{dl} = 2k_2 \frac{II'}{d} \qquad [A.4]$$

La constante de proporcionalidad k_2 es análoga a la de k_1 de [A.2]. El número adimensional 2 se incluye en [A.4] porque posteriormente nos resultará conveniente en la especificación de k_2. A causa de nuestra elección de las dimensiones de corriente y carga implicadas en [A.1], las dimensiones de k_2 respecto de las de k_1 están determinadas. De [A.2] y [A.4] se halla fácilmente que la razón k_1/k_2 tiene dimensiones de una velocidad al cuadrado (l^2t^{-2}). Más aún, por comparación de los valores de las dos fuerzas mecánicas [A.2] y [A.4] para cargas y corrientes conocidas, el valor de la razón k_1/k_2 en el espacio vacío se puede calcular. El valor numérico viene dado muy aproximadamente por el cuadrado de la velocidad de la luz en el vacío. Por tanto, simbólicamente, podemos escribir:

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2 \qquad [A.5]$$

en donde c es la velocidad de la luz tanto en valor numérico como en dimensiones.

La inducción magnética $\boldsymbol{B}$ se deriva de las leyes de fuerza de Ampère; numéricamente es proporcional a la fuerza por unidad de corriente con una constante de proporcionalidad α que puede tener ciertas dimensiones elegidas según convenga. Así, para un conductor rectilíneo largo por el que pasa una corriente I, la inducción magnética a una distancia d tiene por módulo (y dimensiones):

$$B = 2k_2\alpha \frac{I}{d} \qquad [A.6]$$

Las dimensiones de la razón entre el campo eléctrico y la inducción magnética se pueden hallar de [A.1], [A.3], [A.5] y [A.6]. El resultado es que (E/B) tiene por dimensiones $(l/t\alpha)$.

La tercera y última relación para especificar las unidades y dimensiones electromagnéticas es la ley de inducción de Faraday, que conecta entre sí los fenómenos eléctricos y magnéticos. La ley experimental de que la fuerza elec-

tromotriz inducida alrededor de un circuito es proporcional a la velocidad con que varía el flujo magnético a través de él, toma en forma diferencial la forma siguiente:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + k_3 \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad [A.7]$$

en donde k_3 es una constante de proporcionalidad. Como ya se han establecido las dimensiones de $\boldsymbol{E}$ respecto de $\boldsymbol{B}$, las dimensiones de k_3 pueden expresarse mediante las magnitudes definidas previamente sin más que exigir que ambos términos de [A.7] tengan las mismas dimensiones. Encontramos así que k_3 tiene las dimensiones de α^{-1}. Más aún, k_3 *es igual a* α^{-1}. Se establece esto basándonos en la invarianza de Galileo de la sección 6.1. Pero la forma más sencilla de demostrar la igualdad consiste en expresar las ecuaciones de Maxwell mediante los campos aquí definidos:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi k_1 \rho \\ &\nabla \times \boldsymbol{B} = 4\pi k_2 \alpha \boldsymbol{J} + \frac{k^2 \alpha}{k_1} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ &\nabla \times \boldsymbol{E} + k_3 \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [A.8]$$

Entonces, para regiones sin fuentes se pueden combinar las dos ecuaciones con rotacional para obtener la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - k_3 \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad [A.9]$$

La velocidad de propagación de las ondas descritas por [A.9] está relacionada con la combinación de constantes que en ella aparecen. Como se sabe que ésta es la velocidad de la luz, tenemos:

$$\frac{k_1}{k_3 k_2 \alpha} = c^2 \qquad [A.10]$$

Combinando [A.5] con [A.10], se tiene:

$$k_3 = \frac{1}{\alpha} \qquad [A.11]$$

una igualdad válida tanto en módulo como en dimensiones.

3. LOS DIFERENTES SISTEMAS DE UNIDADES ELECTROMAGNETICAS

Los sistemas de unidades electromagnéticas difieren en su elección de los valores y dimensiones de las distintas constantes anteriores. Debido a las relaciones [A.5] y [A.11] sólo pueden (y deben) escogerse arbitrariamente dos constantes (pr ejemplo, k_1 y k_2). Sin embargo, es conveniente tabular las cuatro constantes (k_1, k_2, α, k_3) para los sistemas de unidades más comunes. Se dan éstas en la tabla I. Observemos que, salvo las dimensiones, las unidades e.m.u. y M.K.S.A. son muy parecidas, ya que difieren tan sólo en varias potencias de 10 en sus unidades mecánicas y electromecánicas. Los sistemas de Gauss y Heaviside-Lorentz difieren solamente en factores 4π. Solamente en estos dos sistemas tiene dimensiones la constante k_3. Según [A.7], resulta evidente que al tener k_3 las dimensiones recíprocas de una velocidad, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ tienen las mismas dimensiones. Más aún, con $k_3 = c^{-1}$, [A.7] nos dice que, para las ondas electromagnéticas en el vacío, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son también de igual valor.

TABLA 1. **Valores y dimensiones de las constantes electromagnéticas en los diferentes sistemas de unidades**

Sistema	k_1	k_2	α	k_3
Electrostático (e.s.u.)	1	$c^{-2}(t^2l^{-2})$	1	1
Electromagnético (e.m.u.)	$c^2(l^2t^{-2})$	1	1	1
Gaussiano	1	$c^{-2}(t^2l^{-2})$	$c(lt^{-1})$	$c^{-1}(tl^{-1})$
Heaviside-Lorentz	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}(t^2l^{-2})$	$c(lt^{-1})$	$c^{-1}(tl^{-1})$
M.K.S.A. Racionalizado	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=10^{-7}c^2$ $(ml^3t^{-4}I^{-2})$	$\frac{\mu_0}{4\pi}\equiv 10^{-7}$ $(mlt^{-2}I^{-2})$	1	1

Las dimensiones se dan detrás de los valores numéricos. El símbolo c corresponde a la velocidad de la luz en el vacío ($c=2{,}998\times10^{10}$ cm/s). Los cuatro primeros sistemas de unidades utilizan el centímetro, el gramo y el segundo como unidades fundamentales de longitud, masa y tiempo (l, m, t). El sistema M.K.S.A. utiliza el metro, el kilogramo y el segundo, más la corriente (I) como una cuarta dimensión, con el amperio como unidad.

Hasta ahora solamente hemos tratado campos electromagnéticos en el vacío, y, por tanto, sólo han aparecido los dos vectores fundamentales, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Resta la tarea de definir los campos macroscópicos $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$. Si se describen las propiedades electromagnéticas promediadas de un medio material mediante una polarización macroscópica $\boldsymbol{P}$ y una imanación $\boldsymbol{M}$, la forma general de las definiciones de $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ es:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\lambda\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{H}&=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}-\lambda'\boldsymbol{M}\end{aligned}\right\} \qquad [A.12]$$

en donde ϵ_0, μ_0, λ, λ' son constantes de proporcionalidad. No ganamos nada haciendo que $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{P}$ o $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{M}$ tengan dimensiones distintas. Por tanto, λ y λ' se eligen como números puros ($\lambda=\lambda'=1$ en sistemas racionalizados, $\lambda=\lambda'=4\pi$ en sistemas no racionalizados). Pero queda por elegir si $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{P}$ difieren dimensionalmente de $\boldsymbol{E}$, y si $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{M}$ difieren de $\boldsymbol{B}$. Por conveniencia y simplicidad se hace esta elección usualmente con objeto de hacer que las ecuaciones macroscópicas de Maxwell tengan una forma relativamente simple y clara. Antes de tabular las elecciones hechas en los distintos sistemas observaremos que en los medios isótropos lineales se tienen las relaciones

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\epsilon\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}&=\mu\boldsymbol{H}\end{aligned}\right\} \qquad [A.13]$$

Así, en [A.12], las constantes ϵ_0 y μ_0 son los valores de ϵ y μ en el vacío. La permisividad relativa de una sustancia (llamada frecuentemente *constante dieléctrica)* se define como la razón adimensional (ϵ/ϵ_0), mientras que la permeabilidad relativa (a menudo llamada *permeabilidad)* se define como (μ/μ_0).

La tabla 2 nos presenta los valores de ϵ_0 y μ_0, las ecuaciones de definición de $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$, las formas macroscópicas de las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de fuerza de Lorentz, en los cinco sistemas usuales de unidades de la tabla 1. Para todos los sistemas de unidades, la ecuación de continuidad entre carga y corriente viene dada por [A.1], cosa que se puede comprobar partiendo del primer par de ecuaciones de Maxwell que en cada caso aparecen en la tabla *. Análogamente, la ley de Ohm se expresa en todos los sistemas: $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$, siendo σ la conductividad.

4. CONVERSION DE ECUACIONES Y CANTIDADES ENTRE UNIDADES GAUSSIANAS Y M.K.S.A.

Los dos sistemas de unidades electromagnéticos de uso más común hoy en día son el gaussiano y el M.K.S.A. racionalizado. El sistema M.K.S.A. presenta la ventaja de ser el más conveniente en fenómenos prácticos a gran escala, en especial en aplicaciones de ingeniería. El sistema gaussiano es el más adecuado a los problemas microscópicos, electrodinámica de partículas cargadas individuales, etc. Como en el presente libro los problemas microscópicos son importantes, se ha considerado más conveniente utilizar unidades gaussianas **.

Las tablas 3 y 4 se han preparado para la conversión general de un sistema a otro. La tabla 3 es un esquema de conversión para los *símbolos y ecuaciones* que permite al lector convertir cualquier ecuación del sistema gaussiano al M.K.S.A., y viceversa. Son posibles esquemas más sencillos para convertir solamente *del* sistema M.K.S.A. *al* sistema gaussiano, y se pueden dar otros esquemas generales. Pero si mantenemos inalteradas todas las magnitudes mecánicas, la receta de la tabla 3 nos permite la conversión directa de magnitudes, que proceden de la interacción entre fuerzas electromagnéticas y mecáni-

* Algunos autores utilizan un sistema de unidades de Gauss modificado en el que la corriente se define por $I=(1/c)(dq/dt)$. En tal caso, la densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ de la tabla debe sustituirse por $c\boldsymbol{J}$, y la ecuación de continuidad es $\nabla\cdot\boldsymbol{J}+(1/c)(\partial\rho/\partial t)=0$. Véase también la nota al pie de la página correspondiente a la tabla 4.

** En la versión española, con la autorización del autor, y por expreso deseo de la editorial, se utiliza el sistema M.K.S.A. en todo el libro. *(N. del T.)*

TABLA 2. **Definiciones de ϵ_0, μ_0, D, H, ecuaciones de Maxwell macroscópicas y ecuación de fuerza de Lorentz en distintos sistemas de unidades**

Sistema	ϵ_0	μ_0	D, H	*Ecuaciones de Maxwell macroscópicas*				*Fuerza de Lorentz por unidad de carga*
Electrostático (e.s.u.)	1	c^{-2} (t^2l^{-2})	$D=E+4\pi P$ $H=c^2B-4\pi M$	$\nabla\cdot D=4\pi\rho$	$\nabla\times H=4\pi J+\frac{\partial D}{\partial t}$	$\nabla\times E+\frac{\partial B}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot B=0$	$E+v\times B$
Electromagnético (e.m.u.)	c^{-2} (t^2l^{-2})	1	$D=\frac{1}{c^2}E+4\pi P$ $H=B-4\pi M$	$\nabla\cdot D=4\pi\rho$	$\nabla\times H=4\pi J+\frac{\partial D}{\partial t}$	$\nabla\times E+\frac{\partial B}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot B=0$	$E+v\times B$
Gaussiano	1	1	$D=E+4\pi P$ $H=B-4\pi M$	$\nabla\cdot D=4\pi\rho$	$\nabla\times H=\frac{4\pi}{c}J+\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$	$\nabla\times E+\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot B=0$	$E+\frac{v}{c}\times B$
Heaviside-Lorentz	1	1	$D=E+P$ $H=B-M$	$\nabla\cdot D=\rho$	$\nabla\times H=\frac{1}{c}\left(J+\frac{\partial D}{\partial t}\right)$	$\nabla\times E+\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot B=0$	$E+\frac{v}{c}\times B$
M.K.S.A. Racionalizado	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$ $(l^2t^4m^{-1}l^{-3})$	$4\pi\times10^{-7}$ $(mll^{-2}t^{-2})$	$D=\epsilon_0E+P$ $H=\frac{1}{\mu_0}B-M$	$\nabla\cdot D=\rho$	$\nabla\times H=J+\frac{\partial D}{\partial t}$	$\nabla\times E+\frac{\partial B}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot B=0$	$E+v\times B$

Cuando es necesario, las dimensiones de las magnitudes se dan entre paréntesis. El símbolo c representa la velocidad de la luz en el vacío con dimensiones (lt^{-1}).

TABLA 3. **Tabla de conversión de símbolos y fórmulas**

Magnitud	*Gaussiano*	*M.K.S.A.*
Velocidad de la luz	c	$(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$
Campo eléctrico (potencial, voltaje)	$\boldsymbol{E}(\Phi, V)$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}\,\boldsymbol{E}(\Phi, V)$
Desplazamiento	$\boldsymbol{D}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}\,\boldsymbol{D}$
Densidad de carga (carga, densidad de corriente, corriente, polarización)	$\rho(q, \boldsymbol{J}, I, \boldsymbol{P})$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\rho(q, \boldsymbol{J}, I, \boldsymbol{P})$
Inducción magnética	$\boldsymbol{B}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\,\boldsymbol{B}$
Campo magnético	$\boldsymbol{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_0}\,\boldsymbol{H}$
Magnetización	$\boldsymbol{M}$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\,\boldsymbol{M}$
Conductividad	σ	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$
Constante dieléctrica	ϵ	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Permeabilidad	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Resistencia (impedancia)	$R(Z)$	$4\pi\epsilon_0 R(Z)$
Inductancia	L	$4\pi\epsilon_0 L$
Capacitancia	C	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}C$

Los símbolos de masa, longitud, tiempo, fuerza y otras magnitudes no específicamente electromagnéticas permanecen inalterados. Para convertir cualquier ecuación en unidades de Gauss a la correspondiente ecuación en unidades M.K.S.A., se reemplazan en ambos miembros de la ecuación los símbolos que aparecen en la tabla bajo la denominación «gaussiano» por los correspondientes símbolos «M.K.S.A.» colocados a la derecha. También está permitida la transformación inversa. Como los símbolos de longitud y tiempo permanecen inalterados, las magnitudes que difieren dimensionalmente una de otra sólo en potencias de longitud y (o) tiempo se agrupan juntas siempre que sea posible.

cas (por ejemplo, la constante de estructura fina $e^2/\hbar c$ y la frecuencia del plasma $\omega_p^2 = 4\pi ne^2/m$) sin consideraciones adicionales. La tabla 4 es una tabla de conversión de unidades que permite al lector expresar una cierta cantidad de cualquier entidad física como un cierto número de unidades M.K.S.A. o unidades gaussianas cgs.

TABLA 4. **Tabla de conversión de cantidades dadas de una magnitud física**

Magnitud física	*Símbolo*	*M.K.S.A. racionalizado*	*Gaussiano*	
Longitud	l	1 metro (m)	10^2	centímetros (cm)
Masa	m	1 kilogramo (kg)	10^3	gramos (g)
Tiempo	t	1 segundo (seg)	1	segundos (seg)
Frecuencia	ν	1 hertz (Hz)	1	hertz (Hz)
Fuerza	F	1 newton	10^5	dinas
Trabajo	W	1 joule	10^7	ergs
Energía	U			
Potencia	P	1 watt	10^7	ergs seg^{-1}
Carga	q	1 coulomb (coul)	3×10^9	statcoulombios
Densidad de carga ...	ρ	1 coul m^{-3}	3×10^3	statcoul cm^{-3}
Corriente	I	1 ampère (coul seg^{-1})	3×10^9	statamperes
Densidad de corriente.	J	1 amp m^{-2}	3×10^5	statamp cm^{-2}
Campo eléctrico	E	1 volt m^{-1}	$1/3\times10^{-4}$	statvolt cm^{-1}
Potencial	Φ, V	1 volt	$\frac{1}{300}$	statvolt
Polarización	P	1 coul m^{-2}	3×10^5	statcoul cm^{-2} (statvolt cm^{-1})
Desplazamiento	D	1 coul m^{-2}	$12\pi\times10^5$	statvolt cm^{-1} (statcoul cm^{-2})
Conductividad	σ	1 ohm m^{-1}	9×10^9	seg^{-1}
Resistencia	R	1 ohm	$1/9\times10^{-11}$	seg cm^{-1}
Capacitancia	C	1 farad	9×10^{11}	cm
Flujo magnético	ϕ, F	1 weber	10^8	gauss cm^2 o maxwells
Inducción magnética...	B	1 weber m^{-2}	10^4	gauss
Campo magnético ...	H	1 ampère-vuelta m^{-1}	$4\pi\times10^{-3}$	oersted
Magnetización	M	1 weber m^{-2}	$\frac{1}{4\pi}\times10^4$	gauss
Autoinducción *	L	1 henry	$1/9\times10^{-11}$	

La tabla se ha dispuesto de forma tal que dada una cantidad de una magnitud física, expresada bien sea en unidades M.K.S.A. o gaussianas, se puede expresar como un número equivalente de unidades en el otro sistema. Así, las entradas en cada fila corresponden a la misma cantidad expresada en diferentes unidades. Todos los factores de 3 (excepto los que corresponden a exponentes) deberían reemplazarse, en los trabajos de gran precisión, por (2,99792456), que es el valor numérico de la velocidad de la luz. Por ejemplo, en la fila correspondiente al desplazamiento (D), la entrada ($12\pi\cdot10^5$) es en realidad ($2{,}99792\cdot4\pi\cdot10^5$). En los casos en que una cierta unidad posee una denominación sobre la que hay acuerdo o es de uso común, se da tal nombre. En otro caso, se debe leer simplemente tantas unidades gaussianas, o M.K.S.A., o SI.

* Prevalece cierta confusión sobre la unidad de autoinducción en unidades gaussianas. Esto es debido al empleo por algunos autores de un sistema de unidades gaussianas modificado en el que la corriente se mide en unidades electromagnéticas, de modo que la relación entre carga y corriente es $I_m=(1/c)\,(dq/dt)$. Como la autoinducción se define mediante el voltaje inducido $V=L(dI/dt)$ o la energía $U=(1/2)LI^2$, la elección de la corriente realizada en la sección 2 significa que la unidad de autoinducción gaussiana para nosotros es igual en valor y dimensiones (t^2l^{-1}) a la unidad electrostática de autoinducción. La corriente electromagnética I_m se relaciona con nuestra unidad gaussiana de corriente I por la relación $I_m=(1/c)I$. Por la definición energética de autoinducción vemos que la autoinducción electromagnética L_m se relaciona con nuestra autoinducción gaussiana L a través de $L_m=c^2L$. Así, L_m tiene dimensiones de longitud. El sistema de Gauss modificado utiliza generalmente la unidad de autoinducción electromagnética, así como la de corriente. Por tanto, la relación de voltaje es $V=(L_m/c)\,(dI_m/dt)$. La conexión numérica entre unidades es:

$$1 \text{ henry} = \frac{1}{9}\cdot 10^{-11} \text{ unidades de Gauss (e.s.u.)} = 10^9 \text{ e.m.u.}$$

FORMULAS VECTORIALES

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

$$\nabla\times\nabla\psi=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}$$

$$\nabla\cdot(\psi\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi+\psi\nabla\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\nabla\times(\psi\boldsymbol{a})=\nabla\psi\times\boldsymbol{a}+\psi\nabla\times\boldsymbol{a}$$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$$

Si $\boldsymbol{x}$ es el vector de posición de un punto con respecto a un cierto origen, de módulo $r=|\boldsymbol{x}|$, y $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}/r$ es un vector unitario radial, entonces:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{x}=3 \qquad \nabla\times\boldsymbol{x}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{n}=\frac{2}{r} \qquad \nabla\times\boldsymbol{n}=0$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{n}=\frac{1}{r}\,[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})]\equiv\frac{\boldsymbol{a}_\perp}{r}$$

En las expresiones siguientes ϕ, ψ y $\boldsymbol{A}$ son funciones escalares o vectoriales bien comportadas, V es un volumen tridimensional, cuyo elemento de volumen es d^3x, S es una superficie cerrada bidimensional que limita V, cuyo elemento de área es da y cuya normal exterior en da es $\boldsymbol{n}$.

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, d^3x = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, da \qquad \text{(Teorema de la divergencia)}$$

$$\int_V \nabla\psi\, d^3x = \int_S \psi \boldsymbol{n}\, da$$

$$\int_V \nabla \times \boldsymbol{A}\, d^3x = \int_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}\, da$$

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi)\, d^3x = \int_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot \boldsymbol{n}\, da \qquad \text{(Primera identidad de Green)}$$

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, d^3x = \int_S \phi\boldsymbol{n} \cdot \nabla\psi\, da \qquad \text{(Teorema de Green)}$$

En las expresiones siguientes S es una superficie abierta y C es el contorno que la limita, cuyo elemento de longitud es dl. La normal $\boldsymbol{n}$ a S está definida por la regla de la mano derecha respecto al sentido de la integral curvilínea alrededor de C.

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, da = \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \qquad \text{(Teorema de Stokes)}$$

$$\int_S \boldsymbol{n} \times \nabla\psi\, da = \int_C \psi\, d\boldsymbol{l}$$

DONDE ENCONTRAR MATERIAL CLAVE SOBRE FUNCIONES ESPECIALES

Esféricas

Polinomios de Legendre $P_l(x)$
Funciones asociadas de Legendre $P_l^m(x)$
Armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$

Cilíndricas

Funciones de Bessel $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$
Funciones de Bessel modificadas $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$
Funciones de Bessel esféricas $j_l(x)$, $n_l(x)$, $h_l^{(1,2)}(x)$
Raíces de $J_m(x) = 0$
Raíces de $J'_m(x) = 0$
Identidades con funciones de Bessel
Integrales de Airy, relación con las funciones de Bessel

Desarrollos en funciones ortogonales

Función de Bessel (intervalo finito en ρ)
Función de Bessel (intervalo infinito en ρ)
Función propia de la función de Green
Serie de Fourier
Integral de Fourier
Polinomio de Legendre
Armónico esférico

Sean $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ los vectores unitarios ortogonales asociados con las direcciones de los ejes de coordenadas indicadas a la izquierda y sean A_1, A_2 y A_3 las correspondientes componentes de $\boldsymbol{A}$. Entonces:

Cartesianas $(x_1, x_2, x_3 = x, y, z)$

$$\nabla\psi = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + \boldsymbol{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right) + \boldsymbol{e}_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}$$

Cilíndricas (ρ, ϕ, z)

$$\nabla\psi = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right) + \boldsymbol{e}_3\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Esféricas (r, θ, ϕ)

$$\nabla\psi = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_2\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_3\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_1) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{sen}\,\theta A_2) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{sen}\,\theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right] + \boldsymbol{e}_2\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right] + \boldsymbol{e}_3\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\left[\text{Nótese que } \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)\right]$$

BIBLIOGRAFIA

ABRAHAM, M., y BECKER, R.: *Electricity and Magnetism*, Blackie, Londres (1937), trad. de la 8.ª ed. alemana de *Theorie der Elektrizität*, tomo I.

— — *Theorie der Elektrizität*, tomo II, *Elektronentheorie*, Tuebner, Leipzig (1933).

ABRAMOWITZ, M., e I. A. STEGUN, eds.: *Handbook of Mathematical Functions*, U.S. National Bureau of Standards (1964), Dover, Nueva York, 1965.

ADLER, R. B., CHU, L. J., y FANO, R. M.: *Electromagnetic Energy Transmission and Radiation*, Wiley, Nueva York (1960).

AHARONI, J.: *The Special Theory of Relativity*, Oxford University Press (1965^2).

ALFVÉN, H., y C.-G. FÄLTHAMMAR: *Cosmical Electrodynamics*, Oxford University Press (1963^2).

ANDERSON, J. L.: *Principles of Relativity Physics*, Academic, Nueva York (1967).

ARFKEN, G.: *Mathematical Methods for Physicists*, Academic, Nueva York (1970^2).

ARGENCE, E., y T. KAHAN: *Theory of waveguides and Cavity Resonators*, Blackie, Londres (1967).

ARZELIÈS, H.: *Relativistic Kinematics*, Pergamon, Oxford (1966).

—, *Relativistic Point Dynamics*, Pergamon, Oxford (1972).

BAKER, B. B., y E. T. COPSON: *Mathematical Theory of Huygens' Principle*, 2.ª ed., Oxford University Press (1950).

BALDIN, A. M., GOL'DANSKII, V. I., y ROZENTHAL, I. L.: *Kinematics of Nuclear Reactions*, Pergamon Press, Nueva York (1961).

BARUT, A. O.: *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Macmillan, Nueva York (1964).

Bateman Manuscript Project: *Higher Transcendental Functions*, 3 vols., ed. por A. Erdélyi, McGraw-Hill, Nueva York (1953).

— — — *Tables of Integral Transforms*, 2 vols., ed. por A. Erdélyi, McGraw-Hill, Nueva York (1954).

BATES, L. F.: *Modern Magnetism*, Cambridge University Press (1961^4).

BEAM, W. R.: *Electronics of Solids*, McGraw-Hill, Nueva York (1965).

BEKEFI, G.: *Radiation Processes in Plasma*, Wiley, Nueva York (1966).

BERGMANN, P. G.: *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1942).

BIEBERBACH, L.: *Conformal Mapping*, Chelsea, Nueva York (1964).

BLATT, J. M., y WEISSKOPF, V. F.: *Theoretical Nuclear Physics*, Wiley, Nueva York (1952).

BOHM, D.: *The Special Theory of Relativity*, Benjamin, Nueva York (1965).

BOHR, N.: «Penetration of Atomic Particles through Matter», *Kgl. Danske Videnskab. Selskab Mat-fys. Medd.*, **XVIII**, núm. 8 (1948).

BORN, M., y WOLF, E.: *Principles of Optics*, Pergamon Press, Nueva York (1970^2).

BÖTCHER, C. J. F.: *Theory of Electric Polarization*, Elsevier, Nueva York (1952).

BOWMAN, J. J., T. B. A. SENIOR, y P. L. E. USLENGHI: *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, North-Holland, Amsterdam (1969).

BOYD, T. J. M., y J. J. SANDERSON: *Plasma Dynamics*, Nelson, London y Barnes and Noble, Nueva York (1969).

BRAILSFORD, F.: *Physical Principles of Magnetism*, Van Nostrand, Londres (1966).

BRILLOUIN, L.: *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic, Nueva York (1960).

BUDDEN, K. G.: *Lectures on Magnetoionic Theory,* Gordon and Breach, Nueva York (1964).

— *Radio Waves in the Ionosphere,* Cambridge University Press (1961).

BYERLY, W. E.: *Fourier Series and Spherical Harmonics,* Ginn, Boston (1893), también reimpreso por Dover.

CAIRO, L., y T. KAHAN: *Variational Techniques in Electromagnetism,* Blackie, Londres (1965).

CLEMMOW, P. C.: *The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields,* Pergamon, Oxford (1966).

CLEMMOW, P. C., y J. P. DOUGHERTY: *Electrodynamics of Particles and Plasmas,* Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).

COLLIN, R. E.: *Field Theory of Guided Waves,* McGraw-Hill, Nueva York (1966).

CONDON, E. U., y ODISHAW, H., ed.: *Handbook of Physics,* McGraw-Hill, Nueva York (1967²).

CORBEN, H. C., y STEHLE, P.: *Classical Mechanics,* 2.ª ed., Wiley, Nueva York (1960).

COURANT, R., y HILBERT, D.: *Methods of Mathematical Physics,* 2 vols., Wiley-Interscience, Nueva York (1962).

COWLING, T. G.: *Magnetohydrodynamics,* Interscience, Nueva York (1957).

CULLWICK, E. G.: *Electromagnetism and Relativity,* Longmans, Londres (1959²).

CHANDRASEKHAR, S.: *Plasma Physics,* University of Chicago Press (1960).

CHURCHILL, R. V.: *Fourier Series and Boundary Value Problems,* McGraw-Hill, Nueva York (1963)².

DEBYE, P.: *Polar Molecules,* Dover, Nueva York (1945).

DENNERY, P., y A KRZYWICKI: *Mathematics for Physicists,* Harper and Row, Nueva York (1967).

DURAND, E.: *Electrostatique and Magnétostatique,* Masson, París (1953).

ECKER, G.: *Theory of Fully Ionized Plasmas,* Academic, Nueva York (1972).

EINSTEIN, A., H. A. LORENTZ, H. MINKOWSKI y H. WEYL: *The Principle of Relativity,* colección de artículos con notas de A. Sommerfeld, Dover, Nueva York (1952).

FABELINSKII, I. L.: *Molecular Scattering of Light,* Plenum, Nueva York (1968).

FANO, R. M., L. J. CHU, y R. B. ADLER: *Electromagnetic Fields, Energy and Forces,* Wiley, Nueva York (1960).

FEYNMAN, R. P., R. B. LEIGHTON, y M. SANDS: *The Feynman Lectures on Physics,* 3 volúmenes, Addison-Wesley, Reading, Mass (1963).

FRENCH, A. P.: *Special Relativity,* Norton, Nueva York (1968). [Public. en español, *Relatividad especial,* Reverté, Barcelona (1974).]

FRIEDMAN, B.: *Principles and Techniques of Applied Mathematics,* Wiley, Nueva York (1956).

FRÖLICH, H.: *Theory of Dielectrics,* Oxford University Press (1949).

GALEJS, J.: *Terrestrial Propagation of Long Electromagnetic Waves,* Pergamon, Oxford (1972).

GIBBS, W. J.: *Conformal Transformations in Electrical Engineering,* Chapman and Hall, Londres (1958).

GLASSTONE, S., y LOVBERG, R. H.: *Controlled Thermonuclear Reactions,* Van Nostrand, Princeton, N. J. (1960).

GOLDSTEIN, H.: *Classical Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950). [Traducido al español, *Mecánica clásica,* Aguilar (1960).]

GRADSHTEYN, I. S., e I. M. RYZHIK: *Tables of Integrals, Series and Products,* preparada por Yu. V. Geronimus y M. Yu. Tseytlin, traducción al inglés, editada por A. Jeffrey, Academic, Nueva York (1965⁴).

DEGROOT, S. R.: *The Maxwell Equations,* Studies in Statistical Mechanics, vol. IV, North-Holland, Amsterdam (1969).

DEGROOT, S. R., e I. G. SUTTORP: *Foundations of Electrodynamics,* North-Holland, Amsterdam (1972).

HADAMARD, J.: *Lectures on Cauchy's Problem,* Yale University Press (1923); reimpresión por Dover (1952).

HAGEDORN, R.: *Relativistic Kinematics,* Benjamin, Nueva York (1963).

HALLÉN, E.: *Electromagnetic Theory*, Chapman-Hall, Londres (1962).

HARRINGTON, R. F.: *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, Nueva York (1961).

HEITLER, W.: *Quantum Theory of Radiation*, Oxford University Press (1954[3]).

HESS, W. N.: *The Radiation Belt and Magnetosphere*, Blaisdell, Waltham, Mass. (1968).

HILDEBRAND, F. B.: *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962).

HOLT, E. H., y R. E. HASKELL: *Foundations of Plasma Dynamics*, Macmillan, Nueva York (1965).

HUGHES, W. F., y F. J. YOUNG: *The Electromagnetodynamics of Fluids*, Wiley, Nueva York (1966).

IWANENKO, D., y A. SOKOLOW: *Klassische Feldtheorie*, Akademic-Verlag, Berlín (1953); traducido de la edición rusa (1949).

JAHNKE-EMDE-LOSCH: *Tables of Higher Functions*, 6.ª edición, revisada por F. Losch, Teubner, Stuttgart y McGraw-Hill, Nueva York (1960).

JEANS, J. H.: *Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, 5.ª ed., Cambridge University Press (1948).

JEFFREYS, H., y B. S. JEFFREYS: *Methods of Mathematical Physics*, 3.ª ed., Cambridge University Press (1956).

JOHNSON, C. C.: *Field and Wave Electrodynamics*, McGraw-Hill, Nueva York (1965).

JONES, D. S.: *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon, Oxford (1964).

JORDAN, E. C., y K. G. BALMAIN: *Electromagnetic Waves and Radiating*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1968).

KACSER, C.: *Introduction to the Special Theory of Relativity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1967).

KELVIN, LORD (Sir. W. Thomson): *Reprints of Papers on Electrostatics and Magnetism*, 2.ª ed., Macmillan, Londres (1884).

KELLOG, O. D.: *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlín (1959), reimpreso por Ungar, Nueva York.

KERKER, M.: *The Scattering of Light and other Electromagnetic Radiation*, Academic, Nueva York (1969).

KILMISTER, C. W.: *Special Theory of Relativity, Selected Reading in Physics*, Pergamon, Oxford (1970).

KING, R. W. P., y WU, T. T.: *Scattering and Diffraction of Waves*, Harvard University Press (1959).

KITTEL, C.: *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, Nueva York (1971[4]) [traducido al español, *Introducción a la física del estado sólido*, Reverté, Barcelona (1975)].

KRAUS, J. D.: *Antennas*, McGraw-Hill, Nueva York (1950).

LANDAU, L. D., y LIFSHITZ, E. M.: *The Classical Theory of Fields*, 3.ª ed. revisada en inglés, traducido por M. Hamermesh, Pergamon, Oxford y Addison-Wesley, Reading, Mass. (1971) [traducido al español, *Teoría clásica de campos*, Reverté, Barcelona)].

— — *Electrodynamics of Continuous Media*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1960).

LIGHTHILL, M. J.: *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge Univerity Press (1958).

LINHART, J. G.: *Plasma Physics*, North-Holland, Amsterdam (1960).

LIVINGSTON, M. S., y J. P. BLEWETT: *Particle Accelerators*, McGraw-Hill, Nueva York (1962).

LORENTZ, H. A.: *Theory of Electrons* (1915[2]), Dover Publications, Nueva York (1952).

MAGNUS, W., y OBERHETTINGER, F.: *Special Functions of Mathematical Physics*, Chelsea, Nueva York (1949).

MAGNUS, W., F. OBERHETTINGER, y R. P. SONI: *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, Nueva York (1966).

MARCUVITZ, N.: *Waveguide Handbook*, M.I.T. Radiation Laboratory Series, vol. 10, McGraw-Hill, Nueva York (1951).

MASON, M., y WEAVER, W.: *The Electromagnetic Field*, University of Chicago Press (1929); reimpreso por Dover.

MAXWELL, J. C.: *Treatise on Electricity and Magnetism,* 2 vols., reimpreso por Dover, Nueva York (1954³).

MØLLER, C.: *Theory of Relativity,* Clarendon Press, Oxford (1972²).

MONTGOMERY, C. G., R. H. DICKE, y E. M. PURCELL: *Principles of Microwave Circuits,* M.I.T. Radiation Laboratory Series, vol. 8, McGraw-Hill, Nueva York (1948). También disponible como reimpresión Dover.

MORSE, P. M., y FESHBACH, H.: *Methods of Theoretical Physics,* 2 vols., McGraw-Hill, Nueva York (1953).

NORTHROP, T. G.: *The Adiabatic Motion of Charged Particles,* Interscience-Wiley, Nueva York (1963).

PANOFSKY, W. K. H., y PHILLIPS, M.: *Classical Electricity and Magnetism,* Addison-Wesley, Reading, Mass. (1962²).

PAULI, W.: *Theory of Relativity,* Pergamon Press, Nueva York (1958), trad. de un artículo publicado en la *Encyklopedia der mathematischen Wissenschaften,* vol. V19, Tuebner, Leipzig (1921), con notas suplementarias del autor (1956).

PENFIELD, P., y H. A. HAUS: *Electrodynamics of Moving Media,* M.I.T. Press (1967).

PERSICO, E., E. FERRARI, y S. E. SEGRÉ: *Principles of Particle Accelerators,* Benjamin, Nueva York (1968).

PÓLYA, G., y G. SZEGÖ: *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics,* Annals of Mathematics Series, núm. 27, Princeton University Press (1951).

RAMO, S., J. R. WHINNERY, y T. VAN DUZER: *Fields and Waves in Communication Electronics,* Wiley, Nueva York (1965).

ROBINSON, F. N. H.: *Macroscopic Electromagnetism,* Pergamon, Oxford (1973).

ROHRLICH, F.: *Classical Charged Particles,* Addison-Wesley, Reading, Mass. (1965).

ROSE, D. J., y CLARK, M.: *Plasma and Controlled Fusion,* M.I.T.-Wiley, Nueva York (1961).

ROSENFELD, L.: *Theory of Electrons,* North-Holland, Amsterdam (1951).

ROSSER, W. G. V.: *Introductory Relativity,* Butterworths, Londres (1967).

ROSSI, B.: *High-Energy Particles,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1952).

ROSSI, B., y S. OLBERT: *Introduction to the Physics of Space,* McGraw-Hill, Nueva York (1970).

ROTHE, R., OLLENDORF, F., y POLHAUSEN, K.: *Theory of Functions as Applied to Engineering Problems,* Technology Press, Cambridge, Mass. (1933).

SARD, R. D.: *Relativistic Mechanics,* Benjamin, Nueva York (1970).

SCHELKUNOFF, S. A.: *Advanced Antenna Theory,* Wiley, Nueva York (1952).

— *Applied Mathematics for Engineers and Scientists,* Van Nostrand, Nueva York (1965²).

— *Electromagnetic Fields,* Blaisdell, Nueva York (1963).

SHELKUNOFF, S. A., y FRIIS, H. T.: *Antennas, Theory and Practice,* Wiley, Nueva York (1952).

SCHOTT, G. A.: *Electromagnetic Radiation,* Cambridge University Press (1912).

SCHWARTZ, H. M.: *Introduction to Special Relativity,* McGraw-Hill, Nueva York (1968).

SCHWINGER, J., y SAXON, D. S.: *Discontinuities in Waveguides,* Gordon and Breach, Nueva York (1968).

SEGRE, E.: ed.: *Experimental Nuclear Physics,* vol. 1, Wiley, Nueva York (1953).

SIEGBAHN, K., dir.: *Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy,* North-Holland, Amsterdam, e Interscience, Nueva York (1955).

SILVER, S., ed.: *Microwave Antenna Theory and Design,* M.I.T. Radiation Laboratory Series, vol. 12, McGraw-Hill, Nueva York (1949).

SIMON, A.: *Introduction to Thermonuclear Research,* Pergamon, Nueva York (1959).

SLATER, J. C.: *Microwave Electronics,* McGraw-Hill, Nueva York (1950).

SLATER, J. C., y FRANK, N. H.: *Electromagnetism,* McGraw-Hill, Nueva York (1947).

SMITH, J. H.: *Introduction to Special Relativity,* Benjamin, Nueva York (1965).

SMYTHE, W. R.: *Static and Dynamic Electricity,* McGraw-Hill, Nueva York (1969²).

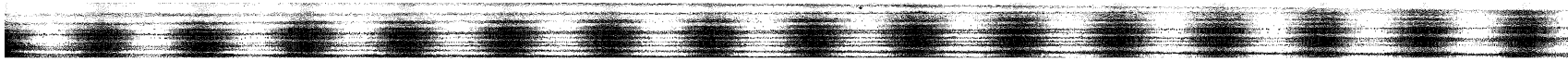
SOMMERFELD, A.: *Electrodynamics,* Academic, Nueva York (1952).

— *Optics,* Academic, Nueva York (1954).

— *Partial Differential Equations,* Academic, Nueva York (1949).

SPITZER, L.: *Physics of Fully Ionized Gases,* Interscience, Nueva York (1956).

STONE, J. M.: *Radiation and Optics,* McGraw-Hill, Nueva York (1963).
STRATTON, J. A.: *Electromagnetic Theory,* McGraw-Hill, Nueva York (1941).
TAYLOR, E. F., y WHEELER, J. A.: *Spacetime Physics,* Freeman, San Francisco (1966).
THIRRING, W. E.: *Principles of Quantum Electrodynamics,* traducido por J. Berstein, Academic, Nueva York (1958).
THOMSON, J. J.: *Recent Researches in Electricity and Magnetism,* Clarendon Press, Oxford (1893).
TITCHMARSH, E. C.: *Introduction to the Theory of Fourier Integrals,* 2.ª ed., Oxford University Press (1948).
TONNELAT, M. A.: *Electromagnetic Theory and Relativity,* Reidel, Holland (1966).
TRANTER, C. J.: *Integral Transforms in Mathematical Physics,* 2.ª ed., Methuen, Londres (1956).
VAN BLADEL, J.: *Electromagnetic Fields,* McGraw-Hill, Nueva York (1964).
VAN VLECK, J. H.: *Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities,* Oxford University Press (1932).
WAIT, J. R.: *Electromagnetic Waves in Stratified Media,* Pergamon, Oxford (1962).
WALDRON, R. A.: *Theory of Guided Electromagnetic Waves,* Van Nostrand-Reinhold, Londres (1970).
WATSON, G. N.: *Theory of Bessel Functions,* 2.ª ed., Cambridge University Press (1952).
WERT, C. A., y THOMSON, R. M.: *Physics of Solids,* McGraw-Hill, Nueva York (1970^2).
WENTZEL, G.: *The Quantum Theory of Fields,* Interscience, Nueva York (1949).
WHITTAKER, E. T.: *History of the Theories of Aether and Electricity,* 2 vols., Londres; vol. 1: *The Classical Theories* (1910, revisado y ampliado 1951); vol. 2: *The Modern Theories* 1900-1926 (1953); reimpreso por Harper Torchbooks, Nueva York (1960).
WHITTAKER, E. T., y WATSON, G. N.: *A Course in Modern Analysis,* Cambridge University Press (1950^4).
WILLIAMS, E. J.: «Correlation of Certain Collision Problems with Radiation Theory», *Kgl. Danske Videnskab. Selskab Mat-fys. Medd.,* **XIII**, núm. 4 (1935).
WOOTEN, F.: *Optical Properties of Solids,* Academic, Nueva York (1972).
ZIMAN, J. M.: *Principles of the Theory of Solids,* Cambridge University Press (1964).



INDICE DE MATERIAS

Aberturas. Momentos dipolares efectivos de las, 416-419.
Abraham-Lorentz. Ecuación de movimiento de, 798.
— — — — — generalizada relativista de Dirac de la, 822.
— — Modelo de electrón, 800-804.
— — — — — Dificultades, 804-805.
Absorción resonante, 293.
— — por la atmósfera terrestre, 431.
— — por un oscilador, 818.
Acción invariante de Lorentz, 582.
Aceleración. Transformación de la, 572.
Acimutal. Problemas de potencia de simetría, 93-96.
Adición relativista de velocidades, 531-532.
Admitancia. Definición en función del campo de la, 635.
— paralelo-relativa de un obstáculo en una guía de ondas. Expresión variacional, 383-384.
Agua. Indice de refracción y coeficiente de absorción del, 298.
— del mar. Constante de atenuación, 297.
Alfvén. Indice de refracción efectivo para las ondas de, 498.
— Modificaciones por la corriente de desplazamiento, 498.
— Ondas de, 494.
— Velocidad de, 495.
Amortiguamiento de ondas electromagnéticas, 497.
— de oscilaciones en una cavidad, 363-364.
— — del plasma, 504.
— radiativo de un oscilador, 814 (véase también *Reacción de radiación*).
Ampère. Ley de, 178-180.
Amplitud de dispersión frontal. Desarrollo multipolar, 792.
— — — — Expresión integral, 442.
— — — — Relación con la constante dieléctrica, 465.
— — — — — con la sección eficaz total, 461.
Anchura finita del espectro en frecuencia de una cavidad con pérdidas, 363.
— — — — — de un oscilador con amortiguamiento, 814.
Angulo(s) de dispersión cuadrático medio, 658.
— — máximo y mínimo en la dispersión elástica por átomos, 655-656.
— — múltiple, 656-657.
— — de Rutherford, 654-655.
— — Sección eficaz atómica total, 656-657.
— de incidencia. Reflexión y refracción, 285.
Anomalía del electrón y del muón, 568.
Antena como problema de condiciones de contorno, 410.
— corta lineal, 403.
— en una guía de ondas, 394-395.
— lineal excitada en su centro, 408-412.
Apantallamiento sobre la dispersión de pequeño ángulo, 655-656.
— Efecto de los electrones atómicos sobre la radiación de frenado, 727-731.
— magnético con una capa permeable, 204-206.
Aproximación dipolar en cálculos de pérdida de energía, 633.
Armónicos esféricos. Formas explícitas, 101-102.
— — y momento cinético, 756.
— — Operadores para, 755.
— — Ortogonalidad, 101-102.
— — Regla de suma, 105.
— — Relación de completitud, 101.
— — Teorema de adición, 103-105.
— — vectoriales. Definición, 759.
— — — — Propiedades de ortogonalidad, 759, 782.
— — — — Regla de suma, 766.
— — — — Tabla de cuadrados, 766.
— — Y_{em}, 101-102.
Atenuación en cavidades resonantes, 319.
— Coeficiente de (véase *Coeficiente de absorción*).
— en las guías de ondas, 353-356.
— de ondas magnetohidrodinámicas, 497.
— — en un medio conductor, 302-305.
— de las oscilaciones del plasma, 496.
— Tratamiento por perturbación de las condiciones de contorno, 357, 366.
Ausencia de campos de radiación monopolares, 401.
Autoenergía. Definición covariante, 807-810.
— Electrostática clásica, 803.
— e ímpetu, 805-810.

Autofuerza. Cálculo de Abraham-Lorentz de la, 800-804.
Autoinducción de líneas de transmisión, 268.
Azul del cielo. Explicación de Rayleigh, 430.

Babinet. Principio de, 446-448.
Bessel. Ecuación de, 106.
— Funciones de, 107.
— — Comportamiento para argumentos grandes y pequeños, 108, 111, 754.
— — Desarrollos mediante las, 109, 112, 122, 135, 136, 707, 709.
— — esféricas, 753-754.
— — — Formas explícitas, 754.
— — — wronskianos, 754.
— — Fórmulas recursivas, 108, 754.
— — modificadas, I_ν, K_ν, 110-111.
— — Ortogonalidad en intervalo finito, 109, 134.
— — — infinito, 113, 135.
— — de primera especie, J_ν, 107.
— — Relación(es)con las integrales de Airy, 328, 685.
— — — mediante las, 122, 129, 135, 137, 208.
— — Representación(es) integral de, 136.
— — de segunda especie, N_ν, 107.
— — Serie de Fourier-Bessel, 110, 135.
— — — para J_ν, 107.
— — — de Kapteynde, 110, 510.
— — — de Neumannde, 110.
— — — de Schlomilchde, 110.
— — de tercera especie $H_\nu^{(1)}$ y $H_\nu^{(2)}$, 107.
— — transformadas de Fourier de K_0 y K_1, 634.
Betthe. Acoplamiento direccional de, 472.
Betthe-Heitler. Fórmula para la radiación de frenado, 723.
Bibliografía, 835.
Bidimensionales. Potenciales, 72-76.
Biot y Savart. Ley de, 174-178.
Birrefringencia de la ionosfera, 300.
BMT. Ecuación, 564.
Born. Aproximación de, 428.
Brewster. Angulo de, 289.

Campo(s) de aceleración de una carga en movimiento arbitrario, 668.
— de una carga en movimiento arbitrario, 668.
— — — uniforme. Transformada de Fourier, 644.
— — — en el vacío, 562.
— y densidades de carga en vértices bidimensionales y a lo largo de aristas, 76-80.
— dipolares de una capa electrostática, 36-38.
— — de un cuerpo imanado, 198, 200-202.
— — dispersados por obstáculos pequeños, 419.
— — electrostáticos, 142, 145.
— — de una esfera conductora en un campo uniforme, 62.
— — — dieléctrica en un campo uniforme, 154-156.
— — magnetostático, 187, 189.
— — Oscilantes eléctricos, 402.
— — — magnéticos, 405.
— eléctricos multipolares (véase *Campos multipolares*).
— magnético, 13-14, 194, 240 (véase también *Inducción magnética*).
— — Densidad de flujo (véase *Inducción magnética*).
— — H. Condiciones de contorno, 19, 195-196.
— — multipolares (véase *Multipolos, Campos multipolares*).
— Multipolares, 757-760.
— — Desarrollo de campos arbitrarios sin fuentes, 759.
— — eléctricos y magnéticos, 758.
— — Su empleo para describir la dispersión, 783-789.
— — Energía de los, 762.
— — Momento cinético de los, 762-765.
— — Problemas de condiciones de contorno, 789.
— — Propiedades de paridad, 765.
— — — de la zona próxima, 760.
— — — de radiación, 760.
— — Relación con las fuentes de radiación, 768-772.
— de radiación, 400.
— — de una carga en movimiento arbitrario, 668.
— — de un multipolo, 761.
— en el vacío, 562.
— — Transformada de Fourier, 635, 699.
— vectorial. Descomposición en partes longitudinal y transversal, 228.
Capacidad. Definición de, 49.
— de un disco circular. Valor de Cavendish, 22.
— Principios variacionales para la, 53.
Captura de electrones por núcleos. Radiación emitida, 740-745.
Carácter discreto de la carga, 4-5.
— — del número de fotones, 3.
Carga. Carácter discreto de la, 4-5.
— Cuantización según Dirac, 260-266.
— eléctrica, 28.
— — Carácter discreto, 4-5.
— — Invariancia, 555-560.
— imagen (véase *Imágenes*).
Cauchy. Condiciones de contorno de, 42.
Causal. Relación entre D y E, 315.
Causalidad, 231, 312-319.
— Consecuencias en la dispersión, 316-317.
— en el contraste de Coulomb, 230, 274.
— su falta en la reacción de radiación, 812.
— en la relatividad especial, 528-529.
Cavendish. Aparato de, 7.
Cavidad resonante, 359-362.
— — de esferas concéntricas, 393.
— — esférica, 791.
— — Frecuencias de resonancia, 360.

— — Pérdidas de potencia en una, 362-366.
— — *Q* de una, 362-366, 791.
Centro de masas. Cinemática relativista del, 577.
— — de la energía electromagnética, 626, 627.
Cherenkov, 648-651.
— Angulo de, 649.
Cierre (véase *Completitud*).
Cilíndricas. Problemas de condiciones de contorno en coordenadas, 105.
Cinemática relativista, 575-577.
— — Notación en, 568-569.
Circular. Campo de una corriente, 182.
Clásico. Radio del electrón, 692, 804.
Clausius-Mossotti. Relación de, 159.
Coeficiente de absorción del agua en función de la frecuencia, 298.
— — Definición, 818.
— — — del mar a bajas frecuencias, 298.
— — de un gas ideal, 430-431.
— de reflexión de un obstáculo en una guía de ondas, 382.
— de transmisión de un obstáculo en una guía de ondas, 382.
— de viscosidad, 480.
Coherencia de la dispersión por un conjunto de centros, 425.
— — frontal de radiación por cargas casi libres, 695.
Colisiones de Coulomb. Pérdida de energía, 629-633.
— — Radiación emitida en, 714-720.
Complementarias. Pantallas, 446.
Completitud de un conjunto de funciones ortogonales, 68.
Comportamiento a altas frecuencias de la constante dieléctrica, 296.
Compton. Modificación de la dispersión de Rayleigh por el efecto, 693.
Condiciones de contorno. Cauchy, Dirichlet y Neumann, 42-43.
— — en la guía de ondas dieléctrica, 371.
— — Inconsistencia en la aproximación de Kirchhoff para la difracción de las, 435-436.
— — en la interfase entre dos medios, 17-21, 150, 196.
— — mixtas. Ejemplos, 125-208.
— — para las ondas TE y TM en una guía, 348.
— — Perturbación de las, 357-359.
— — en la superficie de un buen conductor, 361-362.
— — — de un dispersor en función de la impedancia superficial, 785.
— de radiación para los campos asintóticos, 436.
Conducción en un medio en movimiento, 481, 575.
Conductividad. Su efecto sobre los campos, 302-305.
— Movimiento de un fluido con infinita, 481.
— Relación con la constante dieléctrica compleja, 294.
Conductor. Atenuación en un, 303-304.
— Campos en el interior del, 303-304, 343-344.
— — en la superficie de un, 341-346.
— Condiciones de contorno en un, 361-362.
— Definición de, 49.
— Impedancia superficial, 346.
— Profundidad de penetración, 304, 343.
Congelación de las líneas de fuerza, 482, 487-488.
Conservación de la carga, 174.
— — y corriente, 2.
— — — electromagnética en forma covariante, 611-612.
— — — de la energía y el ímpetu del campo en forma, 611.
— — — — de partículas y campos, 243.
— — — del ímpetu de partículas y campos, 245, 246, 616.
— de la energía entre partículas y campos, 242-246, 615.
— del momento cinético de campos y partículas, 270.
Constante dieléctrica de un conductor, 294.
— — Definición de, 150.
— — de la ionosfera, 300.
— — Límite de alta frecuencia, 295.
— — Modelo de, 292-293.
— — para las ondas de Alfvén, 499.
— — de un plasma, 295.
— — y propagación de señal, 319.
— — Propiedades analíticas de la, 315-316.
— — Relación con la amplitud de dispersión frontal, 465.
— — — de dispersión, 317.
Constricción. Efecto de, 488-490.
Continuidad en la interfase de ***E*** tangencial y ***B*** normal, 18-21.
Contracción de longitudes (véase *FitzGerald-Lorentz. Contracción de*).
Contraste y causalidad, 239, 274.
— de Coulomb, 227, 228, 229.
— de Lorentz, 227.
— de radiación o transversal, 227.
Contravariante. Vector, 541.
Conversión de cantidades entre los sistemas gaussiano y MKSA, 834.
— de ecuaciones entre los sistemas gaussiano y MKSA, 833.
Coordenadas cilíndricas. Ecuación de Laplace en, 105.
— — Función delta en, 110.
— — — de Green en, 122, 135.
— — Ondas en, 346-348.
— — Separación de variables en, 106.
— esféricas, 86.
— — Función delta en, 114-115.
— — Ecuación de Laplace en, 86.
Correspondencia. Principio de Bohr, 708.
Corriente circular. Potencial vector y campo, 182-185.
— en una columna de plasma, 488-490.
— de desplazamiento, 224.

Corriente superficial y discontinuidad de H, 20, 195-196, 341-342.
— — efectiva, 346.
— — magnética efectiva, 200.
— en la superficie de un buen conductor, 346.
— Unidades internacional y absoluta de intensidad de, 826, 828.
Corrimiento de fase en la dispersión por una esfera, 787.
— de nivel(es) energéticos debido a la reacción de radiación, 813-815.
— — de la frecuencia del oscilador por amortiguamiento de radiación, 812-815.
Coulomb. Definición del contraste de, 227.
Covariancia de la electrodinámica, 555-560.
— — en transformaciones de Lorentz, 555-560.
— de las leyes físicas en transformaciones de Lorentz, 541.
Covariante(s) para la ecuación de la fuerza Lorentz, 559, 581.
— para la energía e ímpetu electromagnéticos, 805-810.
— por la fuerza de reacción radiativa, 822.
— de Maxwell, 559.
— vector, 541.
Cuadridivergencia, 544.
— de un 4-vector, 544.
Cuadritensores de orden k, 541-542.
Cuadrivector. Corriente, 466.
— potencial, 557.
Cuantización de la carga. Argumento de Dirac, 260-267.
Cuantos virtuales. Ejemplos en colisiones atómicas y nucleares, 749-750.
— — Espectro para una carga puntual, 735-736.
— — Método de los, 731-736.
— — Tratamiento de la radiación de frenado relativista, 736.
Curvatura de las líneas del campo magnético y velocidad de deriva de las partículas, 596.

Darwin. Lagrangiano de, 602-604.
Debye. Distancia de apantallamiento de, 503-506.
— en pérdida de energía en un plasma, 652.
Delbrück. Dispersión de radiación de, 11.
Densidad(es) de carga en aristas y puntas agudas, 78, 98.
— — y de corriente de una partícula cargada. Expresión covariante, 620.
— — — 4-vector, 557.
— — inducida por una carga puntual cerca de una esfera conductora, 57.
— — magnética efectiva, 198.
— — superficial cerca de una arista en dos dimensiones, 78.
— — — de una cavidad o punta cónica, 98.
— — — de un orificio circular en un plano conductor, 138-139.
— — — y discontinuidad de E y D normales, 15, 36, 151.
— — — y fuerza sobre la superficie de un conductor, 48.
— — — magnética efectiva, 198.
— — — de polarización, 153, 154-156.
— — — Potencial de, 36.
— — — sobre una esfera conductora, 57, 58, 63.
— — — — con una línea cargada en su interior, 120.
— — en la superficie de un conductor, 24.
— de corriente. Ecuación de continuidad, 2, 174.
— — Fuerza en un campo magnético, 178.
— — Imanación producida, 186.
— de energía electromagnética, 243.
— — electrostática, 46.
— Fluctuaciones de la, 433.
— de fuerza, 616.
— — de Lorentz, 616.
— hamiltoniana en el tensor de tensiones canónico, 610-611.
— de ímpetu electromagnético, 245-246.
— — en los medios macroscópicos, 246.
— — como parte del tensor de esfuerzos covariante simétrico, 614.
— lagrangiana para campos continuos, 605.
— magnéticas de carga y corriente, 258.
— — Difusión de, 482.
— — Propiedades de transformación, 259-260.
— de momento cinético del campo electromagnético. Forma covariante de la ley de conservación, 613, 615.
Deriva E y B de una partícula en campos combinados eléctrico y magnético, 591.
— de partículas en campos magnéticos no uniformes, 593-597.
Derivada convectiva en el flujo de fluidos, 480.
— — en la ley de Faraday, 218.
Desarrollo(s) (véase *Desarrollos ortonormales*).
— de la función de Green e^{ikr}/R en ondas esféricas, 755.
— en modos normales de un campo arbitrario, 377-378.
— — — en una guía de ondas, 375-381.
— multipolar de campos electromagnéticos, 757-760.
— — de la energía de interacción, 146-147.
— — para una fuente localizada en una guía de ondas, 412-419.
— — de la función de Green para la ecuación de ondas, 755.
— — de una onda plana escalar, 781-783.
— — — vectorial, 781-783.
— — del potencial electrostático, 140.
— — de la radiación de una antena lineal, 776-781.
— en onda(s) esféricas de campos electromagnéticos, 759.
— — — de la función de Green e^{ikr}/R, 755.
— — — de una onda plana escalar, 781.

— — — — — — — en armónicos esféricos, 781-783.
— — — — — — — en armónicos esférico — — — — — — vectorial, 783-789.
— — plana polarizada circularmente en campos multipolares, 781-783.
— ortonormales, 67.
— — en armónicos esféricos, 103.
— — Fourier en intervalo finito, 68.
— — — — infinito, 69, 113.
— — Legendre, 91.
— — vectoriales para los campos en una guía de ondas, 743-744.
— de $|x-x'|$ en coordenadas cilíndricas, 122, 135.
— — — esféricas, 94.
— — en ondas planas, 124.
Desintegración beta. Radiación emitida durante la, 738-740.
— de partículas, 575.
— de piones, 529.
Desplazamiento. Corriente de, 224.
— eléctrico $\boldsymbol{D}$, 150.
Desviación de frecuencia $\Delta\omega$ en una cavidad resonante, 366.
— — de la línea resonante de un oscilador con amortiguamiento de radiación, 813.
Diádica. Notación, 271.
Diafragma en una guía de ondas, 381-386.
Diamagnetismo. Definición de, 15-16.
Dieléctricos, 148-151.
— anisótropos. Ondas en, 336.
— Condiciones de contorno con, 151-156.
— Energía electrostática en, 163.
— Método de imágenes, 151-156.
— Problemas de condiciones de contorno con, 151-156.
Diferencia de fase entre $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ en un conductor, 303, 304, 344.
— — y polarización elíptica, 281.
Difracción por una abertura circular, 449-453.
— Aproximación de Kirchhoff, 437, 439.
— — de Rayleigh-Sommerfeld, 438-439.
— — de Smythe-Kirchhoff, 451.
— Comparación de las aproximaciones escalar y vectorial, 453.
— por una esfera en el límite de longitudes de onda cortas, 455-460.
— Factor de oblicuidad, 439.
— de Fresnel, 449 (véase también *Difracción*).
— — Fórmula para la velocidad de la luz en medios en movimiento, 572, 593.
— — y de Fraunhofer, 449.
— por pequeñas aberturas, 453-454, 473.
— Principio de Babinet, 446-448.
— por un semiplano, 473.
— Teorema vectorial de Smythe, 446.
— Teoría escalar de Huygens-Kirchhoff, 434-439.
— — vectorial de la, 443-446.
Difusión de campos magnéticos en magnetohidrodinámica, 482.
Dilatación del tiempo, 529.
Dimensiones. Arbitrariedad para las magnitudes físicas, 825-827.
— de las magnitudes electromagnéticas, 830, 831.
Dinámica de partículas cargadas relativistas en campos externos, 572.
— del spin de partículas relativistas en campos externos, 564.
Dipolo eléctrico (véase *Campos dipolares; Momento dipolar*).
Dirac. Condición de cuantización para la carga eléctrica, 259.
— Ecuación de movimiento relativista con reacción de radiación, 822.
— Función delta (véase *Función delta*).
— Monopolo magnético, 260.
Dirichlet. Condiciones de contorno, 42-43.
Discontinuidad. Fórmulas para una interfase en movimiento, 21.
— en guías de ondas, 32-383.
— en la interfase de $\boldsymbol{H}$ tangencial y $\boldsymbol{D}$ normal, 19-21, 36.
— del potencial al atravesar una capa dipolar, 38.
Discusión cualitativa, 323-325.
Disipativos. Efectos (véase *Absorción. Atenuación* y *Amortiguamiento*).
Dispersión en el agua, 297-298.
— anómala, 292.
— por carga(s) cuasi-libres, 694-696.
— — puntual, 690-693.
— y casualidad, 313-314.
— coherente e incoherente, 425-426, 694-696.
— Corrimiento de fase por, 787.
— de Delbrück, 11.
— Descripción multipolar de la, 783-789.
— en dieléctricos, 291-299.
— elástica de partículas rápidas por átomos, 653-658.
— por una esfera a longitudes de onda corta, 455-460.
— por fluctuaciones de densidad del fluido, 433.
— Fórmulas de Compton y Klein-Nishina, 693.
— en la ionosfera, 300.
— para longitudes de onda largas, 419-426.
— de luz por luz, 11.
— modificaciones mecanocuánticas, 693.
— por un oscilador, 815-820.
— de partículas. Efectos del apantallamiento electrónico sobre, 655-656.
— — — de tamaño finito del núcleo sobre, 656-657.
— por una pequeña esfera conductora, 423, 788-789.
— — — — — dieléctrica, 420.
— en plasmas, 296, 503.
— y propagación de un impulso, 305-309.
— de Rayleigh, 431.
— — y azul del cielo, 431.
— o relaciones de Kramers-Kronig, 317.
— resonante, 817-820.

Dispersión de Rutherford en función de la transferencia de ímpetu, 720.
— — Sección eficaz, 654-655.
— de sombra, 456-457.
— Teoría de perturbaciones de la, 426-434.
— de Thomson de la radiación, 690-693.
Distancia inversa entre dos puntos. Desarrollo en funciones de Bessel, 121.
Distribución angular (véase también *Radiación de frenado; Radiación multipolar y Radiación*).
— — y en frecuencia de la radiación de una carga en movimiento periódico, 707.
— — de la radiación de una carga relativista acelerada, 675-676, 686.
— — — — de un cuadrupolo oscilante, 407, 767.
— — — — de un dipolo oscilante, 403, 767.
— — — — de partículas relativistas, 673-676.
— en frecuencia. Fórmulas explícitas, 680-683.
— — de la radiación emitida por una carga relativista en movimiento circular instantáneo, 688-689.
— — — — — por un electrón en el equivalente clásico del átomo de hidrógeno, 708-709.
— superficial de carga y dipolos, 35-37.
— — de momento dipolar eléctrico, 37-38.
Divergencia en cuatro dimensiones, 544.
— Teorema de la, 32.
Doppler. Efecto, 517-518.

Ecuación(es) bidimensional en una guía de ondas transversal, 346, 347, 348, 350.
— de continuidad para carga y corriente, 2, 174.
— — en forma covariante, 557, 615.
— — para un fluido, 480, 500.
— — para el flujo de energía electromagnética, 243.
— de la fuerza. Abraham-Lorentz, 798.
— — para un fluido, 480, 484-485.
— — en forma covariante, 559, 581.
— — integrodiferencial, 810-812.
— — con reacción radiativa Dirac, 822.
— integrales duales con funciones de Bessel, 129, 208.
— de Laplace en coordenadas cartesianas, 71.
— — — cilíndricas, 105.
— — — esféricas, 103.
— — — en dos dimensiones, 77, 83.
— — — — — utilizando coordenadas polares, 77.
— — Solución general, 114.
— macroscópicas. Deducción para la electrostática, 148-151.
— — — para la magnetostática, 192-196.
— de Maxwell deducidas de un lagrangiano, 607.
— — en diferentes sistemas de unidades, 832.
— — en forma covariante, 559.
— — macroscópicas, 14, 224.
— — en los medios macroscópicos, 13-17.
— — — — — Deducción de las, 232-238.
— — Soluciones en ondas esféricas, 757-760.
— — — — planas, 276-280.
— de movimiento con reacción radiativa, 798, 799, 810, 822.
— de ondas, 227, 229.
— — en forma covariante, 557, 617.
— — para fotones con mesa, 607-608.
— — Función de Green para la, 229-232.
— — de Helmholtz, 435.
— — Soluciones en forma covariante, 620.
— — — — en ondas esféricas, 752-756.
Efecto(s) de densidad en la pérdida de energía, 642-648.
— Doppler, 517-518.
— — relativista, 529-531.
— — transversal, 530.
— electrodinámicos, no lineales, 9-12.
— de polarización en la pérdida de energía, 652-648.
Einstein. Postulados de la relatividad, 515-516.
Einstein-Smoluchowski. Fórmula de, 434.
Eléctrica(s). Ondas, 348, 758.
—-Polarización, 14, 148.
— Susceptibilidad. Definición de, 150.
Eléctrico. Campo ***E***, 28, 828.
— — cerca de bordes y aristas, 78-79.
— — Definición de desplazamiento, 149-150, 831.
— — derivable del potencial, 225.
— — Transformación del, 560.
Electromagnética. Densidad de energía, 243, 247.
Electrón. Carga del, 4-5.
— Dificultades del, 804-805.
— Modelo clásico del, 800-804.
— Radio clásico del, 692, 804.
Electrostático. Potencial, 34.
Emisión de fotones blandos, 715.
— — — Identidad de las expresiones clásica y mecanocuántica, 715-716.
Energía de un cuerpo magnético permeable, 223.
— electromagnética del campo electromagnético, 243.
— — — — en medios macroscópicos, 247.
— — Expresión covariante, 807-810.
— — de dipolos en campos externos, 146, 191.
— — de una distribución de carga, en un campo eléctrico externo, 146.
— — — de corriente en un campo magnético externo, 191.
— — de una partícula ligada. Cambios lentos debidos al amortiguamiento de radiación, 799.
— — radiada. Propiedades de transformación de Lorentz, 626, 627.
— electrostática en medios dieléctricos, 163.
— e ímpetu electromagnéticos. Expresión covariante, 807-810.

— — 4-vector, 539-540.
— de interacción hiperfina, 192.
— magnética, 220-222.
— potencial electrostática, 46.
— propia, 47, 803.
— radiada por una carga acelerada. Distribución angular y en frecuencia, 680-682.
— — por un momento magnético acelerado. Distribución angular y en frecuencia, 683.
— relativista de una partícula, 538-539.
— Transferencia a una carga ligada, 633.
— — en una colisión de Coulomb, 629-633.
Ensanchamiento de línea del oscilador. Amortiguamiento de radiación, 812-815.
— en las transformaciones de Lorentz, 541.
Escalar en las rotaciones ordinarias, 252.
Esfera en un campo eléctrico uniforme, 61-63, 153, 154.
— conductora y carga puntual, 56, 59, 61.
— — Función de Green para la, 63.
— Dispersión por una, 420, 423, 455-460, 783-789.
— con hemisferios a diferentes potenciales, 64-66.
— imanada, 200-202.
— — en un campo externo, 202-204.
— Solución general del potencial, 63-64, 117-120.
— uniformemente imanada, 200-202.
— — — en un campo externo, 202-204.
Esféricas. Funciones de Bessel (véase *Funciones de Bessel).*
Espacial. Tipo de separación entre dos puntos en el espacio-tiempo, 527.
Espacio-tiempo de la relatividad especial, 540-544.
Especial. Teoría de la relatividad (véase *Relatividad).*
Espectro de fotones de frecuencia invariante de Lorentz, 715- 726.
— en frecuencia de la radiación de transición, 702-703.
Espejo magnético, 191, 527-529.
Estabilización de una columna plasma, 493.
Estacionaria(s) en una cavidad resonante, Ondas, 359.
— Método de la fase, 322.
Estructura. Factor para la dispersión por un conjunto de obstáculos, 425.
Eter, 513.
Evanescentes. Modos en una guía de ondas, 351.
Excitación de ondas en una guía por una fuente localizada, 381.
Experiencias de deriva del éter, 520-521.
Extinción. Coeficiente de (véase *Coeficiente de absorción).*
— Teorema de Ewald y Oseen en el coeficiente de, 521.

Factor-*g* del electrón, 550.
Faltung. Teorema de las integrales de Fourier, 313.
Faraday para un circuito en movimiento, 218.
— en forma diferencial, 219.
— Ley de inducción de, 216-219.
Fase y grupo de las ondas de Alfvén, 495, 498.
— — Velocidad de, 307-309.
— de una onda plana. Invariancia relativista, 517, 529.
Ferromagnetismo. Definición de, 16.
FitzGerald-Lorentz. Hipótesis de contracción, 515.
Fizeau. Experimento de, 515, 573.
Fluctuaciones en la densidad del fluido y dispersión, 433.
— en la pérdida de energía, 641.
Flujo de energía, 243.
— de un fluido viscoso conductor entre placas paralelas en campos cruzados, 484-488.
— en guía de ondas, 353-356.
— magnetohidrodinámico, 484.
— en medios macroscópicos, 246.
— Velocidad del, 305, 307.
Fórmula(s) de Fresnel para la reflexión y refracción, 288-289.
— de Larmor de la potencia radiada, 670-671.
Fotón(es). Espectro emitido durante las colisiones, 715.
— Expresión invariante de Lorentz, 715 (véase también *Radiación, Radiación de frenado).*
— Límites sobre la masa del, 5-6.
— Tratamiento mediante el lagrangiano de Proca, 607-610.
— Momento cinético multipolar, 764.
Fourier. Integrales de, 69, 229, 313.
— Serie, 68-69.
— Suma de una serie, 72-76.
Fourier-Bessel. Serie de, 110, 134.
Fraunhofer. Difracción de, 449 (véase también *Difracción).*
Frecuencia(s) de corte en una guía, 350.
— crítica como límite superior del espectro de radiación emitido por una partícula relativista, 678.
— de plasma de un medio dieléctrico, 295, 327.
— — y primer precursor, 326.
— — Regla de suma, 318.
— de precisión de la partícula cargada en un campo magnético, 300, 590.
— propias de una cavidad resonante, 360.
— de resonancia. Desviación debido a las pérdidas de potencia en una cavidad, 366.
— — — por reacción radiativa, 813-815.
— — de un oscilador atómico, 159, 292, 321-322, 633, 636, 812.
Fuente localizada en una guía, 379-380.
— de radiación multipolar, 768-772.
Fuerza entre una carga y su imagen, 57, 58, 61, 81.
— — puntual y una esfera, 57, 58, 60, 61.

Fuerza entre circuitos recorridos por corrientes, 177.
— sobre un cuerpo dieléctrico, 166.
— — magnético permeable, 223.
— sobre un dipolo magnético en un campo no-uniforme, 191-192.
— sobre una distribución de corriente en un campo magnético, 190-192.
— entre dos espiras recorridas por corrientes, 177.
— — hilos paralelos, 178, 828.
— electromotriz, 216.
— sobre imanes permanentes, 212-214.
— Ley de Coulomb, 127.
— de Lorentz, 2, 582.
— de reacción radiativa, 798, 803.
— sobre la superficie de un conductor cargado, 49.
— tipo magnético, 587.
Función(es) asociadas de Legendre, 100.
— de Bessel mediante la representación integral curvilínea, 326.
— cilíndricas (véase *Funciones de Bessel).*
— delta, 29-30.
— — en coordenadas arbitrarias, 51, 114.
— — — esféricas, 114.
— — Densidades de carga en términos de la, 30, 117, 118.
— — — de corriente en términos de la, 182, 188, 409, 777-778.
— — Relación con la laplaciana de $1/r$, 40.
— — Representación integral, 69, 114, 121, 124, 135.
— — tridimensional en coordenadas cilíndricas, 120.
— escalón para θ (t), 314.
— de Green avanzada para la ecuación de ondas, 231.
— — para una caja cilíndrica, 138.
— — — rectangular, 125.
— — causal, 619.
— — Desarrollo en coordenadas cilíndricas, 120-122.
— — — — esféricas, 113-117.
— — — en funciones propias, 122.
— — diádica para obstáculos en guías de ondas, 385.
— — para dos planos paralelos a tierra, 135.
— — para la ecuación de ondas de Helmholtz, 230.
— — — independiente del tiempo, 231.
— — en electrostática, 43.
— — Ejemplos de empleo, 64, 117, 136, 137, 138, 139.
— — para la esfera, 63.
— — — concéntricas, 117.
— — e^{ikr}/R. Desarrollo en ondas esféricas, 755.
— — Expresión invariante de la, 619-620.
— — en una guía de ondas para calcular el efecto de obstáculos, 385.
— — invariante. Ecuación de ondas, 617.
— — para problemas bidimensionales, 84, 122, 138.
— — retardada y avanzada, 231, 619-620.
— — Simetría de la, 45.
— propias, 122.
— — para los campos en una guía de ondas, 349-350.
— — en una cavidad cilíndrica, 359-362.
— — Desarrollo de la función de Green en términos de, 124.
— — para la ecuación de ondas en una caja rectangular, 124.
— — en guías de ondas. Desarrollo ortonormal, 376.
— — — rectangulares, 352, 377.

Galileo. Invariancia de, 513.
— — y ley de Faraday, 217.
— — de la fase de una onda, 517.
— Transformación de las coordenadas espacio-temporales, 513.
Gauss. Caja de, 18.
— Ley de, 30-32.
— — Forma diferencial, 33.
Generadores infinitesimales del grupo de Lorentz, 549.
Giro de una partícula en un campo magnético. Frecuencia de, 300, 301, 590.
Girotrópicos. Expresiones fenomenológicas de la polarización en medios, 257.
Gradiente del campo eléctrico e interacción cuadrupolar, 146-147.
— en forma esférica con L, 781-782.
— y fuerza sobre un dipolo, 190-191.
— de la inducción magnética y velocidad de deriva y de partículas asociada, 594.
Green. Primera identidad de, 41.
— Teorema de, 40-42.
— — Empleo en difracción, 436.
— — equivalente vectorial del, 440-443.
— — de reciprocidad de, 52.
Grupo. Velocidad de, 308.
— — y de fase, 309.
— — en una guía de ondas, 354, 355.
— — en un plasma electrónico, 503.
Guía de ondas, 346-351.
— — Atenuación, 353-356, 358, 359.
— — Campos ortonormales en una guía rectangular, 376.
— — Condiciones de contorno, 348.
— — dieléctrica, 370-375.
— — Frecuencia de corte, 350, 353.
— — Fuentes en, 375-381.
— — Métodos variacionales, 381.
— — Modos en propagación y en corte, 350.
— — — TE y TM, 349.
— — Reflexión y transmisión por obstáculos, 381-386, 387-389.

Hall. Expresión fenomenológica del efecto, 273.
Hamiltoniano de partículas cargadas en campos externos, 584.
Hankel. Función de orden, 107 (véase también *Función de Bessel).*
— Transformadas de, 113.
Hartmann. Número de, 485.

Helicidad. Relación con la polarización circular, 282.
Hemisferios a diferentes potenciales, 64-66, 94.
Hidrodinámica (véase *Magnetohidrodinámica).*
Hiperfina. Interacción de energía, 192-193.
Histéresis magnética, 194.

Idealizaciones en el electromagnetismo, 21-24.
Imágenes para una carga puntual cerca de una esfera conductora, 55-57.
— en dieléctricos, 151-156.
— para una esfera conductora en un campo uniforme, 61-63.
— en medios permeables magnéticamente, 212-213.
— Método de las, 55-56.
Imán permanente, 16, 173.
— — Energía en un campo exterior, 191-192.
— — Método para tratar los problemas magnetostáticos de condiciones de contorno con, 198.
Imantación macroscópica. Definición de, 193, 240.
— — Densidad de corriente efectiva, 193, 194.
— — de una distribución de densidad de corriente, 186.
— — Divergencia en la densidad de corte magnética efectiva, 198.
Impedancia de una cinta plana, 386.
— en función de los campos, 248-251.
— de onda en una guía, 350.
— paralelo-relativa del diafragma. Expresión variacional, 385.
— superficial, 346.
— — de un buen conductor. Resistencia, 346.
— — Empleo como condición de contorno en dispersión, 785-786.
Impetu canónico. Conservación entre partículas y campos, 245-246, 616.
— — para una partícula en un campo exterior, 583.
— electromagnético, 245.
— — Expresión covariante, 807-810.
— — relativista de una partícula, 537-538.
— Transferencia en colisiones de Coulomb, 629.
— — máxima efectiva en radiación de frenado, 718.
— — mínima efectiva en radiación de frenado, 724-728.
Incoherente. Superposición, 425.
Indice de refracción, 285.
— — del agua en función de la frecuencia, 297-299.
— — efectivo para las ondas de Alfvén, 498.
— — Propiedades analíticas, 320-321.
— — Relación con la amplitud de dispersión frontal, 465.
— — — de dispersión, 321.
— — y velocidades de fase y grupo, 308-309.
Inducción. Ley de Faraday, 216-219.
— magnética, *B.* Condiciones de contorno, 19, 195-196.
— — de una carga en movimiento no-relativista, 175, 562.
— — de un conductor rectilíneo largo, 176.
— — Definición de, 173, 178.
— — de un elemento de corriente, 174.
— — de una esfera imanada, 200.
— — de una espira circular, 182-185.
— — a partir de la ley de Coulomb y la relatividad especial, 587-590.
— — Transformación de la, 560.
Inductancia, 268.
— a altas frecuencias comparada con la de bajas frecuencias, 304.
— y energía magnética, 268.
— mutua de dos espiras, 268, 269.
Inestabilidades en una columna de plasma, 491, 493.
Integral(es) de Airy en funciones de Bessel, 328, 685.
— Ecuaciones duales de primera clase, 128.
— elípticas. Empleo de, 135, 183, 213.
— generalizada de Kirchhoff, 437.
Intensidad de oscilador, 292, 636.
Interacción. Energía de (véase *Energía).*
Interfase entre dos medios. Condiciones de contorno, 17-21.
Interna. Radiación de frenado, 739.
Interno. Campo, en el lugar de una molécula del dieléctrico, 157.
Invariancia adiabática del flujo a través de la órbita de la partícula, 597-602.
— — del momento magnético de la partícula, 599.
— de contraste, 237.
— relativista de la carga eléctrica, 556.
— — del elemento de volumen cuadridimensional, 557.
— — del espectro diferencial de fotones, 715.
— — de la fase de una onda plana, 529-530.
— — de la potencia radiada, 671.
— — de los productos escalares de 4-vectores, 526, 542.
— — de la sección eficaz de radiación, 727.
Inversión espacial, 254.
— — Comportamiento opuesto de las densidades de carga eléctrica y magnética en la, 259.
— — Propiedades de transformación de las magnitudes físicas en la, 255.
Ionosfera. Propagación en la, 299-302.
Irrotacional. Definición de vector, 228.

Jacobiano en la transformación de coordenadas para la función delta, 114.
— de Lorentz del elemento de volumen cuadridimensional, 557.

Kirchhoff. Difracción integral de, 435-436.
— Equivalentes vectoriales de la integral de, 439-442.
— Integral generalizada, 437.
Klein-Nishina. Efectos en el método de los cuantos virtuales, 737.
— Fórmula de, 693.
Kramers-Kronig. Relaciones de, 317-318, 338-339.

Lagrangiano de Darwin para campos electromagnéticos, 604-607.
— — para interacciones entre partículas cargadas, 604-605.
— para una partícula cargada en campos externos, 583.
— de Proca. Efecto de la masa del fotón, 607-610.
Lamb. Desplazamiento de, 815.
Landau. Amortiguamiento de, 504.
Laplace. Ecuación de, 39, 42, 71, 77, 83, 103, 105.
— — Condiciones de contorno, 42.
Laplaciana cuadridimensional. Operador, 544.
Larmor. Fórmula para la potencia radiada, 670.
Legendre. Ecuación diferencial de, 88-93.
— Funciones asociadas de, 100.
— Polinomios de, 89.
— — Formas explícitas, 89.
— — como fórmula de Rodrigues, 89.
— — Ortogonalidad, 89.
— — Relaciones de recurrencia, 92.
— de primera clase y orden U. Función de, 98.
Lenz. Ley de, 217, 220.
Ley(es) de conservación para los medios macroscópicos, 246.
— de Ohm, 14, 294, 346.
— — — para un plasma en un campo magnético 509.
— de proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia. Verificación precisa, 5-9.
Liénard. Generalización de la fórmula de Larmor de la potencia, 671.
Liénard-Wiechert. Potenciales de, 665-669.
Límite clásico de los campos electromagnéticos, 2-3.
— — del momento cinético en campos multipolares, 764.
Línea(s) de fuerza. Congelación en, 482.
— de transmisión. Ejemplos de, 391.
— — Modo dominante, 346-347.
— — Relación entre L y C, 268.
Lineal. Superposición del principio, 9-13.
Llegada de una señal a través de un medio dispersivo, 319-332.
Localizada. Fuente en una guía de ondas, 405 (véase también *Dipolo, Multipolo* y *Momento multipolar).*
Longitud de atenuación para la luz visible en la atmósfera, 431.
— de onda en una guía, 351.
Longitudinal. Definición de vector, 228.
— Oscilaciones en un plasma, 501-502.
Lorentz (véase *Invariancia relativista).*
— Condición de, 227.
— — en forma covariante, 557.
— contraste de, 227.
— — de generadores infinitesimales, 549.
— Grupo de, 541.
— Invariancia experimental de la carga eléctrica, 556.
— — de la potencia radiada, 671.
— Transformación de, 524.
Luz. Velocidad de la, 3.
— — Cono de, 527.

Macroscópicas. Magnitudes electromagnéticas, 238-239.
— medias, 232-234.
Macroscópicos. Campos, 13, 235, 238, 239, 240.
Magnética. Permeabilidad, 14, 15, 194.
— Polarización, 14.
— Presión, 484.
— Tensión, 484.
— Viscosidad, 483.
Magnético. Apantallamiento, 204-206.
— Dipolo (véase *Campos dipolares. Momento dipolar).*
— — Espejo, 601-602.
— Potencial escalar, 180, 198.
Magnetohidrodinámica, 479.
— Ecuaciones básicas, 480-481.
— y física de plasmas, 478.
— Flujo de fluidos en, 484-488.
— Ondas, 494-498.
Magnetosónicas. Ondas, 495.
Magnetostáticas. Ecuaciones básicas, 180.
— Métodos para resolver problemas de condiciones en contorno en, 196-200.
Masa del fotón. Su consideración mediante el Lagrangiano de Proca, 607-610.
— — Imposibilidad de su medida con circuitos de parámetros concentrados, 608.
— — Límites sobre la, 5-6.
— — Modificación del campo dipolar terrestre, 626-627.
Maxwell. Ecuaciones de, 2, 225.
— Tensor de esfuerzos, 245.
Metales. Distribución real de la carga en su superficie, 24.
— en el ultravioleta. Transparencia de los, 296.
Método de imágenes (véase *Imágenes).*
Métrico de la relatividad especial. Tensor, 542-543.
Michelson-Morley. Experimento de, 515.
— Sucesores modernos del experimento para detectar la deriva del éter, 516.
Microondas (véase *Difracción, Cavidad resonante* y *Guía de ondas).*
Mixtas. Condiciones de contorno, 43, 125, 208.
MKSA (véase *Unidades).*

Modificaciones cuánticas en la pérdida de energía, 638.
— — en la radiación de frenado, 723.
Modo(s) en una cavidad cilíndrica, 359-362.
— en corte en una guía de ondas, 350, 376.
— en una guía de ondas, 351.
— HE en una guía dieléctrica, 372.
— normales en una guía de ondas, 375-381.
— en propagación y en corte, 351.
— TE y TM en geometría esférica, 361.
— — — en una guía de ondas, 349.
Moleculares. Momentos multipolares, 237, 239.
Momento(s) cinético(s) electromagnético de la carga eléctrica y el monopolo magnético, 261.
— — — Desarrollo en ondas planas, 339-340.
— — multipolares, 762-764.
— cuadrupolar electrostático, 142.
— — de una fuente oscilante, 406.
— — Interacción con el gradiente del campo, 146, 169.
— — nuclear, 147.
— — de una partícula. Cambios lentos debidos al amortiguamiento de radiación, 799.
— dipolar. Aproximación para el acoplamiento de la fuente a los modos de la guía, 415.
— — efectivo de una abertura, 415, 416, 418.
— electrostático, 141.
— — en el empleo del momento estático incluido en la dispersión en longitudes de onda larga, 419-426.
— — Energía en un campo exterior, 146, 191-192.
— — — de interacción entre dos, 147-148.
— — de una espira, 183, 184, 187.
— — inducido 148, 292.
— — magnetostático, 186.
— — — Fuerza sobre, 190-191.
— — oscilante eléctrico, 402.
— — — magnético, 405.
— — Par sobre un, 191.
— — Relación con el momento cinético de la partícula, 188.
— magnético (véanse también *Momento dipolar).*
— — anómalo del electrón y del muón, 568.
— — Densidad de, 186.
— — Dispersión por uno inducido, 420, 423.
— — del electrón, 550.
— — Fuerza en un campo magnético no uniforme, 190-191.
— — Invariancia adiabática, 598-602.
— — sobre par, 173, 191.
— — Radiación emitida cuando está en movimiento, 683.
— — — — en su desaparición, 743-744.
— — — de uno variable con el tiempo, 404-408, 771-772.
— multipolar electrostático, 141-142.
— — — de una antena lineal alimentada en su centro, 779.
— — — Estimación para átomos y núcleos radiantes, 772.
— — magnetostático, 185-189 (véase también *Momento dipolar, Momento magnético* y *Momento cuadrupolar).*
— — — Aproximaciones para longitudes de ondas largas, 771.
— — — de una fuente oscilante. Expresión exacta, 771.
Monopolo magnético, 258-260.
— — y cuatización de la carga eléctrica, 260-267.
— — Potencial vector de, 264, 273.
Mössbauer. Efecto de. Empleo para detectar el efecto Doppler transversal, 530.
— — — en experimentos de deriva de éter, 517.
Movimiento. Campos de una carga en, 562, 668.
— circuitos y ley de inducción, 217-218.
— de una partícula cargada en un campo magnético uniforme y estático, 590.
Múltiple. Dispersión de partículas por átomos, 656-657.
Multipolo (véase también *Momento dipolar. Momento magnético* y *Momento multipolar).*
— electrostático, 141.
— — cartesiano, 141-142.
— — esférico, 141.
— magnetostático, 185-189.
— — radiante. Aspectos generales, 398-399.
— — variable con el tiempo, 398-399, 768-772.

Neumann. Condiciones de contorno, 42-43.
No conmutatividad, 549.
No locales en el tiempo y en el espacio, 15, 314.
— — — en la relación entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$, 312.
No localidad en los conductores a altas frecuencias, 314.
Normalización de los campos en una guía de ondas, 376, 377.
Nuclear. Momento cuadrupolar, 147.
— — — Energía de interacción, 146-147, 169, 170.
Núcleos. Estimación de las velocidades de transición multipolar en los, 773-776.
Número de ondas de Debye, 503.
— — Dispersión en, 306-307.
— — y frecuencia como 4-vector, 530.
— en una dimensión. Paquetes de, 305-309,
— — Parte imaginaria debido a las pérdidas, 292-293, 302, 354, 358.

Oblicuidad. Factor de, 439.
Obstáculos en guías de ondas, 381-386.
Ohm. Ley de, 14, 294, 346.
Onda(s) de Alfvén, 494.
— — con corriente de desplazamiento, 498.

Ondas en una dimensión. Paquetes de, 305-309, 338.
— Dispersión en el tiempo, 309-312.
— eléctricas transversales. Atenuación en una guía de, 355, 356.
— — — esféricas, 759.
— — — — en una cavidad de esferas concéntricas, 367.
— — — en una guía dieléctrica, 373.
— — — — rectangular, 352, 376, 377.
— — — Relación con los momentos multipolares, 770-771.
— esféricas en el campo escalar, 752-756.
— — — vectorial, 757-760.
— en la ionosfera, 299-302.
— magnéticas, 759.
— magnetohidrodinámicas, 494-498.
— — con corriente de desplazamiento, 498.
— — Efecto de la conductividad finita y de viscosidad, 497.
— magnetosónicas, 495.
— en un medio conductor, 303-304.
— plana electromagnética, 276-280.
— — escalar. Desarrollo en armónicos esféricos, 781.
— — — Propagación en un medio dispersivo, 305, 309.
— — — vectorial. Desarrollo en armónicos esféricos, 783-789.
— — no homogénea, 279, 304.
— — magnetohidrodinámica, 495.
— — en un medio conductor, 302-305.
— — en un plasma, 502-503.
— — Reflexión y refracción de una, 285-289.
— transversales, 299.
— — electromagnéticas, 346, 347.
— — magnéticas. Atenuación en una guía de, 355, 356.
— — — en una cavidad cilíndrica, 361-362.
— — — cilíndricas en una guía de, 348, 349.
— — — esféricas, 758-759.
— — — — en la cavidad tierra-ionosfera, 367.
— — — en una guía dieléctrica, 374.
— — — — de ondas rectangular, 352, 376, 377.
— — — Relación con los momentos multipolares, 770-771.
— — en magnetohidrodinámica, 495, 498.
— — en un medio conductor, 302-305.
— — planas, 279.
— — — no homogéneas, 278-279.
— — en un plasma, 502-503.
— Propagación en un medio dispersivo, 305-309.
Opalescencia crítica, 433.
Operador(es) (véase *Gradiente, Laplaciana).*
— laplaciano cuadrimensional, 544.
— de momento cinético y armónicos esféricos vectoriales, 759.
— — — *L,* 756.
— — — y otros operadores diferenciales vectoriales. Igualdades en que intervienen, 756, 760, 770.
Optica no lineal, 16.
Optico. Teorema 460-466.
Orificio circular. Campo magnético próximo al, 209.
— — Momentos dipolares efectivos, 129, 209, 409-411, 416-419.
— — en un plano conductor. Campos eléctricos en la proximidad de un, 130.
Ortogonales. Funciones y desarrollos, 66-70.
Ortogonalidad de los armónicos esféricos, 101-102.
— — — vectoriales, 759.
— de las exponenciales complejas en intervalo infinito, 69.
— de las funciones de Bessel en intervalo finito, 109, 134.
— — de Green en intervalo infinito, 114.
— — de los polinomios de Legendre, 89.
— — de senos y cosenos, 68.
Ortonormal(es). Desarrollos, 67.
Oscilador. Absorción de energía por un, 635.
— con amortiguamiento radiactivo, 812.
— Dispersión y absorción de radiación, 815-820.
— en el modelo para la constante dieléctrica, 159, 292.

Pantallas complementarias, 446.
Par sobre un dipolo magnético, 173, 191.
— sobre una distribución de corriente, 178.
— sobre el spin, 532-533.
— — Ecuación relativista, 564-568.
Paramagnetismo. Definición de, 16.
Parámetro(s) de impacto y ángulo de dispersión, 630.
— — — — máximo efectivo en colisiones de Coulomb, 631.
— — — — mecanocuántico, 638.
— — — — en el método de los cuantos virtuales, 732, 735.
— — — — mínimo efectivo en colisiones de Coulomb, 630.
— en la transformación de Lorentz, 525.
Paridad de campos multipolares, 765 (véase también *Inversión espacial).*
Partícula en ***B*** no homogéneo, 593-597, 598-602.
— — uniforme estático, 590.
— en el campo dipolar terrestre, 624.
— — externo, 590.
— cargada de autoenergía, 803, 807.
— — Dinámica de, 581-587.
— — Fuerza de Lorentz sobre una, 2, 581-587.
— — Movimiento en un campo magnético uniforme, 590.
— — — — — no uniforme, 593-597.
— Movimiento en ***E*** y ***B*** cruzados, 591-593.
— con reacción de radiación, 597-800, 810.
Parseval. Teorema de, 679-680.
Patrones. Unidades y, 826.
Pérdida (véase *Pérdida de potencia).*

— de energía. Efecto de densidad en la, 642-648.
— — Fórmula clásica de Bohr, 632, 636.
— — — — mecanocuántica de Bethe, 639.
— — por un monopolo magnético, 663, 664.
— — en un plasma electrónico, 652-653.
— — radiativa en aceleradores, 672.
— — — — en colisiones relativistas, 730-731.
— — — — no relativistas, 723-724.
— — — por revolución en una órbita circular, 672.
— potencia en una cavidad resonante, 362.
— — debida a la conductividad infinita, 345-346.
— — en una guía de ondas, 353-356.
— — por unidad de superficie en un conductor, 345-346.
Permanente. Imanación, 16.
Permeabilidad incremental, 196.
— magnética, 14, 194.
Permitividad dieléctrica, 14.
— — Tensor de, 14, 150.
Perturbación de las condiciones de contorno, 357-359.
Piel. Efecto (véase *Profundidad de penetración*).
Plano perfectamente conductor con un campo magnético, 206-209.
Plasma. Amortiguamiento de Landau en el, 504.
— en un campo magnético externo, 299-302, 510.
— Confinamiento por campos propios, 488-490.
— — mediante campos externos, 493.
— — — espejos magnéticos, 601-602.
— Constante dieléctrica del, 652.
— y ecuación de Boltzmann, 509-510.
— Definición de, 478.
— Inestabilidades en una columna de, 491-493.
— longitudinal, 501.
— Oscilaciones del, 499-503.
— Pérdidas de energía en un, 652-653.
— transversal, 502.
Poincaré. Tensiones de, 806-807.
Poisson. Ecuación de, 39.
— — integral equivalente, 41.
— Ejemplos de solución, 117, 118.
— Solución formal mediante la función de Green, 43-46.
Polar(es). Definición de vector, 254.
— sustancias, 162.
Polarizabilidad efectiva de una abertura en un plano conductor, 417.
— electrónica, 161, 292.
— molecular, 159, 160-163.
— — Modelos de, 160-163.
— de orientación, 162.
Polarización de corriente variable con el tiempo, 681-682.
— Densidad de carga de, 149, 153.
— — — superficial, 153.
— macroscópica eléctrica, 14, 148, 238.
— — magnética, 14, 193-194, 239.
— magnética. Densidad de carga efectiva, 198.
— de la radiación de cargas aceleradas, 670, 681-682.
— — de Cherenkov, 649.
— — circular, 281.
— — a derechas y a izquierdas, 281-282.
— — dispersada por la atmósfera, 432.
— — — por una pequeña esfera conductora, 424.
— — — — — dieléctrica, 422.
— — en la dispersión de Thomson, 691.
— — elíptica, 281.
— — de frenado, 717.
— — lineal, 280.
— — de multipolos, 403, 405.
— — Parámetros de Stokes para la descripción del estado de, 283-284.
— — por reflexión, 289.
— — de sincrotrón, 686, 710.
— Vectores de, 280, 282.
— — por un multipolo (l, m), 768.
— — por partículas cargadas en aceleradores lineales y circulares, 672.
Potencia. Energía de (véase *Energía*).
— escalar, 138.
— — para campos variables con el tiempo, 225.
— Flujo (véase *Flujo de energía*).
— instantánea radiada por una carga acelerada, 670.
— radiada por una antena lineal. Distribuciones angulares, 409-410, 780.
— — por una carga en movimiento periódico arbitrario, 707.
— — por un cuadrupolo oscilante, 406-407, 767.
— — por un dipolo en funciones de Bessel, 112, 113.
— — — oscilante, 403, 767.
— — — en coordenadas cilíndricas, 122.
— — — — esféricas 94.
— — — en polinomios de Legendre, 92.
— — de una línea cargada en coordenadas cilíndricas, 122.
— — cerca de un pequeño orificio en un plano conductor, 131.
— — Representación integral de Fourier, 123-124.
Potencial electrostático, 34.
— — bidimensional, 72-76.
— — en una caja cilíndrica, 138.
— — — rectangular, 123-124.
— — de una capa dipolar, 37.
— — de una carga puntual entre planos a tierra, 135-136.
— — Desarrollo en armónicos esféricos, 103.
— — en magnetostática, 198.
— — Relación con el trabajo realizado, 34.
— — y vector para campos variables con el tiempo, 225.
Poynting. Teorema de, 242.
— — Generalización covariante, 611-613.
— — para campos armónicos, 248-251.
— Vector de, 243.

Poynting. Vector de, en una guía de ondas, 353.
— — para una onda plana, 279.
Precesión de Thomas, 549-555, 566.
Precursor de Brillouin (segundo), 325, 328.
— — Observación experimental, 330.
— de Sommerfeld (primero), 325, 326.
Presión cinética ordinaria en dinámica de fluidos, 480.
— magnética, 484.
— de radiación, 271.
Principio de incertidumbre, 307, 312.
— — Empleo en problemas de colisiones para obtener las modificaciones cuánticas, 638, 640, 655-656, 657, 732.
Problemas de condiciones de contorno con campos multipolares, 789.
— — — en coordenadas cartesianas, 70-72.
— — — — cilíndricas, 105.
— — — — esféricas, 86-87.
— — — en dieléctricos, 151-156.
— — — en magnetostática, 196-200.
— — — Método de solución de la función de Green, 43-46.
— — — — por imágenes, 45-46.
Profundidad de penetración, 304, 343.
— — en un plasma, 295-296.
— — *Q* de una cavidad, 364.
— — y resistencia superficial, 345-346.
Promediado. Método, para definir los campos macroscópicos, 234.
Propagación en un dieléctrico anisótropo, 336 (véase *Señal de propagación).*
— en la ionosfera, 299-302.
— en un medio conductor, 302-305.
— — dispersivo, 305-308, 309-312.
— de una señal en un medio dispersivo, 319-332.
Propiedades de transformación, 588.
Propio. Tiempo, 528.
Pseudoescalar. Tensor o vector, 254.

Q de una cavidad esférica, 791-792.
— — cilíndrica circular, 365.
— — resonante, 363, 364.
— Interpretación física de, 365.
— de las resonancias de Schumann, 369, 394.

Radiación de una antena corta, 403-404.
— — lineal, 408-412, 776-781.
— — — en función de multipolos, 776-781.
— campos de, 400.
— por una carga acelerada. Distribución angular, 674-675, 678.
— — en movimiento arbitrario, 680-682.
— — relativista. Argumentos cualitativos, 678-679.
— — — en órbita circular instantánea, 683.
— de Cherenkov, 648-651.
— clásica de frenado, 722.
— cuadrupolo eléctrico, 406-407.
— de un dipolo eléctrico, 403.
— — magnético, 405.
— — — en movimiento, 683.
— emitida en la captura o desaparición de la carga en los procesos beta, 738-739, 740-745.
— — — de un electrón orbital, 740-745.
— — por una carga durante las colisiones, 714-720.
— — — extremadamente relativista. Argumentos cualitativos, 676-678.
— — durante la desintegración beta, 738-740.
— de frenado, 714-720.
— — en colisiones de Coulomb, 720-727.
— — como dispersión de cuantos virtuales, 736-737.
— — Distribución angular de la, 717-718.
— — Efectos de apantallamiento en, 728-729.
— — — — a bajas frecuencias, 717.
— — Fórmula de Betthe-Heitler por la, 723.
— — interna, 739.
— — no relativista, 725-727.
— — Polarización de la, 717.
— — relativista, 725-727.
— — Transferencia de ímpetu máxima efectiva, 718.
— de una fuente oscilante localizada, 398-401, 768-772.
— helicoidal de sincrotrón asociada, 707-708.
— Longitud de, 731.
— multipolar de una antena lineal alimentada en su centro, 776-781.
— — de átomos y núcleos, 772.
— — Distribución angular, 765-768.
— — Fuentes de, 768-772.
— — de menor orden. Discusión elemental, 401-402.
— — Potencia total radiada, 768.
— — Reglas de selección mecanocuánticas, 764.
— Presión de, 271.
— de sincrotrón, 688, 689.
Radio clásico del electrón, 692, 804.
— de giro de una partícula en un campo magnético, 590.
Rapidez. Definición, 525.
Rayleigh. Aproximación en la difracción, 438.
— — en la dispersión, 428.
— Dispersión de, 431.
— Explicación del azul del cielo, 426, 430.
— Ley de, 420.
Rayos X. Dispersión de, por los átomos, 694-696.
— Polarización, 717.
Reacción de radiación y anchura de línea, 813.
— — Cambios lentos de la energía y el momento cinético debidos a la, 799, 821.
— — y corrimiento de frecuencia del oscilador, 813.
— — Ecuación integrodiferencial de movimiento incluyendo la, 810-812.
— — — de movimiento de Dirac, 822.

— — — — — semilla, 798, 804.
— — — Fuerza efectiva, 797-800.
— — — Tiempo característico, 796.
Reactancia en función de los campos, 251.
Reciprocidad en el teorema de Green, 52.
Reflexión de una esfera en difracción, 457-458.
— de una onda plana en una interfase, 285-289.
— — — de radio por la ionosfera, 300.
— de una partícula cargada en una región de gran intensidad del campo, 600.
— Polarización por 289.
— total interna, 290.
Refracción de una onda plana en una interfase, 285-289 (véase también *Indice de refracción).*
Región visible del espectro. Razones para la, 297.
Regla de suma dipolar para la frecuencia de plasma, 318.
— — — — para las intensidades de oscilador, 292.
— — — — para la sección eficaz radiativa total, 819-820, 823.
Relación(es) de completitud, 68.
— — — para los armónicos esféricos, 101.
— — — para las exponenciales complejas, 69, 121.
— — — para las funciones de Bessel en un intervalo infinito, 135.
— de conmutación para los generadores de la transformación infinitesimal de Lorentz, 549.
— — — del operador momento cinético *L*, 756.
— constitutivas, 14.
Relatividad. Estructura matemática, 531-533.
— de Galileo, 513-514.
— Postulados de la, 515.
— Pruebas experimentales, 516.
— Teoría especial de la, 512.
Relativista. Adición de velocidades, 531-532.
— de la carga eléctrica. Invariancia, 556.
— del elemento de volumen cuadridimensional. Invariancia, 557.
— de los productos escalares de 4-vectores. Invariancia, 526, 542.
Representación integral de Fourier, 123-124.
Resistencia en función de los campos, 251 véase también *Conductividad, Ley de Ohm, Resistencia de radiación* y *Resistencia superficial).*
— de radiación, 251.
— — — de una antena corta lineal, 404.
Resonancia. Anchura de, 363.
— en una cavidad, 363.
— Fluorescencia, 812.
— Schumann, 369.
Resonante. Absorción, 293, 818.
— — — y dispersión anómala, 293, 317.
— Forma de la línea, 364, 814.
Retardada. Función de Green, 231, 619-620.
Reynolds magnético. Número de, 482.
Rodrigues. Fórmula para los polinomios de Legendre, 89.
Rombo de Fresnel, 291.
Rotaciones, 251-254.
— Propiedades de transformación de las magnitudes físicas en las, 255.
— como transformaciones de Lorentz, 547-548.
Rutherford. Relación entre el ángulo y el parámetro de impacto en la dispersión de, 630.

Schumann. Resonancia de, 369.
Sección eficaz de Betthe-Heitler para la radiación de frenado, 722.
— — — biestática. Definición, 420.
— — — clásica para la radiación de frenado, 722.
— — — Definición para la dispersión de ondas electromagnéticas, 420, 691.
— — — de dispersión (véase *Dispersión de partículas. Dispersión de radiación).*
— — — — y absorción de radiación por una carga ligada armónicamente, 817-820.
— — — — clásica dieléctrica pequeña, 420-421, 788.
— — — — — de partículas. Relación con el parámetro de impacto, 654-655.
— — — — de partículas en ángulos pequeños en el campo apantallado de Coulomb, 655-656, 728.
— — — — — clásicas en función del parámetro de impacto, 654-655.
— — — — para la radiación, 420, 691.
— — — de radiación clásica de frenado, 722.
— — — — Definición de la, 721.
— — — — de frenado relativista, 725.
— — — — — no relativista, 723.
— — — — en el límite de apantallamiento total, 729.
— — — de reacción, 819-820.
— — — Regla de suma dipolar para la, 819-820.
— — — de Rutherford, 654-655, 720.
— — — de Thomson, 691.
— — — total en la dispersión de partículas rápidas por átomos, 656-657.
— — — — teorema óptico, 461.
Selección. Reglas para las transiciones multipolares, 764-765.
Señal denominada precursor de Brillouin, 325, 327.
— — — — de Sommerfeld, 325-326.
— Límite superior en la velocidad de, 329.
— Observación experimental, 330-332.
— de propagación en un medio dispersivo, 319-332.
— en régimen estacionario, 329.
— Velocidad de, 326.
Separación de variables, 70.
— — — en coordenadas cartesianas, 70.
— — — — cilíndricas, 105.
— — — — esféricas, 86.

Sincrotrón. Radiación de, 683-690.
— — por una carga de trayectoria helicoidal, 707.
— — Distribución singular y en frecuencia, 685, 686-687, 688.
— — Ejemplos astrofísicos, 689.
— — Polarización, 686, 710.
Silbidos, 302.
Sistema internacional. Patrones de masa, longitud y tiempo, 827.
— gaussiano. Ecuaciones electromagnéticas básicas en el, 832 (véase también *Unidades).*
— tierra-ionosfera como cavidad resonante, 367-370.
Smythe-Kirchhoff. Aproximación vectorial de, 451.
— — Integral para la difracción de campos vectoriales, 446.
Snell. Ley de, 285.
Solenoidal. Definición de vector, 228.
Solenoide, 211.
Soluciones en ondas progresivas, 286, 306, 309, 338.
— — — en una guía de ondas, 347.
— — — para la propagación de una señal en un medio dispersivo, 319-332.
Spin. Ecuación de movimiento relativista para el, 564.
— — — — de Thomas, 566.
— órbita. Interacción, 554.
— Precisión de Thomas, 549-555, 566.
Stokes. Parámetros de, 283.
— Teorema de, 35.
Sturm-Liouville. Ecuación de, 121.
Suma escalar de dos 4-vectores, 526, 542.
Superconvergencia para la constante dieléctrica. Relación de, 319.
Superficial. Impedancia, 346.
Superposición incoherente, 425.
— lineal de los campos eléctricos, 27-28.
— — de ondas planas, 277, 305-312.
— — de los potenciales. Ejemplos, 59.
Susceptibilidad eléctrica, 150, 157-160.

Temporal y espacial. Tipo, 527-528.
Tensión(es) lo largo de las líneas de un campo magnético, 484, 492.
— y leyes de conservación, 611, 612, 615, 616.
— propias y de Poincaré, 806.
Tensor para los campos electromagnéticos, 611.
— de conductividad en un plasma, 509.
— dual intensidad del campo, 558.
— de esfuerzos de Maxwell, 245.
— — — en los medios macroscópicos, 248.
— de intensidad del campo electromagnético, 558.
— métrico de la relatividad especial, 542-543.
— Momento cinético electromagnético, 270, 271, 613, 615.
— rotacional, 252.
— de tensiones canónico, 610-611.
— — — en cuatro dimensiones, 611.
— — de Maxwell, 245.
— — — en medios macroscópicos, 247.
— — simétrico en cuatro dimensiones, 613-614.
Teorema(s) de adición para los armónicos esféricos, 103-105.
— del cálculo vectorial. Apéndice, 841.
— de Stokes, 35.
— del valor medio para el campo eléctrico, 145.
— — — — magnético, 190.
— — — para el potencial electrostático, 52.
— vectoriales con armónicos esféricos vectoriales, 782.
— — de la divergencia, 32.
— — de Green, 441.
Thomas. Ecuación relativista para el spin, 566.
— factores de, 554.
Thomson. Dispersión de, 690-693.
— Sección eficaz de, 691.
— Teorema de, 53.
Tiempo característico en el amortiguamiento de radiación, 796.
— de colisión para los campos de una partícula relativista, 562.
— Dilatación del, 529.
— retardado, 231, 667.
— Verificación experimental, 528-529.
Tierra. Concepto de, 22.
Trabajo de extracción de un metal y carga imagen, 61.
— Relación con la energía potencial, 34.
Transferencia de energía. Reconciliación entre las expresiones clásica y cuántica, 637.
— del ímpetu y la energía relativistas, 533-540.
— de los potenciales, 557.
— relativista (véase *Lorentz. Transformación de).*
— — del sistema centro de masas al laboratorio, 577-578.
— — del vector spin, 564-565.
— — de 4-vectores y tensores, 526, 541-542.
— — de velocidades, 532.
— — de la 4-velocidad, 533.
Transformación(es) de la aceleración, 572.
— de los campos electromagnéticos, 560, 591-593.
— de la carga en movimiento uniforme, 561-564, 574.
— de contraste, 181, 227.
— — y ecuación de Schrodinger, 265.
— — y lagrangiano de una partícula, 584.
— de coordenadas, 524-525.
— — espaciotemporales, 524-526.
— de un cuadrivector, 526.
— de las densidades de carga y corriente, 557.
— de dualidad de campos y fuentes, 258.
— Forma matricial explícita de la, 548-549.

— de Fourier de los campos de una carga en movimiento uniforme en un dieléctrico, 644.
— — de una onda amortiguada exponencialmente, 363, 814.
— — de un paquete de ondas, 307, 310, 319.
— — en el vacío, 635, 699.
— de generadores, *S* y *K*, 547.
— de Lorentz, 524.
— ortogonales, 252.
— propia e impropia, 546.
— Propiedades de las magnitudes físicas en las rotaciones. Reflexión espacial e inversión temporal, 251-255.
— relativista y precesión de Thomas, 551-555.
— — del vector de onda y de la frecuencia, 530.
— Representación matricial de las de Lorentz, 544-549.
— Tablas de, 255.
Transición. Efecto del espesor de las hojas, 711.
— — Longitud de formación, 698.
— Probabilidad de, 772.
— — en átomos hidrogénicos, 708, 821.
— — estimación en átomos y núcleos, 772-776.
— Radiación de, 696-704.
— — Consideraciones cualitativas, 696-699.
— — Distribución angular y en frecuencia, 701-703.
Transmisión. Coeficiente de, 452.
Transparencia del agua en la región visible, 297.
— de los metales en el ultravioleta, 296.
Transversal. Campo vectorial, 228.
— Efecto Doppler, 530.
Trayectoria helicoidal de una partícula en un campo magnético, 590.

Unicidad de la solución, 43.
— en el teorema para las soluciones de la ecuación de Poisson o Laplace, 39-42.
Unidades y dimensiones. Apéndice sobre, 825.
— — básicas y derivadas, 626.
— — de conversión entre gaussiano y MKSA, 834.
— — Ecuaciones de Maxwell y otras en diferentes sistemas, 832.
— — Tabla de conversión, 833, 834.
— y ecuaciones electromagnéticas, 827-829.
— de inductancia, 834.
Universo. Línea de, 527.

Vacío. Polarización del, 12.
Van Allen. Cinturones de radiación de Júpiter, 689.
— Problemas ilustrativos, 623-625.
Variacional para la admitancia paralela, 383-384.
— para la impedancia paralela, 385.
— Principio para la capacidad, 53.
Vector axial. Definición, 254.
— Definición de, 253.
— potencial de un cuadrupolo eléctrico oscilante, 406.
— — de un dipolo eléctrico oscilante, 402.
— — — magnético, 187.
— — — — oscilante, 405.
— — de una fuente localizada oscilante, 399.
— — en magnetostática, 181, 196-197.
— — de un monopolo magnético, 264, 274.
— — Sinusoidales sobre la superficie de la antena, 411.
Vectorial. Teorema de Green, 440.
Velocidad de Alfvén, 495.
— Campos de una carga en movimiento arbitrario, 668.
— cuadrivector, 533-534.
— deriva por curvatura, 596.
— de deriva *E B*, 591.
— — gradiente, 594.
— de fase y de grupo en una guía de ondas, 354, 355.
— — — de ondas planas, 277.
— — — de las oscilaciones del plasma, 504.
— — — de los silbidos, 302.
— Ley de transformación relativista, 531-532.
— de la luz. Independencia con frecuencia de la, 523.
— — valor numérico, 3.
— de una partícula, 532-533.
— en la relatividad especial. Adición de, 531-533.
— Selector de, 593, 623.
Vida media de los piones en movimiento relativista, 529.
— — de las transiciones multipolares, 809.
Viscosidad. Coeficiente de, 480.
— — Efecto en el flujo magnetohidrodinámico, 484-488.
— — magnética, 483, 496-498.
Volumen de coherencia en la radiación de transición, 698.

Wiezsacker-Williams. Método de (véase *Método de cuantos virtuales*).
Wronskiano. Definición, 121.
— de las funciones de Bessel, 121.
— — — esféricas, 754

Yukawa. Potencial e, 607.

Zona de radiación, 399.
— — en la difracción, 449.